13.15÷15.15

COMUNICAZIONE: processo mediante il quale l'informazio[ne] viene trasmessa, mediante appositi segnali, da un sistema all'altro

I SEGNALI COSTITUISCONO UN ELEMENTO ESSENZIALE DELLA NOSTRA VITA QUOTIDIANA.

Esempi

- SEGNALE ACUSTICO (variazione pressione aria)
- SEGNALE RADIO (campo elettromagnetico variabile)
- SEGNALE VISIVO (variazione intensità luminosa)

N.B! IL SEGNALE ESISTE IN QUANTO SI FA PORTATORE DI UN' INFORMAZIONE

In modo più appropriato si può dire che "UN SEGNALE È UNA QUALSIASI GRANDEZZA FISICA VARIABILE A CUI È ASSOCIATA UN'INFORMAZIONE".

L'INFORMAZIONE PUÒ ESSERE DI VARIA NATURA ESTETICA MUSICA, .

COS'È UN SISTEMA?

SI PARLA IN GENERALE DI SISTEMA QUANDO SI PENSA ALLA GENERAZIONE DI UN SEGNALE O ALL'ESTRAZIONE DI INFORMAZIONE DA UN SEGNALE

LA FUNZIONE DI UN SISTEMA DIPENDE DALL'APPLICAZIONE

ESEMPIO SISTEMA DI COMUNICAZIONE

LA FUNZIONE DEL SISTEMA DI COMUNICAZIONE È QUELLA DI TRASPORTARE IL CONTENUTO INFORMATIVO DI UN SEGNALE MESSAGGIO SU UN CANALE DI COMUNICAZIONE E DI FORNIRLO AL DESTINATARIO CON UN CERTO GRADO DI AFFIDABILITÀ.

DEFINIZIONE

UN SISTEMA È FORMALMENTE DEFINITO COME UN'ENTITÀ (PROCESSO), O INTERCONNESSIONE DI ENTITÀ (PROCESSI), IN CUI UNO O PIÙ SEGNALI SONO MANIPOLATI PER ESEGUIRE UNA DETERMINATA OPERAZIONE E NUOVI SEGNALI SONO GENERATI.

I segnali e la loro classificazione

Il modo più conveniente per caratterizzare, studiare ed elaborare un segnale passa attraverso la rappresentazione dello stesso come una *FUNZIONE MATEMATICA DI UNA O PIU' VARIABILI.*

Es. Elettrocardiogramma (1 variabile)

Può essere considerato come il *grafico di una funzione di variabile reale a valori reali* $x(t): \Re \rightarrow \Re$.

t: tempo

$x(t)$: andamento della tensione raccolta dall'apparato biomedicale

Es. Immagine (2 variabili)

<u>funzione bidimensionale</u> $z(x_1, x_2): \Re^2 \rightarrow \Re$ delle 2 coordinate spaziali (x_1, x_2), ove il valore z rappresenta *l'intensità luminosa* del generico pixel di coordinate (x_1, x_2).

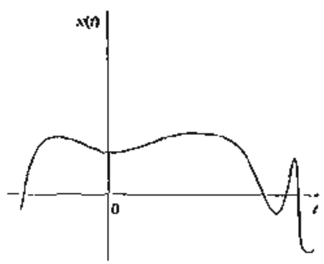
<u>NB!</u> In questo caso la variazione del segnale avviene in un ambito di tipo spaziale: si hanno diversi valori del segnale per diversi valori delle coordinate spaziali del generico pixel.

In generale si considerano soltanto segnali monodimensionali di una variabile reale $x(t)$, dove la variabile indipendente t ha il significato di un tempo. La rappresentazione riflette questo caso tipico, in cui l'evoluzione del segnale avviene in ambito temporale.

A seconda dell'applicazione d'interesse, esistono differenti classificazioni dei segnali.

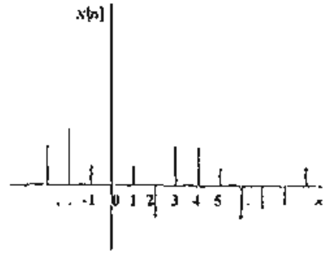
1. Una prima classificazione può essere effettuata in base ai valori assunti dalla variabile indipendente. Si distinguono infatti:

- SEGNALI A TEMPO CONTINUO → il dominio della funzione ha la cardinalità dell'insieme dei numeri reali. La variabile indipendente può assumere con continuità tutti i valori compresi entro un certo intervallo, eventualmente illimitato. Esempio:



Notazione
$x(t)$: segnale
t: variabile temporale continua

- SEGNALI A TEMPO DISCRETO (SEQUENZE)→ il dominio della funzione ha la cardinalità dell'insieme (discreto) dei numeri interi. Nell'ambito dei sistemi di comunicazioni tali segnali vengono denominati *sequenze.*

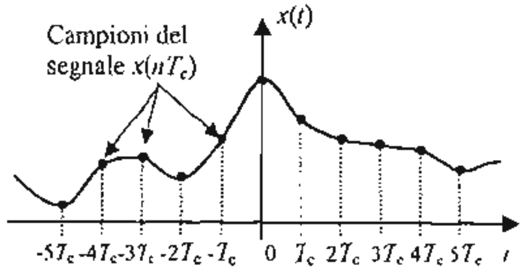


Notazione
$x[n]$: sequenza
n: variabile temporale discreta

I segnali a tempo discreto sono spesso ottenuti dal campionamento di un segnale a tempo continuo prendendone dei campioni ad un intervallo temporale T_c costante. Campionando il segnale tempo continuo $x(t)$ agli istanti $t = nT_c$, dove n è un numero intero relativo, si ottiene il segnale tempo discreto

$$x[n] = x_n = x(nT_c), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

dove si è tralasciata l'informazione sull'intervallo di campionamento T_c.



2. Si è detto delle svariate forme che l'informazione può assumere: lettere, numeri binari, fluttuazioni continue di grandezze fisiche ecc.

Un'ulteriore possibile classificazione, se vogliamo duale della precedente, può essere fatta sulla base dei valori assunti dai segnali (cioè sulla base del codominio della funzione che li rappresenta). Si avranno in questo caso:

- SEGNALI CONTINUI NELLE AMPIEZZE → l'informazione è contenuta nella variazione continua nel tempo del segnale stesso (telefonia, televisione, elettrocardiogramma, ecc.).
- SEGNALI DISCRETI O NUMERICI (DIGITALI) NELLE AMPIEZZE→ l'informazione può assumere un numero finito di configurazioni, simboli e relativi segnali (telegrafia, testi, dati, ecc).

Es. classico di segnale discreto è quello del segnale telegrafico che impiega, per rappresentare i caratteri alfabetici, tre simboli "punto", "spazio" e "linea".

SEGNALE BINARIO → 2 caratteri per rappresentare un bit (binary digit = numero binario, 1 o 0).

La **distinzione tra analogico e numerico** NON **può essere assoluta**; vedremo, infatti, che un aspetto importante è proprio la possibilità di trasmettere in forma numerica anche l'informazione originariamente di tipo analogico.

Queste due classificazioni permettono di suddividere i segnali in quattro classi:

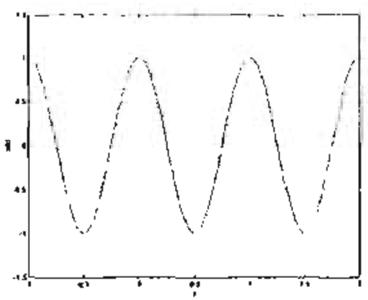
- **Analogici:** continui nel tempo e nelle ampiezze;
- **Digitali (o numerici):** discreti nel tempo e nelle ampiezze;
- **Campionati:** discreti nel tempo e continui nelle ampiezze;
- **Quantizzati:** quelli continui nel tempo e discreti nelle ampiezze;

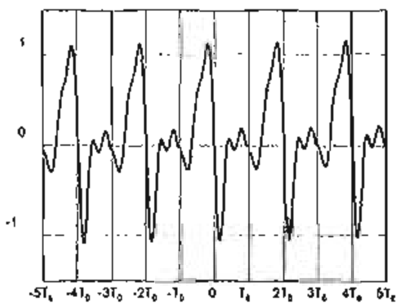
3. Un criterio di classificazione diverso da quello appena esposto è quello che distingue tra segnali PERIODICI e APERIODICI.

Un segnale si dice periodico quando esiste una costante positiva T per cui si può scrivere che

$$\boxed{x(t) = x(t+T), \quad \forall t}$$

Esempi





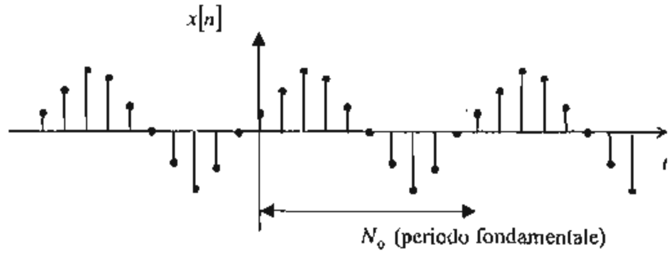
Come si può osservare dai grafici, se la condizione è soddisfatta per $T = T_0$, lo sarà anche per $T = 2T_0, 3T_0, 4T_0, \ldots$

Il valore minimo T_0 in corrispondenza al quale il segnale si ripete uguale a se stesso è detto PERIODO FONDAMENTALE, mentre il suo inverso prende il nome di FREQUENZA

FONDAMENTALE $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$ [Hz]. Se non esiste nessun valore finito di T che verifica la suddetta relazione, il segnale è detto essere NON PERIODICO o APERIODICO.

La definizione appena vista per i segnali a tempo continuo si estende immediatamente ai segnali tempo discreti, per i quali la proprietà di periodicità diventa

$$x[n] = x(n+N), \quad \forall n$$



4. Un'ulteriore classificazione distingue tra

- SEGNALI DETERMINATI (o DETERMINISTICI): il segnale è noto attraverso un grafico, una registrazione, o più semplicemente attraverso una funzione matematica.

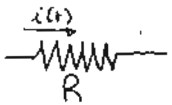
  Il valore del segnale è univocamente determinabile una volta fissato il valore della variabile indipendente.
- SEGNALI ALEATORI: non è possibile conoscere con esattezza a priori il valore assunto da un segnale in un certo istante.

  Es. L'evoluzione futura del valore della tensione di rumore (disturbo) presente nei componenti elettronici non è nota se non dopo l'osservazione.

  Mentre per modellare e studiare i segnali determinati sono sufficienti i concetti dell'analisi matematica tradizionale, per i segnali aleatori è indispensabile ricorrere a tecniche basate sulla teoria delle probabilità e dei processi aleatori.

SEGNALI AD ENERGIA FINITA E A POTENZA FINITA

SI CONSIDERI L'ESEMPIO DI UN RESISTORE R ATTRAVERSATO DA UNA CORRENTE $i(t)$



POTENZA ISTANTANEA : $R\,i^2(t)$ [W]

coefficiente di proporzionalità

IN MODO ASTRATTO PER UN SEGNALE $x(t)$ SI DEFINISCE LA

POTENZA ISTANTANEA $x^2(t)$ $\left(x^2(t) \geq 0 \quad \forall t\right)$

CONSIDERANDO L'ESEMPIO DEL RESISTORE SI DEFINISCE L'ENERGIA TOTALE

$$\int_{-\infty}^{\infty} R\,i^2(t)\,dt \quad [J]$$ ← energia dissipata per effetto del passaggio di corrente

⇓

ENERGIA : $E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt$ ← energia associata al segnale $x(t)$

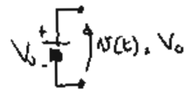
(NB! $E_x < +\infty \Rightarrow \int$ convergente)

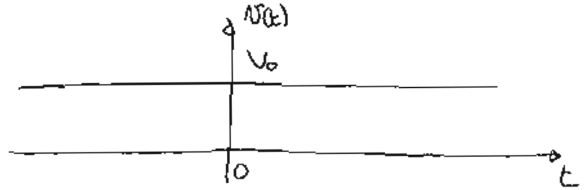
OSS. 1 NEL CONSIDERARE IL SEGNALE $x(t)$ SI È IMPLICITAMENTE ASSUNTO CHE LA SUA AMPIEZZA ASSUMA VALORI REALI.
NEL CASO DI SEGNALI COMPLESSI NELLE DEFINIZIONI DATE E IN QUELLE CHE SEGUONO SI DEVE SOSTITUIRE $x^2(t)$ CON IL MODULO $|x(t)|^2$

OSS. 2 I SISTEMI FISICI (QUELLI REALMENTE OSSERVATI) GENERANO SEGNALI AD ENERGIA FINITA.
A VOLTE, PER COMODITÀ, PER APPROSSIMARE SEGNALI REALI SI CONSIDERANO SISTEMI IDEALIZZATI

ES. BATTERIA IDEALE (SEGNALE COSTANTE)

Tensione $v(t)$ generata dalla batteria ideale è costante da $-\infty$ a $+\infty$ $\forall t$



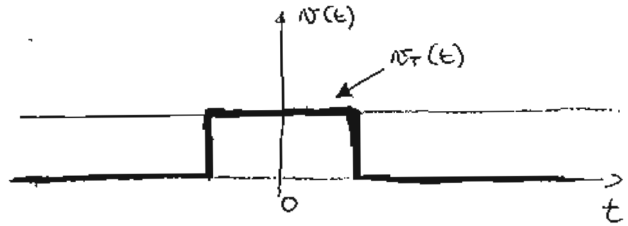


In questo caso si osserva che

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_0^2\,dt = +\infty$$

• SI CONSIDERA IL SEGNALE $v(t)$ E SI EFFETTUA UN'OPERAZIONE DI TRONCAMENTO OTTENUTA LIMITANDO L'OSSERVAZIONE ALL'INTERVALLO FINITO $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$

$$v_T(t) = \begin{cases} v(t), & |t| \leq T/2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$



IL SEGNALE $v_T(t)$ OTTENUTO DAL TRONCAMENTO DI $v(t)$ HA ENERGIA FINITA

$$E_{v_T} = \int_{-\infty}^{\infty} v_T^2(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} V_0^2\,dt = V_0^2 T$$

NATURALMENTE SE $T \uparrow \Rightarrow E_{v_T} \to \infty$

⇓ CONCETTO

POTENZA DI SEGNALE

POTENZA MEDIA SEGNALE $v_T(t)$ VALUTATA NELL'INTERVALLO $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

$$P_{v_T} \triangleq \frac{E_{v_T}}{T}$$

ATTRAVERSO OPERAZIONE AL LIMITE SI OTTIENE LA POTENZA MEDIA DI $v(t)$:

$$P_v \triangleq \lim_{T\to\infty} P_{v_T} = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{v_T}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v^2(t)\,dt$$

IN GENERALE PER UN SEGNALE $x(t)$ LA DEFINIZIONE DI POTENZA MEDIA È:

$$\boxed{P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt}$$

OSS. NEL CASO DI SEGNALI COMPLESSI BASTA SOSTITUIRE $x(t)$ con $|x(t)|$

ULTERIORE CLASSIFICAZIONE DEI SEGNALI

- ENERGIA FINITA

  $E_x < +\infty \qquad P_x = 0$

- POTENZA FINITA

  $E_x = +\infty \qquad P_x < +\infty$

OSS. PER UN SEGNALE PERIODICO DI PERIODO T_0

$E_x = \infty$

$$P_x \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t)\,dt \qquad \left(P_x = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x^2(t)\,dt\right)$$

$\Leftarrow$ in generale l'integrale viene effettuato su un intervallo T_0 qualsiasi

DEFINIZIONI

1. VALORE EFFICACE DI UN SEGNALE

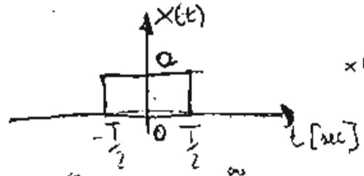
$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}$ è il valore che dovrebbe assumere un segnale di ampiezza costante per avere la stessa potenza del segnale dato

2. VALOR MEDIO TEMPORALE (o COMPONENTE CONTINUA)

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt \qquad \left(\bar{x} = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)\,dt \quad \text{per i segnali periodici}\right)$$

ESERCIZI

1) Calcolare energia e potenza media del segnale rettangolare

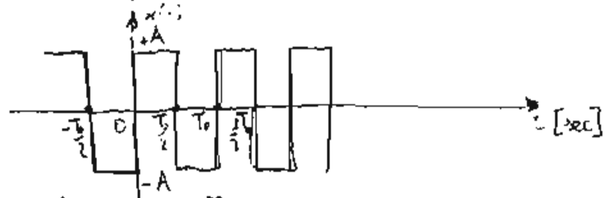


$$x(t) = a\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right), \text{ dove } \mathrm{rect}(t) \triangleq \begin{cases} 1 & |t| \le \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} a^2\,\mathrm{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} a^2\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt = a^2\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = a^2 T$$

$$P_x = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x^2(t)\,dt = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a^2\,dt = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} a^2 T = 0$$

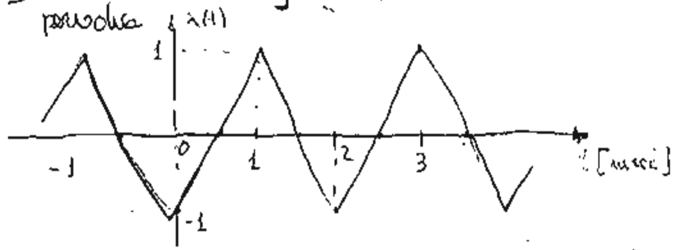
2) Calcolare energia e potenza media dell'onda quadra di periodo T_0 e ampiezza A



$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2\,dt = \infty \qquad \text{È AD ENERGIA } \infty$$

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2\,dt = A^2 \qquad \text{POTENZA FINITA}$$

3) Calcolare energia e potenza media dell'onda triangolare periodica



$T_0 = 2\,\text{msec} = 2\cdot 10^{-3}\,\text{sec}$

$f_0 = \frac{1}{T_0} = 500\,\text{Hz}$

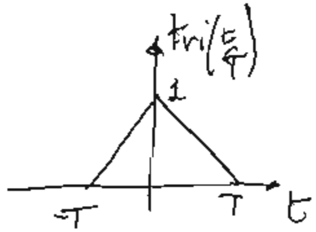
$E_x = \infty$

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t)\,dt = 500\cdot 2\int_0^{10^{-3}} (2\cdot 10^3 t - 1)^2\,dt = 10^3\int_0^{10^{-3}} (4\cdot 10^6 t^2 + 1 - 4\cdot 10^3 t)\,dt = \frac{1}{3}$$

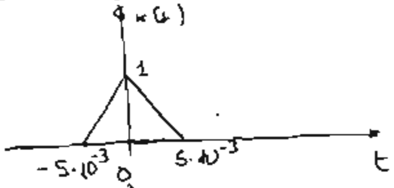
1) Calcolare energia e potenza media del segnale triangolare $x(t) = tri\left(\frac{t}{5\cdot 10^{-3}}\right)$

Il segnale triangolare è definito come

$$tri\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{per } |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$



Per il segnale $tri\left(\frac{t}{5\cdot 10^{-3}}\right)$ si ottiene



$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-5\cdot 10^{-3}}^{5\cdot 10^{-3}} tri^2\left(\frac{t}{5\cdot 10^{-3}}\right) dt = 2\int_0^{5\cdot 10^{-3}} (1-200t)^2\,dt =$$

$$= 2\int_0^{5\cdot 10^{-3}} (1+4\cdot 10^4 t^2 - 400t)\,dt = 2\int_0^{5\cdot 10^{-3}} dt + 8\cdot 10^4 \int_0^{5\cdot 10^{-3}} t^2\,dt - 800\int_0^{5\cdot 10^{-3}} t\,dt$$

$$= 2\,t\Big|_0^{5\cdot 10^{-3}} + 8\cdot 10^4 \frac{t^3}{3}\Big|_0^{5\cdot 10^{-3}} - 800 \frac{t^2}{2}\Big|_0^{5\cdot 10^{-3}}$$

$$= 10^{-2} + 8\cdot 10^4 \cdot \frac{125}{3} 10^{-9} - 800\,\frac{25\cdot 10^{-6}}{2}$$

$$= 10^{-2} + 3.\overline{3}\,10^{6}\cdot 10^{-9} - 10^{4}\cdot 10^{-6} = \cancel{10^{-2}} + 3.\overline{3}\,10^{-3} - \cancel{10^{-2}} = 3.\overline{3}\cdot 10^{-3}$$

$P_x = 0$

In generale per il segnale triangolare $A\,tri\left(\frac{t}{T}\right)$ l'energia è pari a $\frac{2}{3}A^2 T$

LEZIONE N.2 DEL 30/11/2006 AULA N11 8.15 ÷ 11.15 (1)

OPERAZIONI ELEMENTARI SUI SEGNALI

LA TRASMISSIONE DI SEGNALI ATTRAVERSO I BLOCCHI DEL SISTEMA DI COMUNICAZIONE COINVOLGE LA COMBINAZIONE DI OPERAZIONI BASILARI SUI SEGNALI.

TALI OPERAZIONI POSSONO ESSERE SUDDIVISE IN 2 CLASSI:

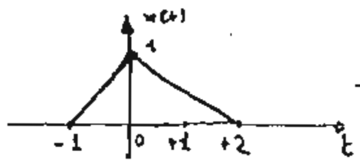
1. OPERAZIONI SULLA VARIABILE INDIPENDENTE

1.1 - SCALATURA TEMPORALE

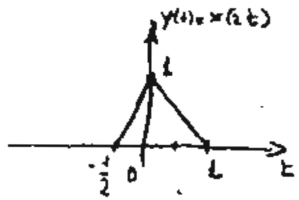
$x(t)$: segnale tempo-continuo

$y(t) = x(at)$ a: fattore di scala

$\boxed{a>0}$ → con esempio

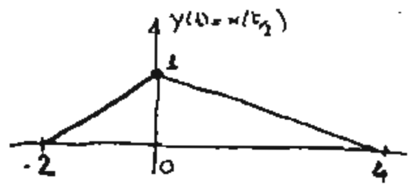


$\xrightarrow{a=2}$



$\boxed{a>1}$ ⇒ COMPRESSIONE SEGNALE

$a = \frac{1}{2}$

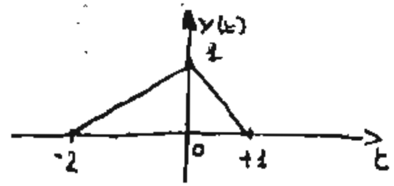


$\boxed{0<a<1}$ Segnale dilatato

(2)

OSSERVAZIONE

$a = -1 \Rightarrow y(t) = x(-t) \Rightarrow$ Il segnale $y(t)$ è la versione ribaltata di $x(t)$ rispetto all'asse delle ordinate

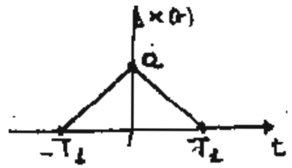


IMPORTANTE

SULLA BASE DI QUESTA OSSERVAZIONE SI HANNO 2 CASI DI INTERESSE:

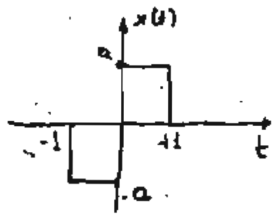
a) SEGNALI PARI PER CUI SI HA:

$x(-t) = x(t)$

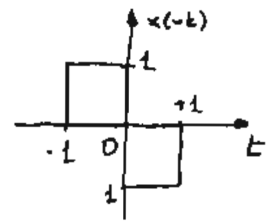


b) SEGNALI DISPARI

$x(-t) = -x(t)$



→



GENERALIZZANDO $-\infty < a < +\infty$

$$x(at) = \begin{cases} |a|<1 & \text{dilatato} \\ |a|>1 & \text{compresso} \end{cases}$$

INOLTRE CON $a<0$ ribaltato

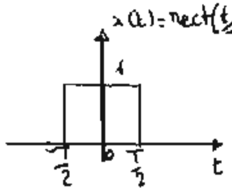
1.2 TRASLAZIONE TEMPORALE

$x(t)$: segnale tempo-continuo

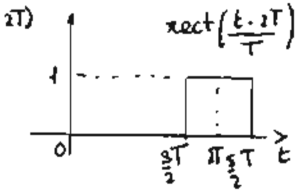
$y(t) = x(t-t_0)$ VERSIONE TRASLATA DI $x(t)$

$t_0 > 0 \Rightarrow x(t)$ viene traslata a destra (RITARDO)

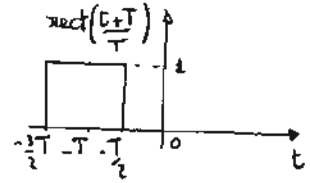
$t_0 < 0 \Rightarrow x(t)$ viene traslata a sinistra (ANTICIPO)



$y(t) = x(t-2T)$



$y(t) = x(t+T)$



OSS Si può avere

$x(-t-t_0)$

REGOLA:

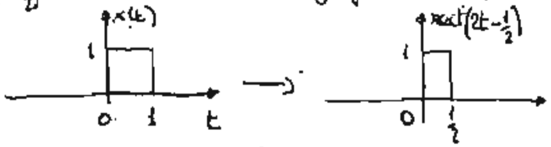
- Quando i segni non sono concordi si ha spostamento a DX
- Quando i segni sono concordi si ha spostamento a SX

ESEMPIO TRASLAZIONE + SCALATURA TEMPORALE

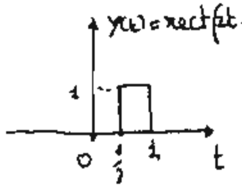
$y(t) = x(at-b) = x\left(a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right)$

Si consideri $x(t) = rect(t-\frac{1}{2})$. Si vuole rappresentare graficamente $y(t) = x(2t-\frac{1}{2}) = rect(2t-\frac{1}{2}) = rect\left(2\left(t-\frac{1}{4}\right)\right)$

I° PASSO: compressione di 2



II° PASSO: traslazione di $\frac{1}{2}$



2. OPERAZIONI SULLA VARIABILE DIPENDENTE

2.1 SCALATURA D'AMPIEZZA

$y(t) = A\,x(t)$ $\quad$ $y(t)$: segnale ottenuto da una scalatura d'ampiezza applicata a $x(t)$

A: fattore di scala

OSS. SE $E_x < \infty$

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 x^2(t)\,dt = A^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt}_{E_x} = A^2 E_x$$

SE $E_x = \infty$ MA $P_{m_x} < \infty$

$$P_{m_y} = A^2 P_{m_x}$$

AMPLIFICATORE: esempio di dispositivo che effettua scalatura d'ampiezza
A: amplificazione (guadagno)

2.2 ADDIZIONE

$x_1(t), x_2(t)$: segnali tempo continui

$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$: segnale ottenuto come somma di $x_1(t)$ e $x_2(t)$

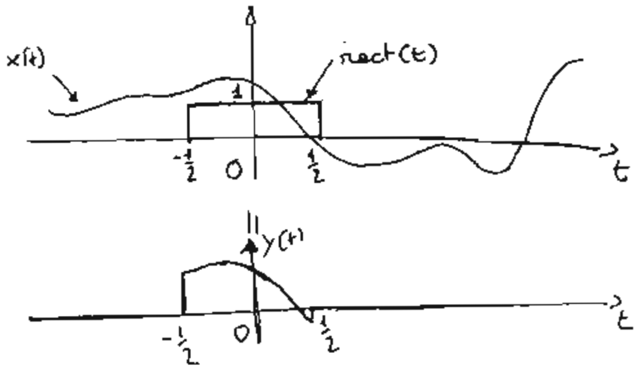
MIXER: esempio di dispositivo che effettua somma tra 2 segnali (combina ad esempio VOCE + MUSICA).

2.3 MOLTIPLICAZIONE

$x_1(t), x_2(t)$: segnali tempo continui

$y(t) = x_1(t)\,x_2(t) \rightarrow$ PER DATO VALORE DI t IL VALORE DI $y(t)$ È DATO DAL PRODOTTO DEI CORRISPONDENTI VALORI DI $x_1(t)$ E $x_2(t)$

ES. MOLTIPLICAZIONE DI UN SEGNALE PER IL SEGNALE RETTANGOLO $y(t) = x(t)\,\mathrm{rect}(t)$



$$y(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \le \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

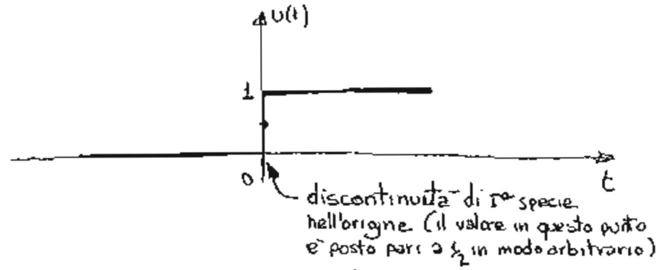
IN GENERALE SI PARLA DI FINESTRATURA DI UN SEGNALE $x(t)$ QUANDO ESSO VIENE MOLTIPLICATO PER UN ALTRO SEGNALE $w(t)$ DETTO FINESTRA AVENTE DURATA LIMITATA

SEGNALI ELEMENTARI

1. GRADINO UNITARIO

SI DEFINISCE IL SEGNALE A GRADINO UNITARIO COME

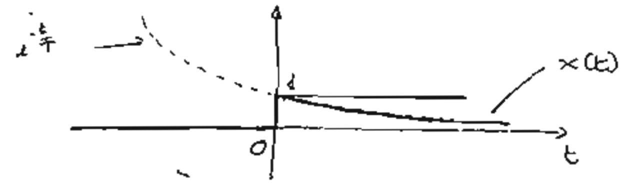
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



IL SEGNALE A GRADINO UNITARIO È UTILE PER RAPPRESENTARE I SEGNALI CAUSALI, CIOÈ CHE ASSUMONO UN VALORE NULLO PER $t < 0$.

ESEMPIO · ESPONENZIALE UNILATERO DECRESCENTE

$$x(t) = e^{-\frac{t}{T}}\,u(t)$$



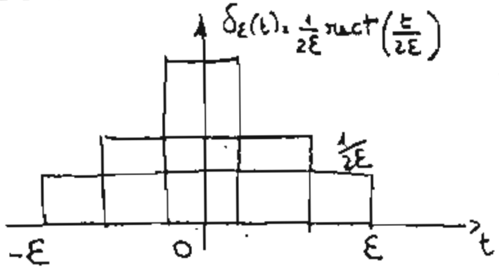
FUNZIONE IMPULSIVA

SI DEFINISCE LA FUNZIONE IMPULSO IDEALE (DELTA DI DIRAC) CON LE SEGUENTI PROPRIETÀ

$$\delta(t) = 0 \quad \text{per } t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

MODO PER DESCRIVERE GRAFICAMENTE $\delta(t)$



← Successione di Funzioni aventi area unitaria

$\frac{1}{2\varepsilon} \cdot 2\varepsilon = 1$ — ampiezza ↑, durata ↑, con $\varepsilon \to 0$

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right)$$

$\delta(t)$ NON È UNA FUNZIONE NEL SENSO ORDINARIO DELL'ANALISI MATEMATICA.

NON È QUINDI CORRETTO AFFERMARE CHE

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right)$$

$\delta(t)$ È UN'ENTITÀ MATEMATICA CHE ASSUME SIGNIFICATO QUANDO SE NE CONSIDERI UNA QUALCHE PROPRIETÀ DI CARATTERE INTEGRALE COME NELLA DEFINIZIONE STESSA

N.B! L'OPERAZIONE DI LIMITE DEVE ESSERE ESEGUITA AL DI FUORI DEL SEGNO D'INTEGRALE

ESEMPIO

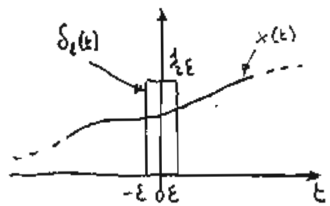
SI CONSIDERI UN SEGNALE $x(t)$ CONTINUO IN $t=0$ E SI CALCOLI IL VALORE DEL SEGUENTE INTEGRALE

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt$$

NOTA: il pb è ben posto poiché la funzione $\delta(t)$ compare all'interno di un integrale

Il valore dell'integrale si calcola come

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta_\varepsilon(t)\,dt$$



$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x(t)\,dt = \frac{1}{2\varepsilon}\, 2\varepsilon\, x(\tilde{t})$$

dove $\tilde{t} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ per il thm della media

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta_\varepsilon(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} x(\tilde{t}) = x(0)$$

quando $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \tilde{t} \to 0$ e quindi $x(\tilde{t}) \to x(0)$ essendo per ipotesi $x(t)$ continua in 0

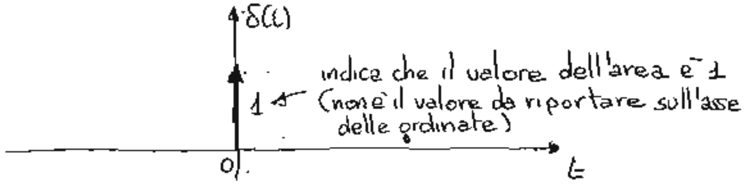
⇓

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0)}$$

PROPRIETÀ CAMPIONATRICE DELL'IMPULSO

OSS. SI È DATA UNA DEFINIZIONE EURISTICA; $\delta(t)$ NON È UNA FUNZIONE ORDINARIA E LE OPERAZIONI CHE LA COINVOLGONO HANNO SENSO SOLO QUANDO COMPAIONO NEL SEGNO D'INTEGRALE

RAPPRESENTAZIONE CONVENZIONALE DI $\delta(t)$



$\delta(t)$ GODE DI MOLTE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI ORDINARIE

ALCUNE PROPRIETÀ:

- PARITÀ $\delta(t) = \delta(-t)$

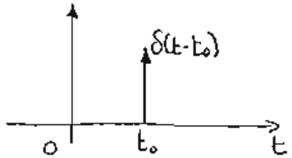
DIM $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(-t)\,dt \underset{\alpha=-t}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(-\alpha)\delta(\alpha)\,d\alpha = x(0)$

POICHÉ IL RISULTATO È IDENTICO A QUELLO DI $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt$

$\Downarrow$

$\delta(t) = \delta(-t)$

- PROPRIETÀ CAMPIONATRICE: ESTENSIONE



$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt \underset{\alpha=t-t_0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha+t_0)\delta(\alpha)\,d\alpha = x(t_0)$$

N.B.! $x(t)$ continua in t_0

- $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$

Questa proprietà va intesa nel senso che dopo un'operazione d'integrazione le due funzioni producono lo stesso risultato

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt$$

- SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)\,d\alpha$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

3. SEGNALE SINUSOIDALE

$x(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \theta)$

INDIVIDUATO DA 3 PARAMETRI

- a : ampiezza
- θ: fase iniziale [rad]
- $f_0 = \frac{1}{T_0} > 0$ [Hz]: Frequenza dell'oscillazione

Maggiore è f_0 $\rightarrow$ più rapidamente varia il segnale nel tempo e minore sarà il periodo

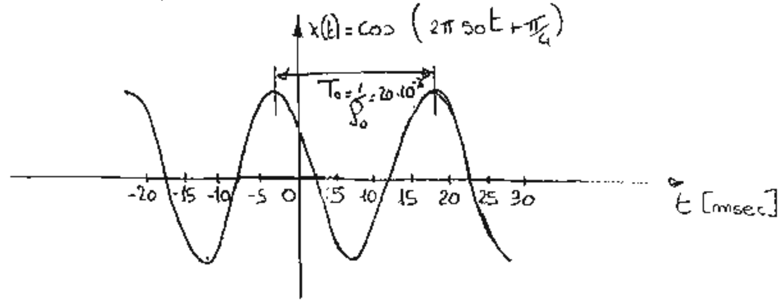
$T_0 = \frac{1}{f_0} > 0$ [sec]: Periodo dell'oscillazione

se $f_0 \uparrow \Rightarrow T_0 \downarrow$

La pulsazione è definita come

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \left[\frac{rad}{sec}\right]$$

ESEMPIO: $\theta = \frac{\pi}{4}$, $a = 1$, $f_0 = 50\,Hz$



Per un segnale sinusoidale si verifica facilmente che

$$P_x = \frac{a^2}{2} \qquad m_x = 0 \qquad E_x = \infty$$

Si osserva immediatamente che il segnale sinusoidale è un segnale <u>PERIODICO</u> di periodo

$$T_0 = \frac{1}{f_0}$$

$$x(t+T_0) = a\cos\left(2\pi f_0 (t+T_0)+\theta\right) = a\cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi \underbrace{f_0 T_0}_{=1} + \theta\right) =$$

$$= a\cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi + \theta\right) = a\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right) = x(t)$$

<u>OSS</u>. Relazione tra sfasamento e traslazione temporale

Si è avuto modo di vedere che dato un segnale $x(t)$ la traslazione $y(t) = x(t-t_0)$ corrisponde a

- RITARDO se $t_0 > 0$
- ANTICIPO se $t_0 < 0$

- Si applica ora un ritardo al segnale sinusoidale

<u>ES</u>. $\tau > 0$ $\quad x(t) = a\cos(2\pi f_0 t)$

$$y(t) = x(t-\tau) = a\cos\left(2\pi f_0 (t-\tau)\right) =$$

$$= a\cos\left(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau\right)$$

$$= a\cos\left(2\pi f_0 t + \theta_0\right) \Rightarrow \boxed{\theta_0 = -2\pi f_0 \tau \text{ SFASAMENTO}}$$

<u>OSS</u>. $\operatorname{sen} 2\pi f_0 t = \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ sen è ritardato di $\frac{T_0}{4} = \frac{1}{4f_0}$ rispetto a cos

- $\theta = \theta_0 > 0$ equivale ad anticipo $\tau = \frac{\theta_0}{2\pi f_0}$

$$a\cos\left(2\pi f_0 t + \theta_0\right) = a\cos\left(2\pi f_0 \left(t + \frac{\theta_0}{2\pi f_0}\right)\right)$$

<u>FASORI</u>

Il segnale sinusoidale $x(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ può essere rappresentato come:

$$x(t) = \operatorname{Re}\left\{b\, e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

dove $b = a e^{j\theta}$ è una quantità complessa detta <u>FASORE</u>

Infatti

$$\operatorname{Re}\left\{b e^{j2\pi f_0 t}\right\} = \operatorname{Re}\left\{a e^{j\theta} e^{j2\pi f_0 t}\right\} = \operatorname{Re}\left\{a e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{a\cos(2\pi f_0 t + \theta) + j a \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \theta)\right\} = a\cos(2\pi f_0 t + \theta) = x(t)$$

In questo passaggio si applica la formula di Eulero $e^{j\phi} = \cos\phi + j\operatorname{sen}\phi$

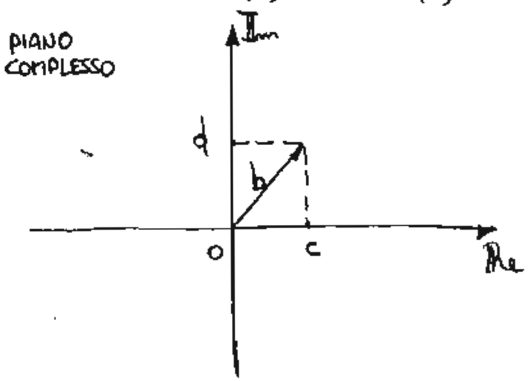
Un fasore è una quantità complessa. Può essere espresso in:

- <u>FORMA RETTANGOLARE</u>

$b = c + jd \qquad c, d$: numeri reali riferiti ad un sistema di assi cartesiani

$c = \operatorname{Re}\{b\} \qquad d = \operatorname{Im}\{b\}$

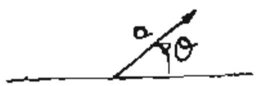
PIANO COMPLESSO



- **FORMA POLARE**

$b = |b| e^{j\measuredangle b} = a e^{j\theta}$

$a = |b|$: MODULO
$\theta = \measuredangle b$: FASE
Nel sistema di coordinate polari



LEGAME TRA LE 2 RAPPRESENTAZIONI

- $|b| = a = \sqrt{c^2+d^2}$
  $\measuredangle b = \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{c}\right)$
- $c = a\cos\theta$
  $d = a \operatorname{sen}\theta$

ESEMPI

$$25 \operatorname{sen}\left(2\pi 500t + \frac{\pi}{4}\right) = 25\cos\left(2\pi 500t - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} 25 e^{-j\frac{\pi}{4}} & \text{Forma polare} \\ \frac{25\sqrt{2}}{2} + \frac{25\sqrt{2}}{2} j & \text{Forma rettangolare} \end{cases}$$

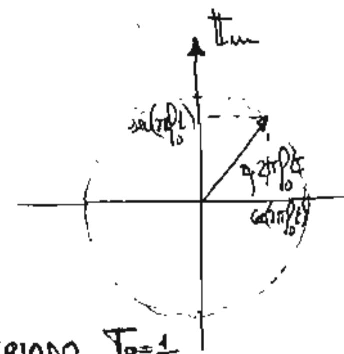
$$10\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{7}{18}\pi\right) \Rightarrow \begin{cases} 10 e^{j\frac{7}{18}\pi} & \text{Forma polare} \\ 0.342 + j\,0.9397 \end{cases}$$

LA QUANTITÀ $b e^{j2\pi f_0 t}$ VIENE CHIAMATA FASORE ROTANTE

Un segnale complesso può essere rappresentato come un vettore che si sposta nel piano (il suo modulo e la sua fase variano nel tempo).

ESPONENZIALE COMPLESSO

$x(t) = \exp\{j2\pi f_0 t\} = \cos(2\pi f_0 t) + j\operatorname{sen}(2\pi f_0 t)$



$a = 1$
$\theta = 2\pi f_0 t$

VETTORE DI AMPIEZZA COSTANTE PARI A 1 CHE SI MUOVE CON VELOCITÀ ANGOLARE COSTANTE $\omega_0 = 2\pi f_0$ IN SENSO ANTIORARIO E COMPIE UN GIRO COMPLETO CON PERIODO $T_0 = \frac{1}{f_0}$

ANCORA SULLA RAPPRESENTAZIONE COMPLESSA DI UN SEGNALE SINUSOIDALE

È NOTO CHE
$e^{j\phi} = \cos\phi + j\operatorname{sen}\phi$
$e^{-j\phi} = \cos\phi - j\operatorname{sen}\phi$

SI VUOLE CONSIDERARE LA SOMMA

$$e^{j\phi} + e^{-j\phi} = \cos\phi + \cancel{j\operatorname{sen}\phi} + \cos\phi - \cancel{j\operatorname{sen}\phi} = 2\cos\phi \Rightarrow \boxed{\cos\phi = \frac{e^{j\phi}+e^{-j\phi}}{2}}$$

CONSIDERANDO LA SOTTRAZIONE SI HA

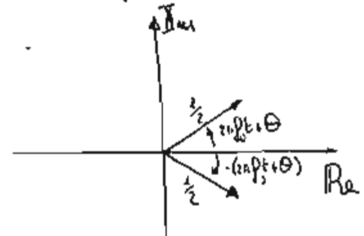
$$e^{j\phi} - e^{-j\phi} = 2j\operatorname{sen}\phi \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\phi = \frac{e^{j\phi}-e^{-j\phi}}{2j}}$$

PER QUANTO APPENA VISTO SI PUÒ DIRE CHE

$$\cos(2\pi f_0 t + \theta) = \frac{1}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi f_0 t+\theta)} = \frac{e^{j\theta}}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{e^{-j\theta}}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

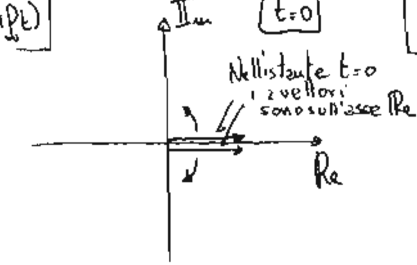
La funzione sinusoidale può essere vista come la composizione di 2 esponenziali complessi che ruotano in direzioni opposte con la stessa velocità angolare. Il valore di θ determina la fase dei vettori in $t=0$

ESEMPIO

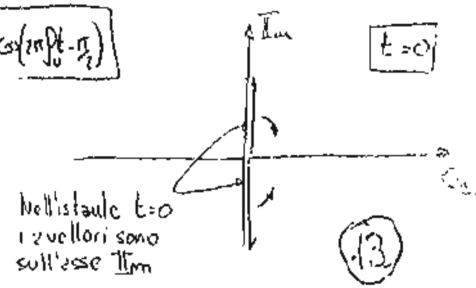


$\Rightarrow$ La funzione risultante dalla composizione dei 2 vettori rotanti è reale. La posizione dei 2 vettori in qualsiasi istante temporale è infatti speculare rispetto all'asse Re

$\boxed{\cos(2\pi f_0 t)}$ $\boxed{t=0}$



$\boxed{\operatorname{sen}(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})}$ $\boxed{t=0}$

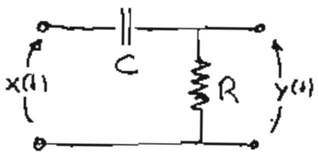


SEGNALI PERIODICI A TEMPO CONTINUO

ANALISI DI FOURIER → INTRODOTTA CON ESEMPIO TRATTO DALLA TEORIA DEI CIRCUITI LINEARI

Il metodo fasoriale per circuiti lineari a parametri concentrati e costanti nel tempo permette di risolvere i problemi relativi al regime sinusoidale.

ESEMPIO



$x(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ ← Il fasore associato è $X = a e^{j\theta}$ (Hp: $a>0$)

Vogliamo determinare $y(t)$. Proprietà dei circuiti lineari a parametri concentrati assicura che anche $y(t)$ è sinusoidale.

BISOGNA QUINDI DETERMINARE AMPIEZZA E FASE.

Si applica il "PARTITORE DI TENSIONE" al circuito dato

$$I = \frac{X}{R + \frac{1}{j2\pi f_0 C}} \qquad Y = R\cdot I = \frac{R}{R + \frac{1}{j2\pi f_0 C}}\cdot X = \underbrace{\frac{j2\pi f_0 RC}{1 + j2\pi f_0 RC}}_{H} X$$

$$|H| = \frac{2\pi f_0 RC}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f_0^2 R^2 C^2}} \qquad \measuredangle H = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2\pi f_0 RC$$

$$|Y| = |H||X| = \frac{2\pi f_0 RC \cdot a}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f_0^2 R^2 C^2}} \qquad \measuredangle Y = \measuredangle X + \measuredangle H = \theta + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2\pi f_0 RC$$

$$y(t) = |Y|\cos(2\pi f_0 t + \measuredangle Y)$$

POICHÈ IL **CIRCUITO È LINEARE** VALE IL **PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI**, IL METODO VISTO FUNZIONA ANCHE QUANDO IL SEGNALE DI ECCITAZIONE È COSTITUITO DALLA SOMMA DI COMPONENTI SINUSOIDALI A DIVERSE FREQUENZE

Dato $x(t) = a_1\cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + a_2\cos(2\pi f_2 t + \theta_2)$ si ripete il procedimento per le 2 componenti separatamente e si ricombinano in uscita.

PRESUPPOSTI CHE HANNO PERMESSO DI RISOLVERE IL PROBLEMA

- LINEARITÀ DEL CIRCUITO (SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI)
- POSSIBILITÀ DI RAPPRESENTARE IL SEGNALE COME SOMMA DI COMPONENTI SINUSOIDALI ELEMENTARI

OSS. $x(t) = a_1\cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + a_2\cos(2\pi f_2 t + \theta_2)$, $f_2 = k f_1$ con k intero >0

Sono assegnati i 2 gruppi di parametri (f_1, a_1, θ_1) e $(f_2 = k f_1, a_2, \theta_2)$

- siamo in grado di disegnare $x(t)$
- $x(t)$ è periodico con periodo $T_1 = \frac{1}{f_1}$ (segnale con periodo maggiore)

COME SI PROCEDE QUANDO IL SEGNALE $x(t)$ È PERIODICO CON ANDAMENTO ARBITRARIO, E IN PARTICOLARE NON È SINUSOIDALE?

ANALISI ARMONICA DEI SEGNALI PERIODICI – SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

ANALISI DI FOURIER (permette di trattare segnali periodici qualunque)

SOTTO IPOTESI PIUTTOSTO AMPIE UN SEGNALE REALE PERIODICO QUALUNQUE PUÒ ESSERE ESPRESSO COME SOMMA DI OSCILLAZIONI SINUSOIDALI DI AMPIEZZA, FREQUENZA E FASE OPPORTUNE

$$x(t)=A_0+2A_1\cos(2\pi f_1 t+\theta_1)+2A_2\cos(2\pi f_2 t+\theta_2)+\dots$$

Si è visto che un segnale periodico soddisfa la relazione

$$x(t)=x(t+T)\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Si definisce PERIODO T_0 del segnale il valore minimo di T che soddisfa la condizione

$$f_0=\frac{1}{T_0}:\ \text{frequenza fondamentale}$$

Si può dunque scrivere

$$\boxed{x(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}2A_k\cos(2\pi k f_0 t+\theta_k)}$$

FORMA POLARE DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

Le frequenze di oscillazione comprendono

- $f=0$ FREQUENZA ZERO (costante A_0)
- sono multiple intere della frequenza fondamentale f_0

$$\underset{\substack{\text{costante}\\ (\text{componente continua})}}{A_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{2A_k\cos(2\pi k f_0 t+\theta_k)}$$

Il k-esimo coefficiente della serie (della k-esima oscillazione armonica, o semplicemente armonica) ha
- ampiezza $2A_k>0$
- frequenza kf_0
- fase θ_k

IL COEFFICIENTE CORRISPONDENTE A $K=1$ È DETTO ARMONICA FONDAMENTALE MENTRE QUELLI CORRISPONDENTI A $K=2,3,$ SONO DETTI RISPETTIVAMENTE SECONDA ARMONICA, TERZA ARMONICA, ...

OGNI SEGNALE PERIODICO $x(t)$ È CARATTERIZZATO DA INSIEME (A_k,θ_k)

⇓

È NECESSARIO RICAVARE FORMULE PER IL CALCOLO DI A_k e θ_k

PER CALCOLARE TALI PARAMETRI È CONVENIENTE RAPPRESENTARE IN FORMA ESPONENZIALE LE COMPONENTI SINUSOIDALI.

Sostituendo l'espressione del coseno in funzione degli esponenziali complessi nello sviluppo in serie in forma polare si ottiene

$$x(t)=A_0+2\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{e^{j(2\pi k f_0 t+\theta_k)}+e^{-j(2\pi k f_0 t+\theta_k)}}{2}=$$

$$=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{j(2\pi k f_0 t+\theta_k)}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-j(2\pi k f_0 t+\theta_k)}=$$

$$=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{j\theta_k}e^{j2\pi k f_0 t}+\sum_{k=-\infty}^{-1}A_{-k}e^{-j\theta_{-k}}e^{j2\pi k f_0 t}$$

Si definiscono le quantità

- $X_0\triangleq A_0$ • $X_k\triangleq A_k e^{j\theta_k}$, $k=1,2,\dots$ • $X_k\triangleq A_{-k}e^{-j\theta_{-k}}$, $k=-1,-2,\dots$

SI OTTIENE

$$x(t)=X_0+\sum_{k=1}^{\infty}X_k e^{j2\pi k f_0 t}+\sum_{k=-\infty}^{-1}X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

⇓

$$\boxed{x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{j2\pi k f_0 t}}$$

ESPRESSIONE IN FORMA COMPLESSA DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

X_k: coefficienti complessi dello sviluppo in serie di Fourier

OSS. LE FREQUENZE NEGATIVE NON HANNO SENSO DAL PUNTO DI VISTA FISICO: DERIVANDO SOLO DALLA RAPPRESENTAZIONE MATEMATICA

ESPRESSIONE PER IL CALCOLO DI X_m

Si moltiplicano entrambi i membri dello sviluppo complesso per $e^{-j2\pi m f_0 t}$ e si integra su un intervallo T_0

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi m f_0 t}\, dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}}\, e^{-j2\pi m f_0 t}\, dt$$

Supponendo che la serie converga si integra termine a termine

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi m f_0 t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi (k-m) f_0 t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \left. \frac{e^{j2\pi (k-m) f_0 t}}{j2\pi (k-m) f_0} \right|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi (k-m) f_0 t}\, dt = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ T_0 & k = m \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi m f_0 t} = X_m T_0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt}$$

ESPRESSIONE PER IL CALCOLO DEI COEFFICIENTI DELLA SERIE DI FOURIER.

$$\left. \frac{e^{j2\pi (k-m) f_0 t}}{j2\pi (k-m) f_0} \right|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = \frac{e^{j2\pi (k-m) f_0 \frac{T_0}{2}} - e^{-j2\pi (k-m) f_0 \frac{T_0}{2}}}{j2\pi (k-m) f_0}$$

$$= \frac{e^{j\pi (k-m)} - e^{-j\pi (k-m)}}{j2\pi (k-m) f_0} = \frac{1}{f_0} \frac{\operatorname{sen}(\pi (k-m))}{\pi (k-m)}$$

$\hookrightarrow \operatorname{sen}(\pi (k-m))$

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi (k-m))}{\pi (k-m)} = 0 \quad \text{per } k \neq m$$

Non ha significato per $k = m$

Sostituendo $k=m$ nell'integrale iniziale si ottiene

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} dt = T_0$$

OSS.1 L'integrale può essere esteso a qualunque intervallo temporale di ampiezza T_0

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

OSS.2 Per $k=0$ si ha

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, dt$$: VALOR MEDIO TEMPORALE DEL SEGNALE

OLTRE ALLA FORMA POLARE E COMPLESSA DELLA SERIE DI FOURIER ESISTE UNA 3ª RAPPRESENTAZIONE DETTA IN FORMA RETTANGOLARE

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$

$$= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\cos(2\pi k f_0 t) \cos\theta_k - \operatorname{sen}(2\pi k f_0 t) \operatorname{sen}\theta_k \right)$$

SI DEFINISCONO LE QUANTITÀ

$a_0 = A_0 \qquad a_k = A_k \cos\theta_k \qquad b_k = A_k \operatorname{sen}\theta_k$

$$\boxed{x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(2\pi k f_0 t) - b_k \operatorname{sen}(2\pi k f_0 t) \right)}$$

FORMA RETTANGOLARE DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \operatorname{Re}\{X_k\} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi k f_0 t)\, dt \\ b_k &= \operatorname{Im}\{X_k\} = -\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \operatorname{sen}(2\pi k f_0 t)\, dt \end{aligned} \right\}$$ legame tra i coefficienti a_k, b_k e X_k

SPETTRI DI AMPIEZZA E FASE

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \qquad X_k = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

EQUAZIONE DI SINTESI
note ampiezze e fasi delle componenti armoniche (coeff. di Fourier) permette di ricostruire il segnale dato

EQUAZIONE DI ANALISI
permette di stabilire il contenuto di un segnale in termini di componenti armoniche

OSS. L'EQUAZIONE DI SINTESI PREVEDE ∞ ARMONICHE.
CONDIZIONE NECESSARIA ALLA CONVERGENZA DELLA SERIE È CHE $|X_k| \to 0$ QUANDO $k \to \infty$
COMUNQUE LE ARMONICHE PIÙ "IMPORTANTI" SONO IN NUMERO LIMITATO $\Rightarrow$ Ai fini pratici la serie può essere sostituita con un numero finito di termini

L'EQUAZIONE DI SINTESI E L'EQUAZIONE DI ANALISI PERMETTONO DI STABILIRE UNA CORRISPONDENZA TRA $x(t)$ E LA SEQUENZA X

$$x(t) \Leftrightarrow X_k$$

LA CONOSCENZA DI $x(t)$ IN AMBITO TEMPORALE EQUIVALE ALLA CONOSCENZA DELLA SUCCESSIONE X_k IN AMBITO FREQUENZIALE

N.B. IL PASSAGGIO DA UN DOMINIO ALL'ALTRO È IMMEDIATO ATTRAVERSO LE RELAZIONI DI ANALISI E SINTESI

X_k È IN GENERALE COMPLESSA
Viene rappresentata mediante 2 grafici:

- **SPETTRO DI AMPIEZZA**: illustra l'andamento del modulo dei coefficienti $|X_k|$
- **SPETTRO DI FASE**: illustra l'andamento della fase dei coefficienti $\measuredangle X_k = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{X_k\}}{\operatorname{Re}\{X_k\}}$

OSS. GLI SPETTRI DI AMPIEZZA E FASE DEL SEGNALE SONO A RIGHE, CIOÈ DISCRETI, IN QUANTO SONO DEFINITI SOLO IN CORRISPONDENZA DELLE FREQUENZE ARMONIC[HE]

ESEMPIO $x(t) = a\cos(2\pi f_0 t)$ $\quad f_0$: fondamentale

SI CONFRONTA CON $x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$

$\Downarrow$

$A_1 = \frac{a}{2} \quad \theta_1 = 0 \qquad A_k = 0 \quad \forall k \neq 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \theta_k = 0 \quad \forall k$

$X_1 = A_1 e^{j\theta_1} = \frac{a}{2}$

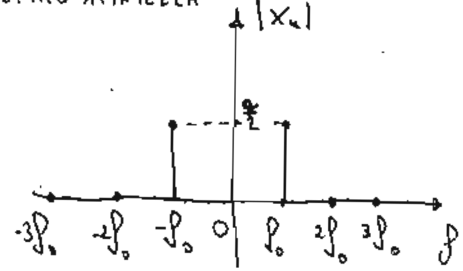
$X_{-1} = A_1 e^{-j\theta_1} = \frac{a}{2} \qquad X_k = 0 \quad \forall k \neq 1$

DISEGNAMO SPETTRI DI AMPIEZZA E FASE

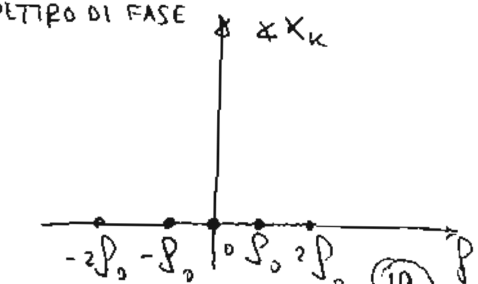
$|X_1| = \frac{a}{2} \qquad \measuredangle X_1 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{X_1\}}{\operatorname{Re}\{X_1\}} = \operatorname{arctg} 0 = 0$

$|X_{-1}| = \frac{a}{2} \qquad \measuredangle X_{-1} = 0$

SPETTRO AMPIEZZA



SPETTRO DI FASE



ESEMPIO $x(t) = a \sin(2\pi f_0 t) = a \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$

$$\Downarrow$$

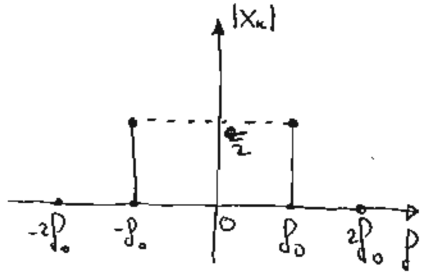
$$A_1 = \frac{a}{2} \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{2} \qquad A_k, \theta_k = 0 \quad \forall k \neq 1$$

SI HA QUINDI

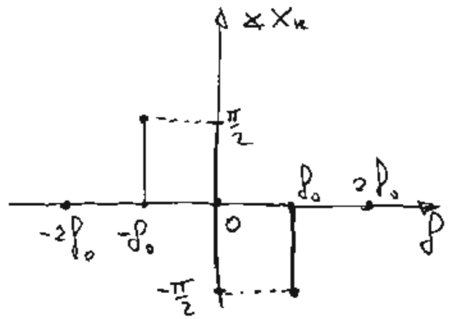
$$X_1 = A_1 e^{j\theta_1} = \frac{a}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -\frac{a}{2} j \Rightarrow \begin{cases} |X_1| = \frac{a}{2} \\ \measuredangle X_1 = \operatorname{arctg} \frac{\mathrm{Im}\{X_1\}}{\mathrm{Re}\{X_1\}} = \operatorname{arctg} \frac{-\frac{a}{2}}{0} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$X_{-1} = A_1 e^{-j\theta_1} = \frac{a}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2} j \Rightarrow \begin{cases} |X_{-1}| = \frac{a}{2} \\ \measuredangle X_{-1} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

SPETTRO DI AMPIEZZA



SPETTRO DI FASE

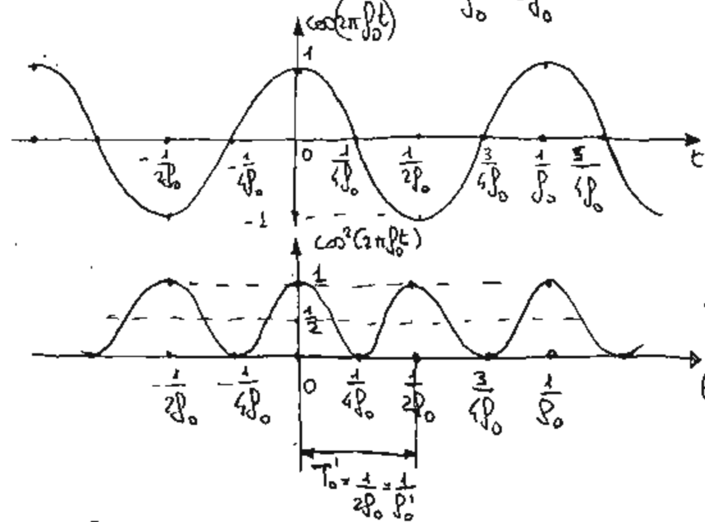


OSS. SI NOTI CHE GLI SPETTRI DI AMPIEZZA DI $a \sin(2\pi f_0 t)$ E $a \cos(2\pi f_0 t)$ SONO IDENTICI. INFATTI SONO SEGNALI SINUSOIDALI ALLA STESSA FREQUENZA MA TRASLATE TEMPORALMENTE UNO RISPETTO ALL'ALTRO. $\left(\sin(2\pi f_0 t) = \cos\left(2\pi f_0 \left(t - \frac{1}{4f_0}\right)\right)\right)$

N.B.! La distinzione fra i 2 avviene proprio attraverso lo spettro di fase.

ESEMPIO

$x(t) = \cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t)$ ← la frequenza fondamentale $f_0' = 2f_0$



IL VALOR MEDIO $\neq 0$
$\Downarrow$
C'È COMPONENTE CONTINUA A $f = 0$ DI VALORE $\frac{1}{2}$

SVILUPPO IN SERIE

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2A_k \cos(2\pi k f_0' t + \theta_k) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2A_k \cos(2\pi k 2 f_0 t + \theta_k)$$

$$\Downarrow$$

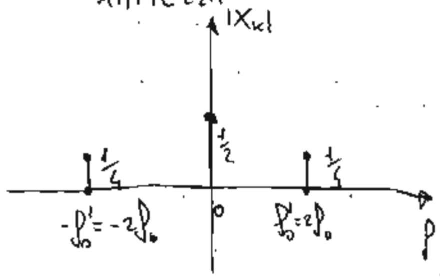
$$A_0 = \frac{1}{2} \qquad A_1 = \frac{1}{4} \quad \theta_1 = 0 \qquad A_k = 0 \quad \forall k \neq 0,1$$

$$\theta_k = 0 \quad \forall k$$

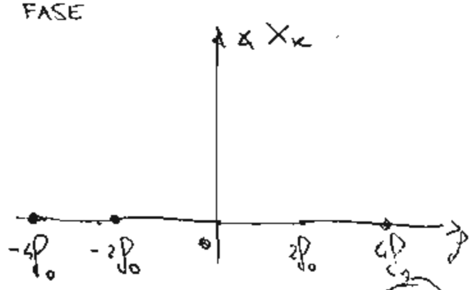
$$X_0 = A_0 = \frac{1}{2} \qquad X_1 = \frac{1}{4} \qquad X_{-1} = \frac{1}{4}$$

$|X_0| = \frac{1}{2}$ $\quad |X_1| = |X_{-1}| = \frac{1}{4}$ $\quad \measuredangle X_1 = \measuredangle X_{-1} = 0$

SPETTRO DI AMPIEZZA



SPETTRO DI FASE



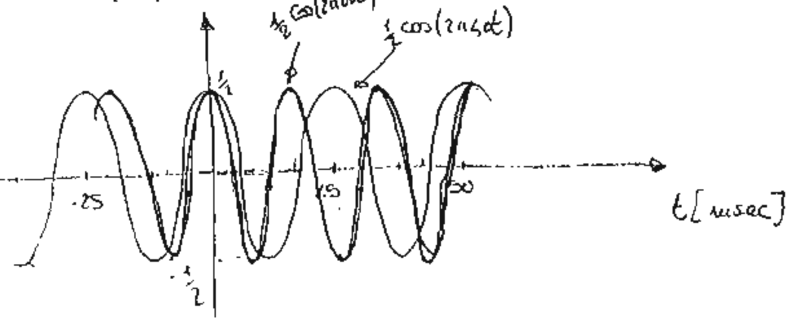
ESEMPIO

$$x(t) = \cos(160\pi t)\cos(40\pi t) + \sin(140\pi t)\sin(60\pi t)$$

$$= \frac{1}{2}\cos(120\pi t) + \cancel{\frac{1}{2}\cos(200\pi t)} + \frac{1}{2}\cos(80\pi t) - \cancel{\frac{1}{2}\cos(200\pi t)}$$

$$= \frac{1}{2}\cos(120\pi t) + \frac{1}{2}\cos(80\pi t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi 60 t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 40 t)$$

IN QUESTO CASO SI OSSERVA CHE LA FREQUENZA 60 NON E' UN MULTIPLO INTERO DI 40.



LA FREQUENZA FONDAMENTALE DEL SEGNALE PERIODICO $x(t)$ CORRISPONDE AL MASSIMO COMUN DIVISORE DELLE FREQUENZE $(40, 60)$ ED E' PARI A 20

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$

$$\Downarrow$$

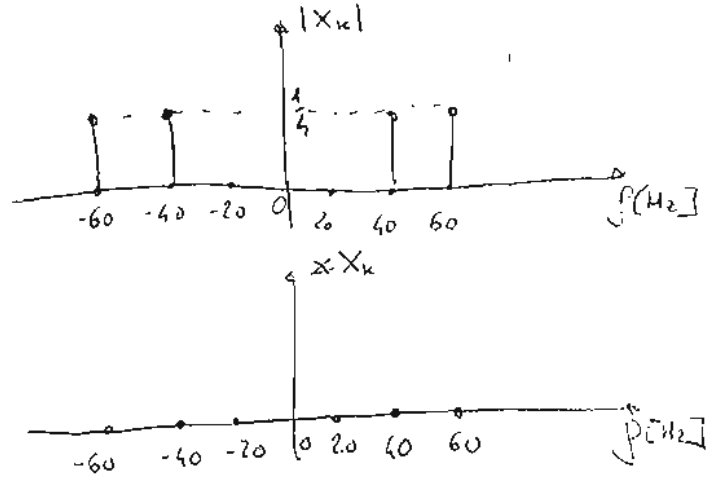
$A_2 = \frac{1}{4} \qquad \theta_2 = 0$

$A_3 = \frac{1}{4} \qquad \theta_3 = 0 \qquad\qquad A_k, \theta_k = 0 \quad \forall k \neq 2,3$

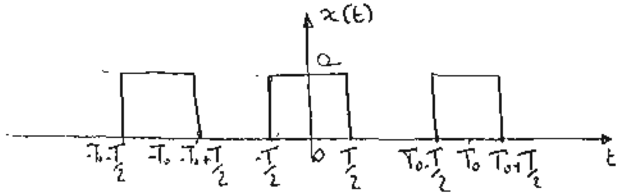
SI OTTIENE

$$X_2 = A_2 e^{j\theta_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} |X_2| = \frac{1}{4} \\ \angle X_2 = 0 \end{cases} \qquad X_3 = \frac{1}{4}$$

$$X_{-2} = A_2 e^{-j\theta_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} |X_2| = \frac{1}{4} \\ \angle X_{-2} = 0 \end{cases} \qquad X_{-3} = \frac{1}{4}$$



ESERCIZIO Si considera il segnale periodico di periodo T_0 detto treno d'impulsi rettangolari di durata T $(T<T_0)$



Nota: si definisce per questo segnale il parametro duty-cycle $\delta = T/T_0$ (rapporto tra la durata T di ciascun impulso rettangolare e il periodo di ripetizione T_0)

L'espressione del treno d'impulsi rettangolari è:

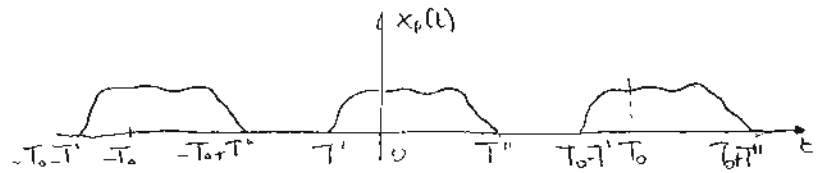
$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-mT_0}{T}\right)$$

Il segnale periodico è rappresentato analiticamente come sovrapposizione di ∞ impulsi rettangolari di durata T ottenuti ciascuno ritardando l'impulso rettangolare "base" non periodico $a\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ di mT_0 sec con $m = 0, \pm 1, \dots$

L'impulso base $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ è stato periodicizzato con periodo di ripetizione T_0 per ottenere $x(t)$.

In generale dato il segnale base $x(t)$, si ottiene il segnale periodico $x_p(t)$ di periodo T_0 attraverso

$$x_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t-mT_0)$$



Dimostrazione periodicità:

$x_p(t) = x_p(t+T_0)$

$\Rightarrow$

$$x_p(t+T_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t+T_0-mT_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t-\underbrace{(m-1)}_{m'}T_0)$$

$$= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} x(t-m'T_0) = x(t)$$

Calcolo coefficienti sviluppo in serie di Fourier del segnale treno d'impulsi rettangolare

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} a\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a\, e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

$$= \frac{a}{T_0}\left.\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{(-j2\pi k f_0)}\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{a}{T_0}\,\frac{e^{-j\pi k f_0 T} - e^{j\pi k f_0 T}}{(-j2\pi k f_0)} \quad \left(\frac{e^{-j\pi k f_0 T} - e^{j\pi k f_0 T}}{-2j} = \sin \pi k f_0 T\right)$$

$$= \frac{a}{T_0}\left(\frac{T}{T}\right)\frac{\sin \pi k f_0 T}{\frac{\pi k}{T_0}} = a\left(\frac{T}{T_0}\right)\frac{\sin \frac{\pi k T}{T_0}}{\pi k \frac{T}{T_0}} = a\delta\,\frac{\sin \pi k\delta}{\pi k \delta}$$

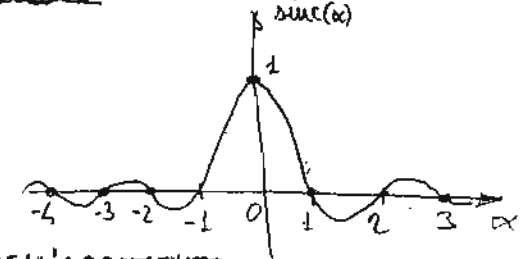
Per $a=1$ e $\delta = 0.5$ si hanno gli spettri di fig 1

In questo caso:
- Spettro di ampiezza simmetrico
- Spettro di fase assume valori 0 e $\pm\pi$

FUNZIONE NOTEVOLE

Si definisca la funzione seno cardinale

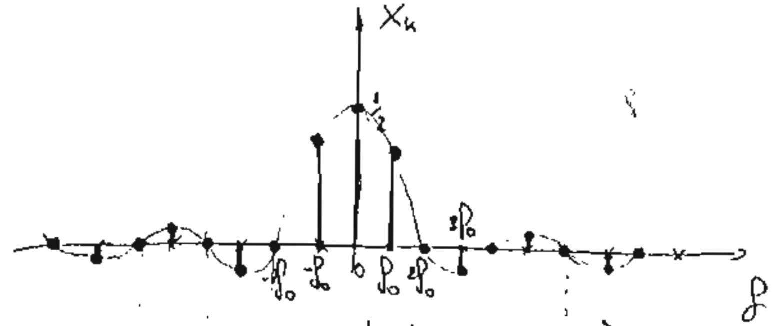
$$\mathrm{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$

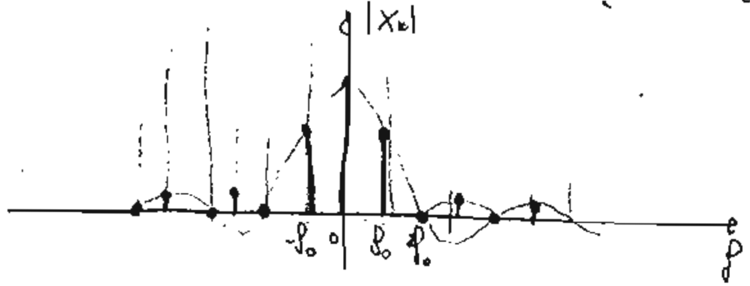


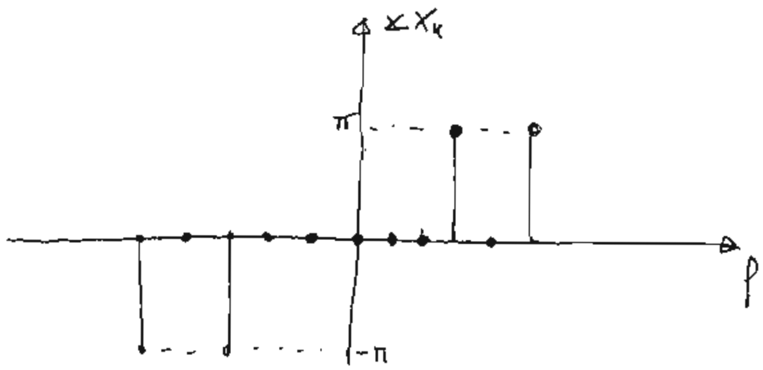
Proprietà $\mathrm{sinc}(\alpha)$:

- Nulla per tutti i valori interi dell'argomento $\alpha \neq 0$ tranne $\alpha = 0$ dove vale 1 (dall'analisi $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} = 1$)
- Funzione pari (è il rapporto di 2 funzioni dispari)
  $\mathrm{sinc}(\alpha) = \mathrm{sinc}(-\alpha)$
- Per $\alpha \to \pm\infty$ decresce asintoticamente come $\frac{1}{|\alpha|}$

$$\mathrm{sinc}(\alpha) \le \frac{1}{\pi|\alpha|}$$







OSS

$$\measuredangle X_k = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\{x\}}{\mathrm{Re}\{x\}}\right) & \text{se } \mathrm{Re}\{x\} > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\{x\}}{\mathrm{Re}\{x\}}\right) + \pi & \text{se } \mathrm{Re}\{x\} \leq 0 \end{cases}$$

SEGNALI APERIODICI A TEMPO CONTINUO - TRASFORMATA DI FOURIER

IN GENERE I SEGNALI CHE SI OSSERVANO NEI FENOMENI NATURALI NON SONO PERIODICI.

ESISTE PER I SEGNALI APERIODICI UNA SCOMPOSIZIONE SIMILE ALLA SERIE DI FOURIER PER I SEGNALI PERIODICI?

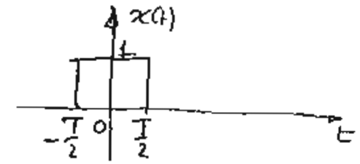
o meglio:

È POSSIBILE RAPPRESENTARE UN SEGNALE NON PERIODICO COME UN'OPPORTUNA SOVRAPPOSIZIONE DI SEGNALI ELEMENTARI (SINUSOIDALI)?

Questo è possibile. Vediamo come derivare questa rappresentazione

SI CONSIDERI IL SEGUENTE SEGNALE APERIODICO

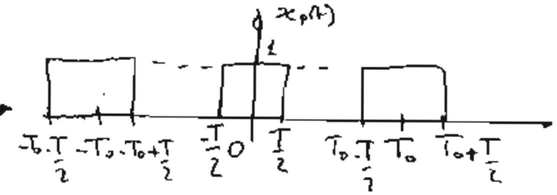
$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longrightarrow$$



ATTRAVERSO PERIODICIZZAZIONE

SI VUOLE METTERE IN RELAZIONE QUESTO SEGNALE CON IL TRENO DI IMPULSI RETTANGOLARI PERIODICO

$$x_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t - mT_0}{T}\right) \rightarrow$$



IL SEGNALE $x(t)$ PUÒ ESSERE CONSIDERATO COME CASO LIMITE DEL SEGNALE PERIODICO $x_p(t)$: L'IMPULSO "BASE" $x(t)$ CENTRATO IN $t=0$ PUÒ ESSERE OTTENUTO ATTRAVERSO PERIODICIZZAZIONE DI PERIODO $T_0 \to \infty$.

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t)$$

$x_p(t)$ periodico di periodo $T_0 \Rightarrow x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$

PB. STABILIRE COMPORTAMENTO SERIE FOURIER E COEFFICIENTI X_k QUANDO $T_0 \to \infty$

1° OSSERVAZIONE $T_0 \uparrow \rightarrow f_0 = \frac{1}{T_0} \downarrow$

$\Downarrow$

SI RIDUCE DIFFERENZA TRA 2 GENERICHE ARMONICHE CONSECUTIVE $kf_0 - (k-1)f_0 = f_0$

INFITTIMENTO DELLO SPETTRO DEL SEGNALE

2° OSSERVAZIONE

Considerando $X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt$

$\Downarrow$

$X_k \downarrow$ con $T_0 \uparrow$

QUESTO PB VIENE SUPERATO DEFINENDO, PER CIASCUNA DELLE FREQUENZE ARMONICHE kf_0, UN "COEFFICIENTE DI FOURIER MODIFICATO":

$$X(kf_0) \triangleq T_0 X_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$X(kf_0)$ NON TENDE A ZERO PER $T_0 \to \infty$.

IMPIEGANDO IL COEFFICIENTE DI FOURIER MODIFICATO, L'ESPANSIONE IN SERIE DI FOURIER SI RISCRIVE COME:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0)\, e^{j2\pi k f_0 t} \cdot f_0 \quad \left(\text{si è sostituito } X_k = X(kf_0) \cdot f_0\right)$$

- A QUESTO PUNTO SI PUÒ EFFETTUARE IL PASSAGGIO CRUCIALE AL LIMITE PER $T_0 \to \infty$ (OVVERO $f_0 \to 0$).

1° METODO

$x_p(t)$ periodico $\to x(t)$ aperiodico

2° METODO

LA SERIE È UNA SOMMA DI VALORI DI UNA FUNZIONE VALUTATA SUI PUNTI DISCRETI EQUISPAZIATI kf_0 (cioè $X(kf_0)\, e^{j2\pi k f_0 t}$) MOLTIPLICATI PER IL VALORE DELLA DISTANZA f_0 TRA 2 PUNTI SUCCESSIVI

$\Downarrow$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xrightarrow[\substack{T_0 \to \infty \\ f_0 \to 0}]{} \int_{-\infty}^{\infty}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{+j2\pi f t} df}$$

← INTEGRALE DI FOURIER (Antitrasformata di Fourier)

f: limite variabile discreta kf_0 quando $f_0 \to 0$

BISOGNA DETERMINARE $X(f)$!

$X(f)$: funzione complessa di variabile reale continua f (frequenza)

LA SUA ESPRESSIONE È PARI A:

$$X(f) = \lim_{\substack{T_0 \to \infty \\ f_0 \to 0}} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$

$\Downarrow$

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt}$$

Trasformata continua di Fourier

RIASSUMENDO

1) $x_p(t)$ (segnale periodico) $\longrightarrow X_k$ (serie di Fourier)

$x_p(t)$ viene rappresentato mediante componenti sinusoidali in relazione armonica, cioè multiple di un'unica fondamentale, e di ampiezza finita.

2) $x(t)$ (segnale aperiodico) $\longrightarrow X(f)$ (Trasformata di Fourier)

$x(t)$ è rappresentato come sovrapposizione di componenti sinusoidali di ampiezza infinitesima $X(f)df$ e di frequenza f variabile con continuità sull'intero asse reale ($x(t)$ è visto come periodico "DI PERIODO ILLIMITATO" e quindi con "f FONDAMENTALE" infinitesima)

Si hanno dunque le seguenti relazioni:

$$\boxed{x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df} \qquad \boxed{X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}$$

EQ. DI SINTESI — **EQ. DI ANALISI**

In modo sintetico le operazioni di antitrasformata e trasformata vengono indicate come:

$$x(t)=\mathcal{F}^{-1}[X(f)] \qquad X(f)=\mathcal{F}[x(t)]$$

<u>OSS.</u> Talvolta si usa esprimere la trasformata di Fourier in funzione della pulsazione $\omega=2\pi f$ $\left[\frac{rad}{s}\right]$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

La corrispondenza tra $x(t)$ e $X(f)$ viene indicata come

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

$X(f)$ si può esprimere in <u>forma polare</u>

$$X(f)=A(f)\, e^{j\theta(f)}$$

Dove:

- $A(f)=|X(f)|$ spettro di ampiezza
- $\theta(f)=\operatorname{arctg}\frac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}$ $(Re\{X(f)\}\geq 0)$ spettro di fase $\quad \theta(f)=\operatorname{arctg}\frac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}+\pi$ $(Re\{X(f)\}<0)$

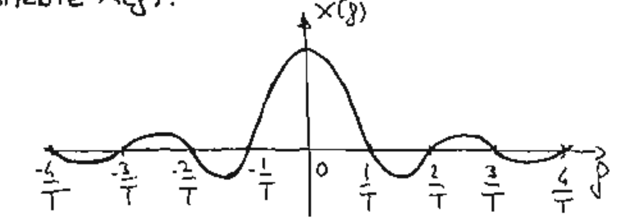
<u>ESEMPIO</u> Calcolare la trasformata di Fourier dell'impulso rettangolare. Disegnare lo spettro d'ampiezza e quello di fase.

$x(t)=rect\left(t/T\right)$

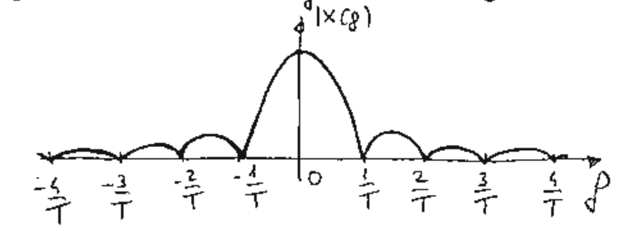
$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt=\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t}\, dt = -\left.\frac{e^{-j2\pi f t}}{j2\pi f}\right|_{-T/2}^{T/2} = -\frac{e^{-j\pi f T}-e^{j\pi f T}}{2\pi f} =$$

$$=\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}\cdot\frac{T}{T} = T\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T\,\operatorname{sinc}(fT)$$

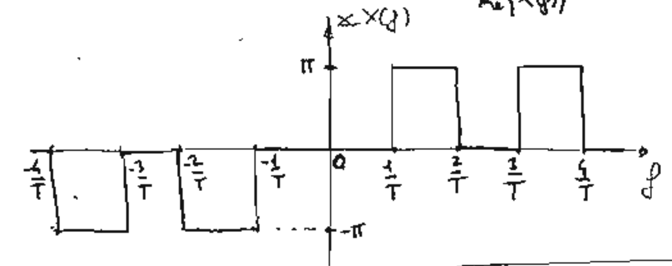
Per disegnare gli spettri di ampiezza e di fase si inizia con il rappresentare graficamente $X(f)$:



• Spettro d'ampiezza: $|X(f)|=T|\operatorname{sinc}(fT)|$



• Spettro di fase: $\angle X(f)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}} & \text{alle } f \text{ per cui } Re\{X(f)\}\geq 0\\ \operatorname{arctg}\frac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}+\pi & \text{alle } f \text{ per cui } Re\{X(f)\}<0\end{cases}$



<u>PROPRIETÀ VALORE NELL'ORIGINE</u>

$$X(0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt$$

L'integrale del segnale $x(t)$ coincide con il valore della sua trasformata $X(f)$ in $f=0$ (dualmente il valore del segnale $x(t)$ in $t=0$ è pari all'integrale della sua trasformata)

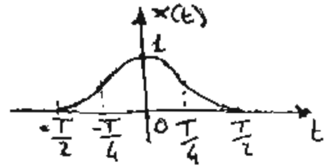
<u>OSS.</u> Questa proprietà può essere impiegata anche per verificare la correttezza del risultato. Nel caso del segnale rettangolo si ha infatti:

$$X(0)=T\operatorname{sinc}(0)=T \quad \text{ed infatti} \quad \int_{-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t}{T}\right)dt=\int_{-T/2}^{T/2} dt=T$$

ESEMPIO

CALCOLARE LA TRASFORMATA DI FOURIER DELLA SEGUENTE FUNZIONE

$$x(t)=\begin{cases}\cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right), & |t|\le \frac{T}{2}\\ 0, & \text{altrove}\end{cases}$$



APPLICANDO LA DEFINIZIONE SI OTTIENE

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j2\pi f t}dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)e^{-j2\pi f t}dt=$$

$$\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)=\frac{e^{j\frac{2\pi t}{T}}+e^{-j\frac{2\pi t}{T}}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-j2\pi f t}dt+\frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-j2\pi\left(f-\frac{1}{T}\right)t}dt}_{T\,\mathrm{sinc}\left(T\left(f-\frac{1}{T}\right)\right)}+\frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-j2\pi\left(f+\frac{1}{T}\right)t}dt}_{T\,\mathrm{sinc}\left(T\left(f+\frac{1}{T}\right)\right)}$$

$$=\frac{T}{2}\mathrm{sinc}(fT)+\frac{T}{4}\mathrm{sinc}\left(T\left(f-\frac{1}{T}\right)\right)+\frac{T}{4}\mathrm{sinc}\left(T\left(f+\frac{1}{T}\right)\right)$$

PROPRIETÀ TRASFORMATA DI FOURIER

ESISTENZA

Condizione sufficiente per la rappresentazione di $x(t)$ attraverso $X(f)$

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)\,dt<+\infty$$

cioè $x(t)$ sia ad energia finita.

$$\Downarrow$$

LA CONOSCENZA DELL'ANDAMENTO NEL TEMPO DEL SEGNALE $x(t)$ È EQUIVALENTE ALLA CONOSCENZA DELL'ANDAMENTO IN FREQUENZA DELLA RELATIVA TRASFORMATA DI FOURIER

OSS. IN REALTÀ LA CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÈ $X(f)$ RAPPRESENTI $x(t)$ È MENO RESTRITTIVA

LINEARITÀ

Sia $x(t)=a\,x_1(t)+b\,x_2(t)$ a,b: costanti

$x_1(t)\longleftrightarrow X_1(f)$

$x_2(t)\longleftrightarrow X_2(f)$

Si dimostra che

$$x(t)\longleftrightarrow X(f)=a\,X_1(f)+b\,X_2(f)$$

DIM:

Applicando la definizione di trasformata si ottiene

$$X(f)=\mathcal{F}[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j2\pi f t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(a\,x_1(t)+b\,x_2(t)\right)e^{-j2\pi f t}dt=$$

$$=a\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)\,e^{-j2\pi f t}dt}_{X_1(f)}+b\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x_2(t)\,e^{-j2\pi f t}dt}_{X_2(f)}=a\,X_1(f)+b\,X_2(f)$$

DUALITÀ

La similitudine tra le relazioni di trasformazione e antitrasformazione (intese come operatori su $x(t)$ e $X(f)$) fa sì che valga la seguente proprietà.

$$\text{SE } x(t)\longleftrightarrow X(f)\iff X(t)\longleftrightarrow x(-f)$$

QUESTA PROPRIETÀ PERMETTE DI OTTENERE LA TRASFORMATA DEL SEGNALE TEMPORALE $X(t)$, AVENTE LO STESSO ANDAMENTO TEMPORALE ORIGINARIAMENTE POSSEDUTO IN AMBITO FREQUENZIALE DALLA TRASFORMATA DI $x(t)$.

DIM:

Poiché $\quad x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\,e^{j2\pi f t}df$

$\Downarrow$ SCAMBIANDO t E f SI OTTIENE

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j2\pi t f} dt$$

$\Downarrow$ SI EFFETTUA IL CAMBIAMENTO DI VARIABILE $-f$ CON f

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi f t} dt$$ $\Leftarrow$ DEFINIZIONE DI TRASFORMATA DI FOURIER

SI OTTIENE CHE

$$X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

ESEMPIO

Dato il segnale $x(t) = \mathrm{sinc}(Bt)$, determinare la sua trasformata di Fourier

Sappiamo che $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T\,\mathrm{sinc}(fT)$

Applicando la proprietà di dualità si ottiene immediatamente

$$\mathrm{sinc}(Bt) \leftrightarrow \frac{1}{B}\mathrm{rect}\left(\frac{-f}{B}\right) = \frac{1}{B}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

TRASLAZIONE TEMPORALE

Dato $x(t) \leftrightarrow X(f)$ si vuole determinare la trasformata di $y(t) = x(t-t_0)$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-j2\pi f t} dt \underset{\substack{\text{si pone } \alpha = t - t_0 \\ (d\alpha = dt)}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f(\alpha + t_0)} d\alpha$$

$$= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

$$x(t-t_0) \leftrightarrow X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$\Downarrow$

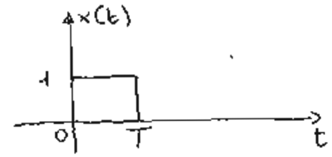
UN RITARDO TEMPORALE MODIFICA LO SPETTRO DI FASE DELLA TRASFORMATA DEL SEGNALE $x(t)$ MA NON CAMBIA LO SPETTRO D'AMPIEZZA.

$$|Y(f)| = |X(f)|$$

$$\measuredangle Y(f) = \measuredangle X(f) - 2\pi f t_0$$

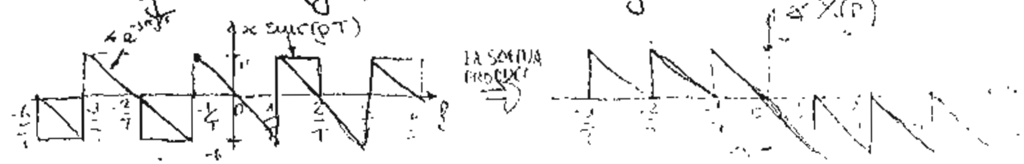
ESEMPIO

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$



Poiché $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T\,\mathrm{sinc}(fT)$ applicando il thm del ritardo si ottiene che

$$X(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT) e^{-j2\pi f T/2} = T\,\mathrm{sinc}(fT) e^{-j\pi f T}$$



OSSERVAZIONE

In modo analogo a quanto visto per la traslazione temporale si dimostra facilmente che se un segnale $x(t)$ viene moltiplicato per l'esponenziale complesso $e^{j2\pi f_0 t}$ la sua trasformata viene traslata intorno alla frequenza f_0

$$x(t) e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0)$$ **PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE IN FREQUENZA**

CAMBIAMENTO DI SCALA

Si vuole determinare la trasformata di Fourier del segnale $y(t) = x(at)$.

Supponendo che $a>0$ si ottiene:

$$Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(at)\, e^{-j2\pi f t}\,dt \underset{\substack{\text{si pone } at=z\\ a\,dt=dz}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(z)\, e^{-j2\pi f \frac{z}{a}}\,\frac{dz}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(z)\, e^{-j2\pi\left(\frac{f}{a}\right)z}\,dz = \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$x(at)\longleftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Quando $a<0$

$$x(at)\longleftrightarrow -\frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

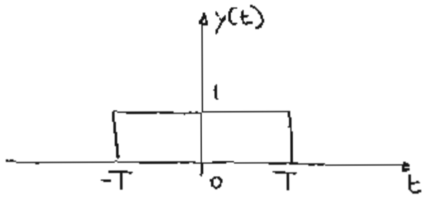
RIASSUMENDO SI PUÒ SCRIVERE CHE

$$\boxed{x(at)\longleftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)}$$

Per illustrare il significato di questo teorema si consideri l'esempio seguente

ESEMPIO

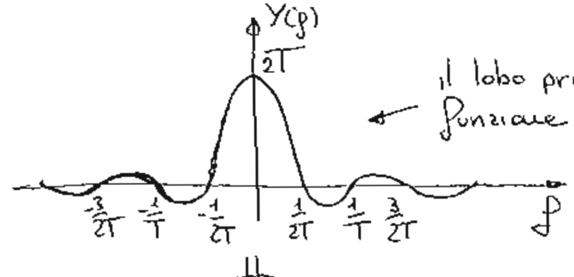
$y(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$



Si ha un impulso di durata doppia. Si può considerare il segnale $y(t)$ come una versione RALLENTATA del segnale rettangolare $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$: LA FORMA DEL SEGNALE È RIMASTA INALTERATA MA LA SUA DURATA È RADDOPPIATA.

Applicando il thm appena visto si ottiene

$$y(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)\longleftrightarrow 2T\,\mathrm{sinc}(2fT)=Y(f)$$



il lobo principale della funzione sinc ha larghezza $\frac{1}{T}$ (per il segnale $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ il lobo principale aveva larghezza $\frac{2}{T}$)

$$\Downarrow$$

QUANDO IL SEGNALE VIENE RALLENTATO, VENGONO A PREDOMINARE LE COMPONENTI FREQUENZIALI A BASSA FREQUENZA CHE DETERMINANO L'EVOLUZIONE LENTA DEL SEGNALE $\Rightarrow$ SI HA UN ADDENSAMENTO DELLO SPETTRO NELL'INTORNO DELLA f NULLA

DILATAZIONE		COMPRESSIONE
t	$\longleftrightarrow$	f
f	$\longleftrightarrow$	t

TEOREMA DELLA MODULAZIONE

Sia dato $x(t)$ avente trasformata di Fourier $X(f)$. Si vuole calcolare la trasformata del segnale $x(t)\cos(2\pi f_0 t)$.

Poiché

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t)=x(t)\left(\frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)=x(t)\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2}+x(t)\frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

Per la proprietà della traslazione in frequenza

$$x(t)\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2}\longleftrightarrow \frac{1}{2}X(f-f_0)$$

$$x(t)\frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\longleftrightarrow \frac{1}{2}X(f+f_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\longleftrightarrow \frac{1}{2}X(f-f_0)+\frac{1}{2}X(f+f_0)}$$

TEOREMI DI DERIVAZIONE ED INTEGRAZIONE

Nell'elaborazione dei segnali tempo continui, spesso si effettuano operazioni di derivazione e/o integrazione. Si ha la necessità di determinare le trasformate dei nuovi segnali ottenuti con tali operazioni.

Sia assegnato $x(t) \leftrightarrow X(f)$.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Se $x(t)$ è derivabile

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Invertendo le operazioni di integrazione e derivazione si ottiene

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \frac{d}{dt} e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, j2\pi f\, e^{j2\pi f t} df$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(X(f) \cdot j2\pi f\right) e^{j2\pi f t} df,$$

Confrontando l'espressione scritta con la definizione di antitrasformata si deduce che

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f \cdot X(f)}$$

L'operazione di derivata temporale di un segnale si traduce, nel dominio f in un'operazione ALGEBRICA cioè in un'alterazione di tutte le componenti frequenziali di un fattore $j2\pi f$ proporzionale al valore di f.

OSS. L'OPERAZIONE DI DERIVAZIONE COMPORTA UN'ESALTAZIONE DELLE COMPONENTI ALLE ALTE FREQUENZE

IN MODO ANALOGO SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$\int_{-\infty}^{t} x(\alpha) d\alpha \longleftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

DIM.

Si indichi con $y(t)$ la funzione integrale (o primitiva) di $x(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha) d\alpha$$

Poiché $x(t) = \frac{dy(t)}{dt} \Rightarrow X(f) = j2\pi f\, Y(f) \Rightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$

OSS. IN QUESTO CASO (DUALE DI QUELLO DI DERIVAZIONE) AD ESSERE ESALTATE SONO LE COMPONENTI A BASSA FREQUENZA DELLO SPETTRO DEL SEGNALE

N.B. IPOTESI PERCHÉ VALGA IL TEOREMA DI INTEGRAZIONE È CHE $X(0) = 0$

INFATTI LA RELAZIONE $Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$ È EQUIVALENTE ALLA $X(f) = j2\pi f \cdot Y(f)$ SOLO PER $f \neq 0$.

QUANDO $f = 0$ PERCHÉ LA RELAZIONE ABBIA SENSO DEVE ESSERE $X(0) = 0$

IMPORRE $X(0) = 0$, EQUIVALE AD AFFERMARE CHE $x(t)$ SOTTENDE AREA NULLA

INFATTI

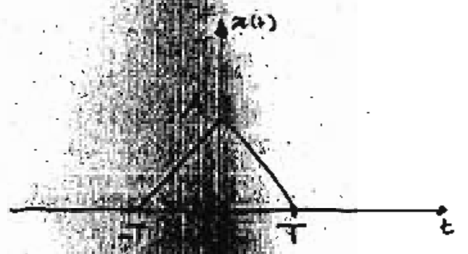
$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

LA STESSA CONDIZIONE PUÒ ESSERE ESPRESSA DICENDO CHE $y(t)$ DEVE TENDERE A 0 PER $t \to \infty$.

$$y(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0)$$

[illegible]RCIZIO

[illegible]I CALCOLI LA TRASFORMATA CONTINUA DI FOURIER $X(f)$ DELL'IMPULSO TRIANGO[illegible]



UNO TRA I [illegible] MODI DI RISOLVERE QUESTO PROBLEMA, E' QUELLO DI PASSARE [illegible] SEMPRE LA TRASFORMATA DELLA SUA DERIVATA $\frac{d}{dt}x(t)$.

$$s(t) = \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t+T/2}{T}\right) - \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

IMPIEGANDO [illegible] DEL RITARDO E LA TRASFORMATA NOTEVOLE DELL'IMP[illegible]RE POSSIAMO CALCOLARE LA TRASFORMATA DI $s(t)$

$$[illegible]\,T)\, e^{j\pi fT} - A\,\mathrm{sinc}(fT)\, e^{-j\pi fT}$$

$$[illegible]\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right) = A2j\,\mathrm{sinc}(fT)\,\sin(\pi fT)$$

Poiché [illegible] che [illegible] si ha:

$$X(f) [illegible] \frac{\mathrm{sinc}(fT)\,\sin(\pi fT)}{\cancel{j}\pi f T}\,T = AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

$\mathrm{sinc}(fT)$

TEOREMA DEL PRODOTTO

Siano dati i segnali $x(t) \leftrightarrow X(f)$
$y(t) \leftrightarrow Y(f)$

Si vuole determinare la trasformata del segnale prodotto $z(t) = x(t)\,y(t)$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y(t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$

Si sostituisce al posto di $x(t)$ la sua espressione come integrale di Fourier

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)\, e^{j2\pi \nu t} d\nu\right] y(t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$

Invertendo l'ordine d'integrazione (si suppone che l'operazione sia lecita) si ottiene:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j2\pi (f-\nu) t} dt\right]}_{Y(f-\nu)} d\nu$$

$$\Downarrow$$

$$Z(f) = \int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu)\,Y(f-\nu)\,d\nu = X(f) * Y(f)$$

L'operazione indicata con il simbolo $*$ prende il nome di "INTEGRALE DI CONVOLUZIONE" (o più semplicemente CONVOLUZIONE)

IL RISULTATO OTTENUTO SI PUÒ RIASSUMERE COME SEGUE

$$x(t)\cdot y(t) \longleftrightarrow X(f) * Y(f)$$

⇒ LEZIONE N.6 DEL 14/12/2006 AULA N11 8.15 ÷ 11.15

CONVOLUZIONE

SI VUOLE CONSIDERARE IL CASO DUALE DEL PRECEDENTE, CIOÈ SI VUOLE CALCOLARE LA TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SEGNALE $z(t)$ RISULTATO DELL'INTEGRALE DI CONVOLUZIONE IN AMBITO TEMPORALE TRA I DUE SEGNALI $x(t)$ E $y(t)$.

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, y(t-\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha)\, y(\alpha)\, d\alpha$$

APPLICANDO LA DEFINIZIONE DI TRASFORMATA DI FOURIER SI OTTIENE:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, y(t-\alpha)\, d\alpha \right] e^{-j2\pi f t} dt =$$

(si è sostituito a $z(t)$ l'integrale di convoluzione)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\alpha)\, e^{-j2\pi f t} dt \right]}_{Y(f)\, e^{-j2\pi f \alpha}} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, Y(f)\, e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha$$

$$= Y(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha = Y(f) \cdot X(f)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x(t) * y(t) = Y(f)\, X(f)}$$ CONVOLUZIONE

L'INTEGRALE DI CONVOLUZIONE GODE DELLE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1. COMMUTATIVA $\quad x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
2. ASSOCIATIVA $\quad [x(t) * y(t)] * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$
3. DISTRIBUTIVA $\quad z(t) * [x(t) + y(t)] = z(t) * x(t) + z(t) * y(t)$

CHE PROBLEMI COMPORTA LA FORMULA CHE RAPPRESENTA LA CONVOLUZIONE

1. NOI SAPPIAMO RISOLVERE GLI INTEGRALI UNA VOLTA CHE L'ESPRESSIONE ANALITICA DELLE FUNZIONI È STATA ESPLICITATA (log , sin , ...)
QUANDO LA FUNZIONE È RAPPRESENTATA GRAFICAMENTE SI INCONTRANO DIFFICOLTÀ

2. LA SOLUZIONE DELL'INTEGRALE DEFINITO DÀ COME RISULTATO UNA FUNZIONE. QUESTO È UNA CONSEGUENZA DEL FATTO CHE OLTRE ALLA VARIABILE D'INTEGRAZIONE α COMPARE ANCHE t.
LA FUNZIONE INTEGRANDA DIPENDE DA t. (PARAMETRO)

Es. È come se stessimo calcolando

$$\int_a^b \ln(3x)\,dx$$

↳ è un parametro

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b \ln(tx)\,dx \leftarrow$$

N.B! IL RISULTATO DIPENDE DA t PERCHÉ LA FUNZIONE INTEGRANDA DIPENDE DA t

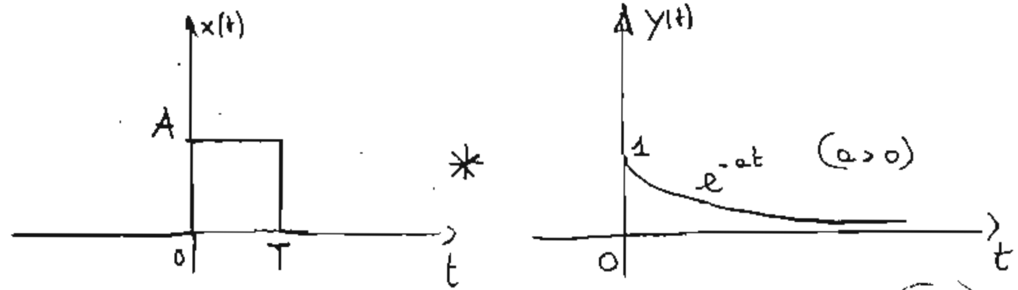
$$\Downarrow$$

RISOLVERE L'INTEGRALE EQUIVALE A RISOLVERE ∞ INTEGRALI

OSS. Per quanto riguarda la convoluzione la dipendenza da t è più sottile

ESEMPIO

Si vuole calcolare la convoluzione tra le 2 funzioni:



QUELLO CHE DÀ FASTIDIO DELLE 2 FUNZIONI È CHE SONO DEFINITE IN FORME ANALITICHE DIVERSE IN INTERVALLI DI TEMPO DIVERSI.

PER EFFETTUARE LA CONVOLUZIONE SI PROCEDE PER PASSI

$\boxed{1}$ Si osserva come sono fatte $x(t)$ e $y(t)$ interpretando t come parametro

$\Downarrow$

GLI ANDAMENTI DI $x(\alpha)$ E $y(\alpha)$ SONO GLI STESSI
(si è semplicemente sostituito α a t)

$\boxed{2}$ Si considera $y(t-\alpha)$. La gestione di questa funzione è più difficile per 2 motivi:

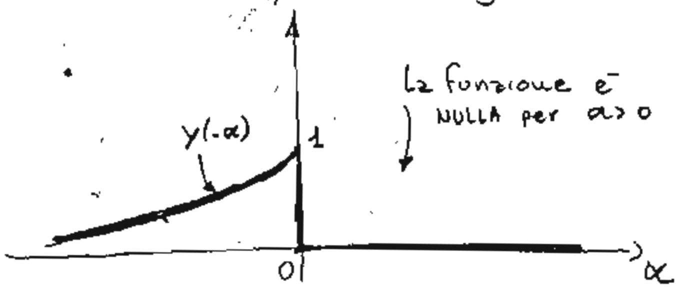
a) "t"
b) "$-$"

$y(t-\alpha)$

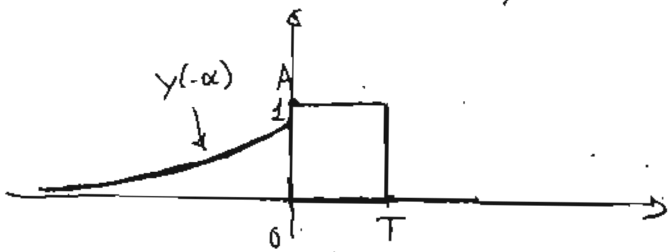
SI IPOTIZZI A TAL PROPOSITO DI VOLER INIZIARE A CALCOLARE $z(0)$, CIOÈ $z(t)$ PER $t=0$

$$z(0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, y(-\alpha)\, d\alpha$$

La rappresentazione di $y(-\alpha)$ è la seguente.



SOVRAPPONENDO I GRAFICI DI $x(\alpha)$ E $y(-\alpha)$ SI OTTIENE:



SI PUÒ OSSERVARE CHE LE 2 FUNZIONI HANNO SUPPORTI TEMPORALI DIVERSI

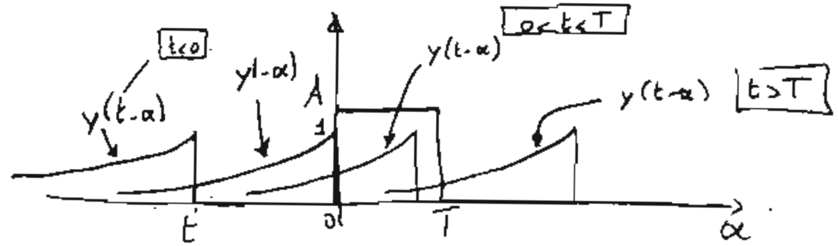
$\Downarrow$

$$z(0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, y(-\alpha)\, d\alpha$$

SI CONSIDERA ORA $t \neq 0$.

È necessario rappresentare $y(t-\alpha)$. Si hanno 2 situazioni:

- $t>0 \Rightarrow y(t-\alpha)$ si sposta a destra
- $t<0 \Rightarrow y(t-\alpha)$ si sposta a sinistra



LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA MOSTRA CHIARAMENTE CHE NEL CASO IN CUI $t<0 \Rightarrow z(t)=0$

N.B! QUESTO VALE $\forall t<0 \Rightarrow$ È COME SE L'INTEGRALE FOSSE STATO CALCOLATO PER ∞ VALORI DI t

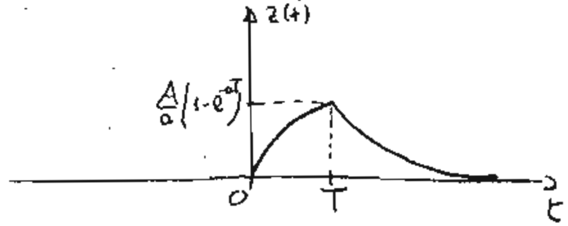
PER $t>0$ È NECESSARIO CALCOLARE L'INTEGRALE.

SI HANNO 2 SITUAZIONI:

1) $0<t<T \Rightarrow z(t)=\int_0^t A\, e^{-a(t-\alpha)}\, d\alpha = \frac{A}{a}\left(1-e^{-at}\right)$

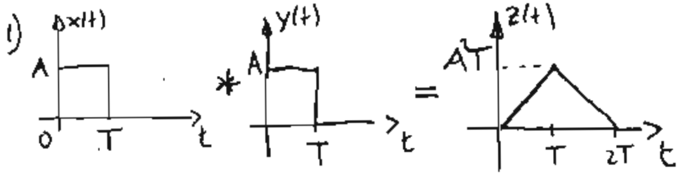
2) $t>T \Rightarrow z(t)=\int_0^T A\, e^{-a(t-\alpha)}\, d\alpha = \frac{A}{a}\, e^{-at}\left(e^{aT}-1\right)$

A RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI $z(t)$, RISULTATO DELLA CONVOLUZIONE, E':



ESERCIZI

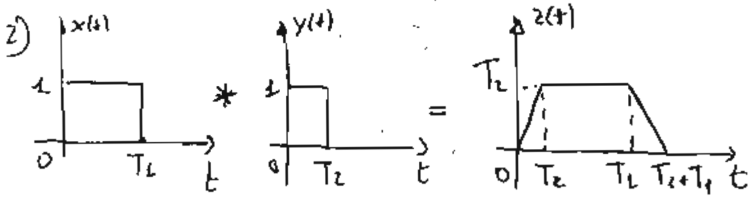
1)



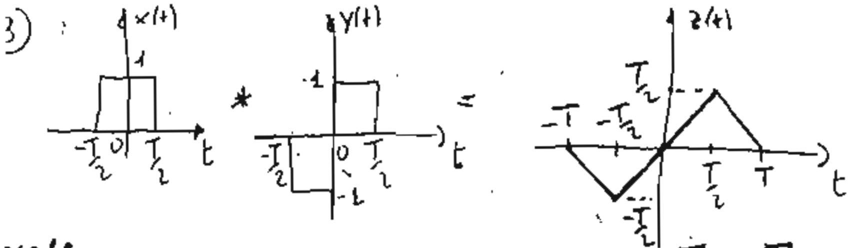
IN QUESTO CASO E' MOLTO SEMPLICE DETERMINARE LA TRASFORMATA DELLA FUNZIONE TRIANGOLARE TRASLATA IN $t = T$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow AT\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{-j\pi fT} = X(f) \\ y(t) &\leftrightarrow AT\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{-j\pi fT} = Y(f) \end{aligned}\right\} z(t) = y(t)*x(t) \leftrightarrow Z(f) = Y(f)X(f) = A^2T^2\,\mathrm{sinc}^2(fT)\,e^{-j2\pi fT}$$

2)



3)



OSS.1 SE LE 2 FUNZIONI HANNO DURATA LIMITATA T_1 E T_2 IL RISULTATO DELLA CONVOLUZIONE HA DURATA LIMITATA. IN PARTICOLARE IL RISULTATO DELLA CONVOLUZIONE NON PUÒ AVERE DURATA SUPERIORE A T_1+T_2

OSS.2 L'AREA DELLA FUNZIONE $z(t)$ RISULTATO DELLA CONVOLUZIONE E' PARI AL PRODOTTO DELLE AREE DI $x(t)$ E $y(t)$

$$z(t) = x(t)*y(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} z(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$$

(PER LA PROPRIETÀ DEL VALORE NELL'ORIGINE DELLA TRASFORMATA)

OSS. SI E' GIÀ AVUTO MODO DI INTRODURRE LA PROPRIETÀ CAMPIONATRICE DELLA FUNZIONE IMPULSIVA $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

ELABORANDO LA RELAZIONE APPENA SCRITTA ATTRAVERSO UN CAMBIAMENTO DI VARIABILE E TENENDO CONTO DEL FATTO CHE $\delta(t)$ E' UNA FUNZIONE PARI, SI OTTIENE:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\,\delta(\alpha-t_0)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\,\delta(t_0-\alpha)\,d\alpha = x(t_0)$$

SE SI INDICA CON t IL GENERICO t_0 SI PUÒ CONCLUDERE CHE

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\,\delta(t-\alpha)\,d\alpha = x(t) * \delta(t)$$

$$\Downarrow$$

$\delta(t)$ RAPPRESENTA UNA SORTA DI ELEMENTO NEUTRO RISPETTO ALLA CONVOLUZIONE

PER QUANTO APPENA DETTO SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

INFATTI

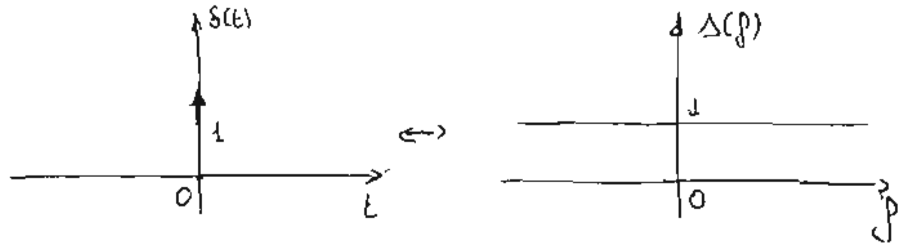
$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\,\delta(t-\alpha-t_0)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\,\delta(\alpha-(t-t_0))\,d\alpha = x(t-t_0)$$

TRASFORMATA DI FOURIER DELLA FUNZIONE $\delta(t)$

SI VUOLE DETERMINARE $\mathcal{F}[\delta(t)]$. APPLICANDO LA DEFINIZIONE SI OTTIENE

$$\Delta(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt = e^{-j2\pi ft}\Big|_{t=0}=1$$

$\Rightarrow$ LO SPETTRO DELLA FUNZIONE $\delta(t)$ È PARI A 1 $\forall$ VALORE DI f



PER LA DUALITÀ SI OTTIENE:

$$x(t)=1 \longleftrightarrow \delta(-f)=\delta(f)$$

N.B! L'introduzione di una funzione non ordinaria come $\delta(t)$ permette di calcolare la trasformata di Fourier di segnali aventi energia infinita (nell'esempio appena visto per il segnale costante).

Applicando le proprietà del ritardo e della traslazione si dimostra che

- $\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$
- $e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f-f_0)$

L'ULTIMA RELAZIONE SCRITTA CONSENTE DI CALCOLARE LA TRASFORMATA DI FOURIER DELLE FUNZIONI sin E cos.

TRASFORMATA CONTINUA DI FOURIER DELLE FUNZIONI sin, cos E DEI SEGNALI PERIODICI

Con la formula di Eulero si esprimono sin e cos in funzione degli esponenziali complessi. Inoltre si è appena vista l'espressione della trasformata di Fourier dell'esponenziale complesso. Per quanto detto si ottiene che

$$\cos(2\pi f_0 t)=\frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$$

$$\sin(2\pi f_0 t)=\frac{e^{j2\pi f_0 t}-e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} \longleftrightarrow \frac{1}{2j}\delta(f-f_0)-\frac{1}{2j}\delta(f+f_0)$$

o

$$\left(-\frac{j}{2}\delta(f-f_0)+\frac{j}{2}\delta(f+f_0)\right)$$

Con le trasformate appena ricavate si può dare una nuova interpretazione al teorema della modulazione

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow X(f) * \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right]$$

Poiché $X(f) * \delta(f-f_0) = X(f-f_0)$ si ottiene

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}X(f-f_0)+\frac{1}{2}X(f+f_0)$$

N.B! Aver determinato la trasformata continua di Fourier di un'oscillazione sinusoidale rende possibile l'espressione della trasformata di Fourier di un segnale

PERIODICO QUALUNQUE

SI È VISTO CHE UN SEGNALE $x(t)$ PERIODICO CON PERIODO T_0 È SVILUPPABILE IN SERIE DI FOURIER

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t}$$

CALCOLANDO LA TRASFORMATA DI FOURIER DI ENTRAMBI I MEMBRI, SI HA

$$X(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, \underbrace{\mathcal{F}\left[e^{j2\pi k f_0 t}\right]}_{} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, \delta(f-kf_0)$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$$

dove $f_0 = \frac{1}{T_0}$ e gli X_k rappresentano i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier.

LA RELAZIONE APPENA SCRITTA MOSTRA CHE IL **CONTENUTO SPETTRALE** DI UN SEGNALE PERIODICO È **CONCENTRATO ALLE FREQUENZE ARMONICHE** kf_0

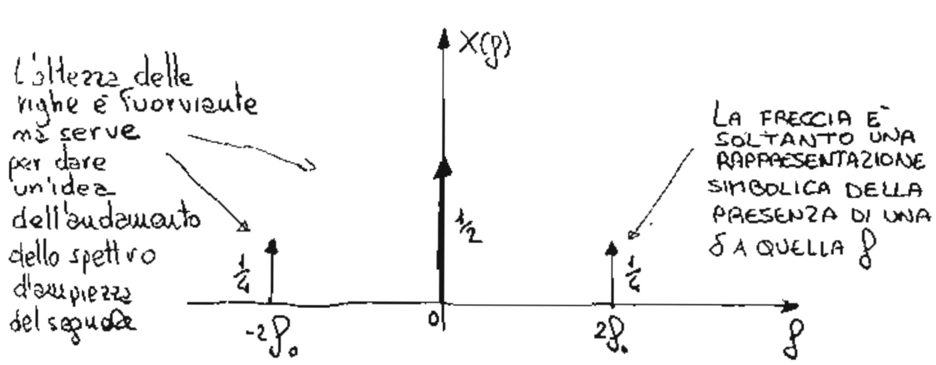
N.B.! IL CONTRIBUTO AL SEGNALE DELLA K-ESIMA FREQUENZA ARMONICA È RAPPRESENTATO DA UNA FUNZIONE δ POSIZIONATA IN CORRISPONDENZA DELLA FREQUENZA kf_0 E DI AREA X_k.

ESEMPIO

SI CALCOLI LA TRASFORMATA DI FOURIER DEL SEGNALE $x(t) = \cos^2(2\pi f_0 t)$

IL SEGNALE PUÒ ESSERE RISCRITTO COME

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi 2 f_0 t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta(f - 2f_0) + \frac{1}{4}\delta(f - 2f_0)$$



OSS. NEL CASO DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER LE "RIGHE" ERANO SEMPLICEMENTE PROPORZIONALI ALL'AMPIEZZA DEL COEFFICIENTE DI FOURIER RELATIVO

ANALISI E CARATTERIZZAZIONE DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

SI RESTRINGE ORA L'ATTENZIONE AL CASO ESTREMAMENTE IMPORTANTE DI SISTEMI LINEARI STAZIONARI (SLS) (O DETTI ANCHE LINEARI TEMPO INVARIANTI, LTI)

RISPOSTA IMPULSIVA

PER UN SISTEMA LINEARE STAZIONARIO (SLS) È POSSIBILE DETERMINARE LA COSIDDETTA RISPOSTA IMPULSIVA.

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow h(t) \triangleq T[\delta(t)]$$

LA CONOSCENZA DELLA RISPOSTA IMPULSIVA È DI FONDAMENTALE IMPORTANZA

$\Downarrow$

Permette di determinare la risposta del sistema ad un segnale d'ingresso avente andamento arbitrario

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\delta(t-\alpha)\,d\alpha$$

SI SCRIVE

$$y(t) = T[x(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\delta(t-\alpha)\,d\alpha\right] =$$

(T[·] e ∫ sono operatori lineari ⇒ il loro ordine può essere scambiato)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} T[x(\alpha)\delta(t-\alpha)]\,d\alpha =$$

(L'operatore T[·] agisce su funzioni di t. Poiché tale operatore è lineare, e tenendo conto che rispetto a t $x(\alpha)$ è una costante)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\,T[\delta(t-\alpha)]\,d\alpha$$

PER LA STAZIONARIETÀ E TENENDO CONTO DELLA DEFINIZIONE DI RISPOSTA IMPULSIVA SI OTTIENE

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)h(t-\alpha)\,d\alpha}$$

IL SEGNALE D'USCITA PUÒ ESSERE CALCOLATO COME CONVOLUZIONE DEL SEGNALE D'INGRESSO CON LA RISPOSTA IMPULSIVA

N.B.! La conoscenza della risposta impulsiva caratterizza completamente il comportamento del SLS

Ad esempio SLS causale SE E SOLO SE $h(t)$ CAUSALE

- **LINEARE**: SE E SOLO SE AD ESSO È APPLICABILE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \qquad x_1(t), x_2(t) : \text{segnali applicati all'ingresso}$$

$\Downarrow$ Il sistema è LINEARE quando

$$y(t) = T[x(t)] = a y_1(t) + b y_2(t) \qquad \text{dove } y_1(t) = T[x_1(t)] \text{ e } y_2(t) = T[x_2(t)]$$

L'uscita è ottenuta mediante la stessa combinazione lineare delle 2 risposte $y_1(t)$ e $y_2(t)$ alle 2 eccitazioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$ considerate separatamente.

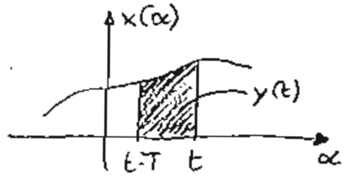
- **CAUSALE**: SE IL VALORE DELL'USCITA ALL'ISTANTE ARBITRARIO GENERICO t DIPENDE SOLO DAI VALORI ASSUNTI DALL'INGRESSO AGLI ISTANTI PRECEDENTI (O AL LIMITE COINCIDENTI CON) t STESSO:

$$y(t) = T[x(\alpha), \alpha \le t] = T[x(\alpha) u(t-\alpha)]$$

OSS. L'aggettivo causale deriva dal fatto che se la relazione non fosse verificata, l'uscita all'istante t sarebbe determinata anche dai valori dell'ingresso $x(\alpha)$ per istanti $\alpha > t$, cioè valori FUTURI di t, in violazione al principio causa-effetto

ESEMPIO: integratore a finestra mobile

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\int_{t-T}^{t} (\cdot)\, d\alpha} \longrightarrow y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\alpha)\, d\alpha$$



dove $T > 0$ rappresenta l'ampiezza della finestra d'integrazione

Si può osservare che il calcolo dell'uscita all'istante t presuppone la conoscenza dell'andamento del segnale d'ingresso in tutto l'intervallo $[t-T, t]$

DAL PUNTO DI VISTA MATEMATICO LA DEFINIZIONE DI SISTEMA È MENO VAGA:

"TRASFORMAZIONE CHE A UN DATO SEGNALE D'INGRESSO $x(t)$ FA CORRISPONDERE UN BEN DETERMINATO E UNICO SEGNALE D'USCITA $y(t)$.

$$y(t) = T[x(t)] \qquad \left(y[n] = T[x[n]] \text{ per sistemi tempo discreti} \right)$$ "

UN SISTEMA VIENE DUNQUE RAPPRESENTATO PER MEZZO DI RELAZIONI MATEMATICHE CHE LEGANO L'INGRESSO ALL'USCITA.

DAL PUNTO DI VISTA GRAFICO LA TRASFORMAZIONE SI RAPPRESENTA COME

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow y(t) \qquad \left(x[n] \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow y[n] \text{ per sistemi tempo discreti} \right)$$

PROPRIETÀ DEI SISTEMI MONODIMENSIONALI

A PRESCINDERE DALLA STRUTTURA INTERNA DEL SISTEMA, FORTEMENTE DIPENDENTE DAL CONTESTO E DALL'APPLICAZIONE, È POSSIBILE ACQUISIRE ALCUNE INFORMAZIONI PRELIMINARI SUL COMPORTAMENTO DEL SISTEMA STESSO E INDIVIDUARNE COSÌ ALCUNE PROPRIETÀ COMPIENDO OSSERVAZIONI ESCLUSIVAMENTE SUI SEGNALI INGRESSO/USCITA

UN SISTEMA SI DICE QUINDI:

CONTINUO O DISCRETO: A SECONDA CHE I SEGNALI D'INGRESSO E USCITA SIANO RISPETTIVAMENTE CONTINUI O DISCRETI

STAZIONARIO (O TEMPO INVARIANTE): SE LE CARATTERISTICHE DEL SISTEMA NON VARIANO NEL TEMPO

$$\text{Se } y(t) = T[x(t)] \Rightarrow T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$$

$$\left(y[n] = T[x[n]] \Rightarrow T[x[n-n_0]] = y[n-n_0] \quad \text{per sistemi a tempo discreto} \right)$$

SISTEMI LINEARI STAZIONARI (SLS) (o SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI LTI)

ARRIVATI A QUESTO PUNTO SORGONO SPONTANEE ALCUNE DOMANDE RELATIVE ALL'ANALISI E ALLO STUDIO DEI SEGNALI

- IN CHE CONTESTO SI MANIFESTANO?
- DOVE SI POSSONO OSSERVARE?
- COSA È RESPONSABILE DELLA LORO PRODUZIONE?
- COME POSSONO ESSERE ELABORATI?

si è parlato dei diversi tipi di segnali: prodotti da fenomeni FISICI, prodotti da CIRCUITI ELETTRICI, ecc ecc

GLI ESEMPI DI SEGNALI CHE SI POSSONO FARE POSSONO ESSERE ACCOMUNATI IN UN SOLO CONCETTO: SISTEMA

Si ERA DETTO CHE VI È SEMPRE UN SISTEMA ASSOCIATO CON LA GENERAZIONE DI CIASCUN SEGNALE ED UN ALTRO ASSOCIATO CON L'ESTRAZIONE DI INFORMAZIONE DAL SEGNALE

Si era poi data una definizione piuttosto vaga del concetto di sistema:

ENTITÀ (dispositivo, apparato) o INTERCONNESSIONE DI ENTITÀ (dispositivi, apparati), CHE MANIPOLA UNO O PIÙ SEGNALI (ingressi, sollecitazioni, eccitazioni) E GENERA UNO O PIÙ SEGNALI (uscite, risposte, effetti).

LA DEFINIZIONE DI SISTEMA È MOLTO VAGA PROPRIO PERCHÉ SOTTO LA DEFINIZIONE DI SISTEMA POSSONO RIENTRARE I CASI PIÙ DISPARATI.

N.B! SI PRENDERANNO IN CONSIDERAZIONE SOLO I SISTEMI MONODIMENSIONALI: 1 INGRESSO
1 USCITA

ANALISI E CARATTERIZZAZIONE DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

SI RESTRINGE ORA L'ATTENZIONE AL CASO ESTREMAMENTE IMPORTANTE DI SISTEMI LINEARI STAZIONARI (SLS) (O DETTI ANCHE LINEARI TEMPO INVARIANTI, LTI)

RISPOSTA IMPULSIVA

PER UN SISTEMA LINEARE STAZIONARIO (SLS) È POSSIBILE DETERMINARE LA COSIDDETTA RISPOSTA IMPULSIVA.

$$x(t)=\delta(t) \Rightarrow h(t) \triangleq T[\delta(t)]$$

LA CONOSCENZA DELLA RISPOSTA IMPULSIVA È DI FONDAMENTALE IMPORTANZA
⇩
Permette di determinare la risposta del sistema ad un segnale d'ingresso avente andamento arbitrario

$$x(t)=x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\delta(t-\alpha)\,d\alpha$$

SI SCRIVE

$$y(t)=T[x(t)]=T\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\delta(t-\alpha)\,d\alpha\right]=$$

(T[·] e ∫ sono operatori lineari ⇒ il loro ordine può essere scambiato)

$$=\int_{-\infty}^{\infty} T[x(\alpha)\delta(t-\alpha)]\,d\alpha=$$

(L'operatore T[·] agisce su funzioni di t. Poiché tale operatore è lineare, e tenendo conto che rispetto a t $x(\alpha)$ è una costante)

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\,T[\delta(t-\alpha)]\,d\alpha$$

PER LA STAZIONARIETÀ E TENENDO CONTO DELLA DEFINIZIONE DI RISPOSTA IMPULSIVA SI OTTIENE

$$\boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)h(t-\alpha)\,d\alpha}$$

IL SEGNALE D'USCITA PUÒ ESSERE CALCOLATO COME CONVOLUZIONE DEL SEGNALE D'INGRESSO CON LA RISPOSTA IMPULSIVA

N.B! La conoscenza della risposta impulsiva caratterizza completamente il comportamento del SLS

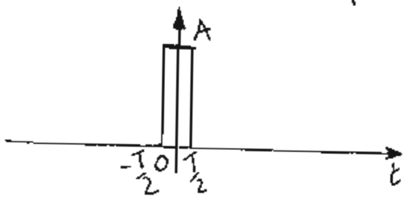
Ad esempio SLS causale SE E SOLO SE h(t) CAUSALE

LEZIONE N.7 DEL 16/12/2004 AULA NII 14.15 ÷ 16.15

RISPOSTA IN FREQUENZA

UN'APPROSSIMAZIONE DELLA RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$ PUÒ ESSERE OTTENUTA MISURANDO L'USCITA DI UN SLS AL CUI INGRESSO È APPLICATO UN SEGNALE CHE APPROSSIMA $\delta(t)$.

Se sono noti i tempi di risposta del sistema una buona approssimazione di $\delta(t)$ è l'impulso rettangolare



L'approssimazione è buona se:

1) $T <$ costante di tempo intrinseca del sistema
2) A sufficientemente elevata

OSS Quanto detto vale nel momento in cui intendiamo effettuare una caratterizzazione del sistema nel dominio temporale. Questo non è sempre possibile sia per l'impossibilità di generare una buona approssimazione di $\delta(t)$ sia per i problemi connessi alla gestione di segnali con ampiezza elevata.

PER RISOLVERE QUESTO PROBLEMA SI CAMBIA IL TIPO DI ECCITAZIONE:

$$x(t) = e^{j2\pi f t}$$

L'USCITA CORRISPONDENTE A TALE INGRESSO È:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, x(t-\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, e^{j2\pi f(t-\alpha)}\, d\alpha =$$

$$= e^{j2\pi f t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, e^{-j2\pi f \alpha}\, d\alpha}_{H(f):\ \text{trasformata di Fourier di } h(t)} = e^{j2\pi f t} \cdot H(f)$$

LA RISPOSTA AD UN'OSCILLAZIONE DI FREQUENZA f ASSEGNATA È ANCORA UN'OSCILLAZIONE ALLA STESSA f MA CON AMPIEZZA E FASE MODIFICATE DI UN FATTORE A VALORI COMPLESSI $H(f)$

$H(f)$: RISPOSTA IN FREQUENZA DEL SISTEMA

$$H(f) \triangleq \left. \frac{y(t)}{x(t)} \right|_{x(t) = e^{j2\pi f t}}$$

Al variare di f cambia la variazione d'ampiezza e lo sfasamento introdotto dal sistema sul segnale.

La risposta in frequenza e la risposta impulsiva costituiscono una coppia trasformata - antitrasformata:

$$h(t) \longleftrightarrow H(f)$$

UN'ALTRO MODO PER OTTENERE $H(f)$ È QUELLO DI PARTIRE DALLA CONOSCENZA DI $X(f)$ E $Y(f)$. PER IL TEOREMA DELLA CONVOLUZIONE SI RICAVA

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

DA CUI

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

Ha senso solo per $X(f) \neq 0$

- LA RISPOSTA IN FREQUENZA PUÒ ESSERE MISURATA CON UN SEGNALE DI PROVA SINUSOIDALE CON f VARIABILE NELLA BANDA DI INTERESSE. Se $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow y(t) = A\,|H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \measuredangle H(f_0))$
- LA PROPRIETÀ APPENA VISTA (INSIEME ALLA LINEARITÀ) PERMETTE DI CALCOLARE LO SPETTRO DELLA RISPOSTA AD UN SEGNALE PERIODICO.

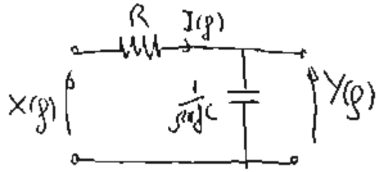
SIA $X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, \delta(f - kf_0)$ DOVE X_k SONO I COEFFICIENTI DI FOURIER.

LO SPETTRO DEL SEGNALE D'USCITA È DATO DA

$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, H(kf_0)\, \delta(f - kf_0)$$

ESERCIZIO

Si determini la risposta in frequenza $H(f)$ del seguente circuito



La relazione ingresso-uscita si scrive come

$$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f RC} \cdot X(f)$$

La risposta in frequenza è:

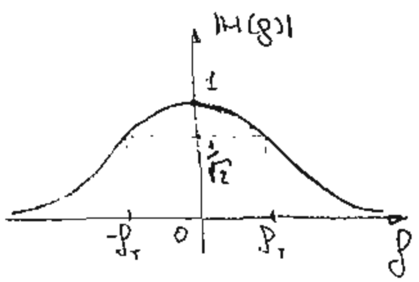
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1+j2\pi f RC} = \frac{1}{1+j\, f/f_T} \qquad \left(f_T = \frac{1}{2\pi RC} : \text{frequenza di taglio} \right)$$

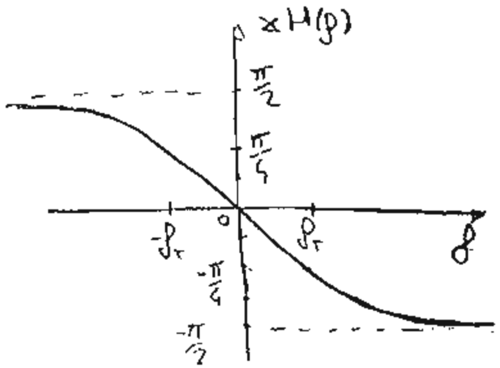
- Lo spettro d'ampiezza è

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+ f^2/f_T^2}}$$

- Lo spettro di fase è

$$\measuredangle H(f) = -\operatorname{arctg}\left(f/f_T\right)$$





IL DECIBEL

In molti fenomeni fisici l'ampiezza di un segnale può variare di molti ordini di grandezza.

In questi casi conviene usare un'unità di misura logaritmica dell'ampiezza del segnale rispetto ad un'ampiezza di riferimento.

Questa unità è il decibel

Relativamente alla misura della risposta in ampiezza di un sistema, si definisce la risposta in dB come

$$|H(f)|_{dB} \triangleq 10 \log_{10} \frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2}$$

← è sempre e comunque una misura relativa ad un riferimento ($|H(f_0)|^2$)

OSS. Nella definizione compare $|\cdot|^2$. Questo è dovuto al fatto che il dB si riferisce a misure relative di potenze.

ESEMPIO

Dato il rapporto tra 2 potenze P_2/P_1 si ha $\left.\frac{P_2}{P_1}\right|_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$

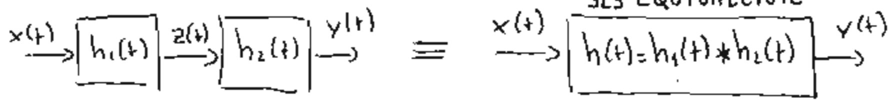
Nel caso dell'esercizio precedente si può esprimere $|H(f)|$ in dB considerando come valore di riferimento $|H(0)|=1$, cioè il punto in corrispondenza del quale $|H(f)|$ assume valore massimo

$$|H(f)|_{dB} = 10 \log_{10} \frac{|H(f)|^2}{|H(0)|^2} = 10 \log_{10} |H(f)|^2 = -10 \log_{10}\left(1 + \frac{f^2}{f_T^2}\right)$$

SISTEMI IN CASCATA E IN PARALLELO

CASCATA)

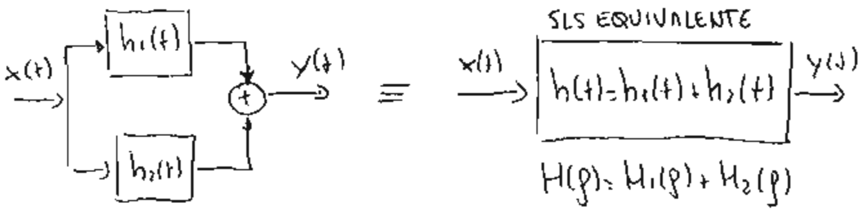
Si considerino due SLS disposti in cascata.



$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$

PARALLELO

Si considerino due SLS disposti in parallelo alimentati dallo stesso ingresso.



$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$

FILTRI

Un caso tipico che si incontra nell'elaborazione dei segnali è

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

dove

$x(t)$: segnale osservato

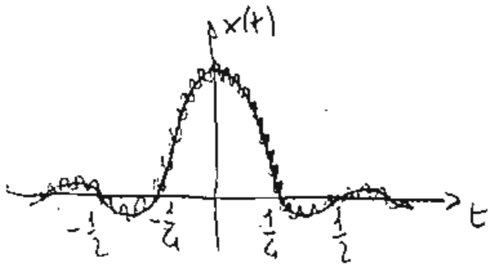
$x_1(t)$: segnale utile

$x_2(t)$: disturbo

ESEMPIO

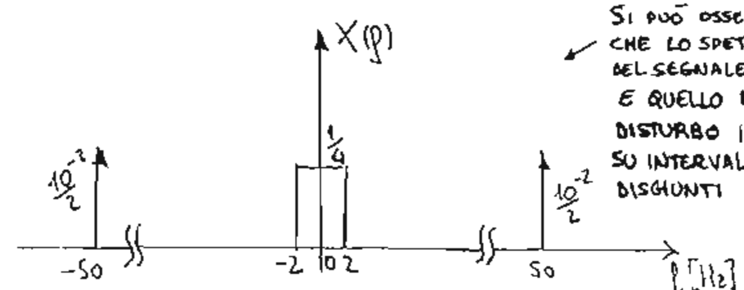
$x_1(t) = \mathrm{sinc}(4t)$

$x_2(t) = 10^{-2} \cos(2\pi \cdot 50t)$



IN UNA SITUAZIONE DI QUESTO TIPO È FONDAMENTALE RIUSCIRE A DISCRIMINARE IL SEGNALE UTILE DAL DISTURBO, COSA CHE APPARENTEMENTE RISULTA IMPOSSIBILE SE SI TIENE CONTO CHE IL SEGNALE OSSERVATO È LA SOVRAPPOSIZIONE DEI DUE SEGNALI $x_1(t)$ E $x_2(t)$.

LA SITUAZIONE RISULTA ESSERE COMPLETAMENTE DIVERSA SE SI CONSIDERA LA RAPPRESENTAZIONE DEI DUE SEGNALI IN AMBITO FREQUENZIALE



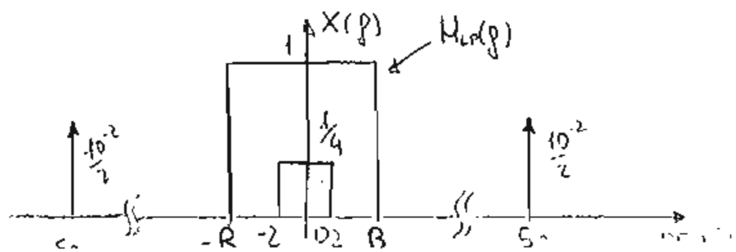
SI PUÒ OSSERVARE CHE LO SPETTRO DEL SEGNALE UTILE E QUELLO DEL DISTURBO INSISTONO SU INTERVALLI FREQUENZIALI DISGIUNTI

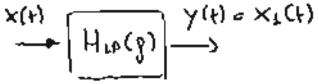
Si intuisce che è possibile separare il segnale utile dal disturbo impiegando un SLS con un'opportuna risposta in f

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \Longleftrightarrow X(f) = X_1(f) + X_2(f)$$

PER ELIMINARE $x_2(t)$ SI FA PASSARE $x(t)$ ATTRAVERSO UN SLS CON CARATTERISTICHE DI SELETTIVITÀ RISPETTO ALLE COMPONENTI FREQUENZIALI DEL SEGNALE.

Considerando un SLS con risposta in frequenza $H_{LP}(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$ con $B > 2$





Un SLS con risposta in frequenza $rect\left(\frac{f}{2B}\right)$ viene detto FILTRO PASSA-BASSO IDEALE. Tale filtro possiede caratteristiche di selettività:

LE COMPONENTI FREQUENZIALI ALL'INTERNO DI UNA CERTA BANDA (VICINO A $f=0$, CIOÈ LE BASSE FREQUENZE) VENGONO LASCIATE INALTERATE IN QUESTA ZONA, DETTA BANDA PASSANTE, $H_{LP}(f)=1$.

VICEVERSA, ALL'ESTERNO DELLA BANDA PASSANTE, CIOÈ NELLA BANDA OSCURA, LE COMPONENTI FREQUENZIALI VENGONO COMPLETAMENTE CANCELLATE ($H_{LP}(f)=0$)

B: BANDA

CONVENZIONALMENTE SI DEFINISCE BANDA **B** DEL FILTRO L'AMPIEZZA DELLA BANDA PASSANTE CONSIDERATA SUL SOLO SEMIASSE POSITIVO DELLE FREQUENZE.

L'antitrasformata di $H_{LP}(f)$ è:

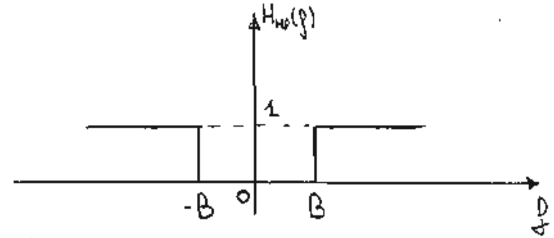
$$h_{LP}(t) = 2B\,sinc(2Bt)$$

Si osserva che $h_{LP}(t) \neq 0$ per $t<0 \Rightarrow$ il filtro passabasso ideale è non causale e quindi <u>NON È FISICAMENTE</u> realizzabile

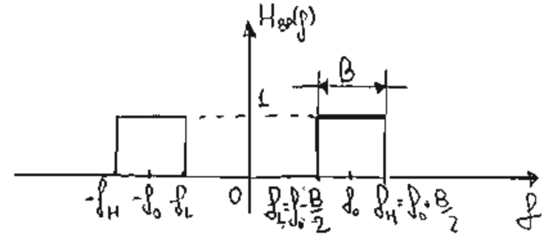
OLTRE AL FILTRO PASSA-BASSO IDEALE SI POSSONO AVERE

- FILTRO PASSA-ALTO IDEALE

$$H_{HP}(f) = 1 - rect\left(\frac{f}{2B}\right) \Leftrightarrow h_{HP}(t) = \delta(t) - 2B\,sinc(2Bt)$$



- FILTRO PASSA-BANDA IDEALE



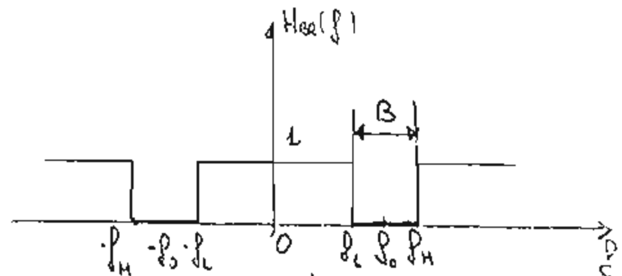
$$H_{BP}(f) = rect\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + rect\left(\frac{f+f_0}{B}\right) \Leftrightarrow h_{BP}(t) = 2B\,sinc(Bt)\cos(2\pi f_0 t)$$

IN MODO ALTERNATIVO IL FILTRO PASSA-BANDA IDEALE VIENE CARATTERIZZATO DAI 2 PARAMETRI EQUIVALENTI

$f_0 = \frac{f_L + f_H}{2}$: frequenza di centro banda

$B = f_H - f_L$: banda passante

- FILTRO ELIMINA-BANDA IDEALE



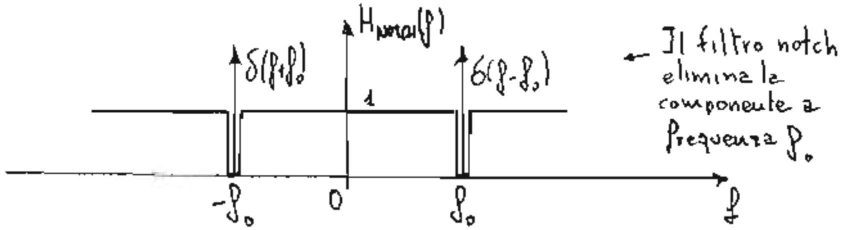
f_0 e B sono ora relative alla banda oscura

LA RISPOSTA IN FREQUENZA DEL FILTRO ELIMINA-BANDA IDEALE È

$$H_{BR}(f) = 1 - H_{BP}(f) \longleftrightarrow h_{BR}(t) = \delta(t) - 2B\,sinc(Bt)\cos(2\pi f_0 t)$$

OSS. UN FILTRO ELIMINA-BANDA PUÒ ESSERE MOLTO SELETTIVO E AL LIMITE PUÒ ESSERE USATO PER REIETTARE UNA COMPONENTE SPETTRALE AD UNA SINGOLA f

IN QUESTO CASO IL FILTRO ELIMINA-BANDA VIENE DETTO FILTRO NOTCH



I FILTRI IDEALI VISTI HANNO RISPOSTE IMPULSIVE NON CAUSALI $\Rightarrow$ NON SONO FISICAMENTE REALIZZABILI.

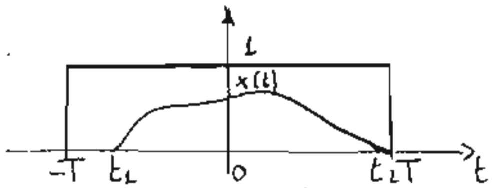
LA PRESENZA DI UNA DISCONTINUITÀ NELLA RISPOSTA IN FREQUENZA SI PUÒ INTERPRETARE CON LA PRESENZA DI UNA FUNZIONE RETTANGOLARE CHE HA RISPOSTA IMPULSIVA ANTICAUSALE.

$\Downarrow$

LE RISPOSTE IN FREQUENZA DEI FILTRI REALI NON CONTENGONO DISCONTINUITÀ

DURATA E BANDA DI UN SEGNALE

$x(t)$: segnale a DURATA FINITA $\Rightarrow \neq 0$ su intervallo limitato $[t_1, t_2]$



Moltiplicando $x(t)$ con un impulso rettangolare $rect\left(\frac{t}{2T}\right)$ con $T = \max(|t_1|, t_2)$ $x(t)$ non viene modificato

$$x(t) \cdot rect\left(\frac{t}{2T}\right) \Longleftrightarrow X(f) * 2T\,sinc(2Tf)$$

DOMANDA: $x(t)$ ha banda limitata?

SI COMPRENDE CHE $x(t)$ HA BANDA ILLIMITATA DALL'OSSERVAZIONE CHE LA SUA TRASFORMATA È LA CONVOLUZIONE DI $X(f)$ CON LA TRASFORMATA DELL'IMPULSO RETTANGOLARE $(2T\,sinc(2Tf))$ CHE HA ESTENSIONE ILLIMITATA.

SI PUÒ QUINDI DEDURRE CHE

SEGNALE CON DURATA RIGOROSAMENTE LIMITATA	$\Rightarrow$	BANDA INFINITA
SEGNALE CON BANDA RIGOROSAMENTE LIMITATA	$\Rightarrow$	DURATA ILLIMITATA

OSS. MOLTI SEGNALI NON HANNO NÈ BANDA NÈ DURATA RIGOROSAMENTE LIMITATA.

IN QUESTI CASI SI DÀ UNA DEFINIZIONE CONVENZIONALE DI QUESTE 2 QUANTITÀ

BANDA DI UN SEGNALE

PER I FILTRI REALI NON VI È UNA DISTINZIONE NETTA TRA BANDA PASSANTE E BANDA OSCURA.

IN OGNI CASO I FILTRI REALI POSSIEDONO UN CERTO GRADO DI SELETTIVITÀ CHE RENDE POSSIBILE IL LORO IMPIEGO COME SISTEMI FILTRANTI: SI DÀ UNA DEFINIZIONE CONVENZIONALE DI BANDA

Sia $x(t)$ un segnale il cui spettro d'ampiezza $|X(f)|$ assume il suo valore massimo in corrispondenza di $f=f_0$

- $f_0 = 0 \Rightarrow |X(f)|$ di tipo PASSA-BASSO
- $f_0 = \infty \Rightarrow |X(f)|$ di tipo PASSA-ALTO
- $f_0 \neq 0$ con $f_0 < +\infty \Rightarrow |X(f)|$ di tipo PASSA-BANDA

DEF. PER GLI SPETTRI PASSA-BASSO E PASSA-ALTO SI DEFINISCE LA BANDA A 3dB COME LA f IN CORRISPONDENZA DELLA QUALE LO SPETTRO D'AMPIEZZA RISULTA RIDOTTO DI UN FATTORE $\sqrt{2}$ RISPETTO AL VALORE DI RIFERIMENTO

$$\frac{|X(B_{3dB})|}{|X(f_0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|X(B_{3dB})|^2}{|X(f_0)|^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 10\log_{10}\frac{|X(B_{3dB})|^2}{|X(f_0)|^2} = -3dB$$

B_{3dB} DÀ UN'INDICAZIONE "PRATICA" DELLA BANDA DEL SEGNALE

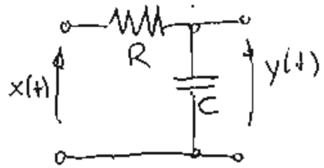
$\Downarrow$

Ad esempio per la composizione di un segnale di tipo passa-basso le componenti a $f < B_{3dB}$ sono ritenute importanti mentre quelle con $f > B_{3dB}$ vengono considerate trascurabili

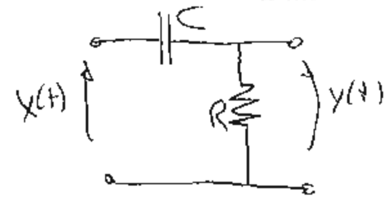
In modo analogo si può definire la banda per un filtro non ideale se si considera che la risposta in ampiezza del sistema ha lo stesso ruolo dello spettro d'ampiezza per un segnale.

N.B! Esistono altre definizioni di banda che considerano il contenuto energetico dello spettro d'ampiezza del segnale

ESEMPI DI POSSIBILI FILTRI PASSA-BASSO E PASSA-ALTO REALI



PASSA-BASSO



PASSA-ALTO

$$|H_{RC}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_T}\right)^2}}$$

$$|H_{CR}(f)| = \frac{|f/f_T|}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_T}\right)^2}}$$

$f_T = \frac{1}{2\pi RC} = B_{3dB}$, cioè la frequenza di taglio corrisponde alla banda a 3dB.

DISTORSIONI INTRODOTTE DAI FILTRI

SI È VISTO CHE LA FUNZIONE TIPICA DI UN FILTRO È QUELLA DI SEPARARE UN SEGNALE UTILE DA ALTRI DISTURBI.
QUESTA OPERAZIONE DEVE ESSERE EFFETTUATA IN MODO DA NON ALTERARE O, IN MODO PIÙ PROPRIAMENTE DETTO, NON DISTORCERE IL SEGNALE UTILE

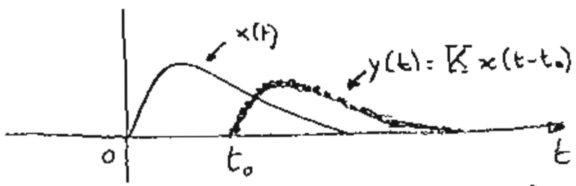
Ci si chiede:

QUALI CARATTERISTICHE DEVE POSSEDERE UN SLS AFFINCHÉ IL SEGNALE DI USCITA $y(t)$ SIA UNA REPLICA FEDELE DEL SEGNALE D'INGRESSO? SI PUÒ DIRE CHE IL SLS NON INTRODUCE DISTORSIONE QUANDO SI VERIFICA CHE

$$y(t) = K\,x(t-t_0)$$

DOVE:

K: costante , t_0: ritardo



$$y(t) = K\,x(t-t_0) \Longleftrightarrow Y(f) = K\,X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

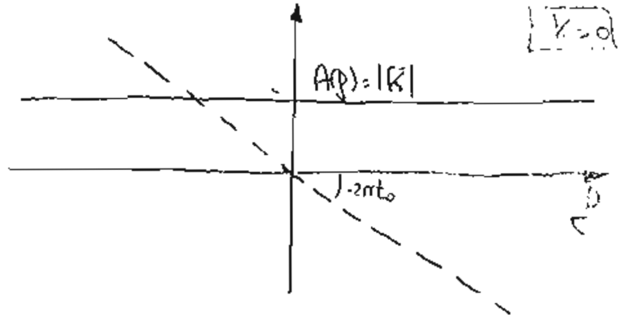
$$\Downarrow$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = K\,e^{-j2\pi f t_0} \Leftarrow$$ RISPOSTA IN FREQUENZA DI **UN** SLS NON DISTORCENTE

$A(f) = |H(f)| = |K|$ ← spettro d'ampiezza COSTANTE

$\Theta(f) = \measuredangle H(f) = -2\pi f t_0 + \measuredangle K$ ← fase lineare in frequenza

$\left(\Theta(f) = -2\pi f t_0 \text{ SE } K>0 \;,\; \Theta(f) = -2\pi f t_0 + \pi\,\mathrm{sign}(f) \text{ SE } K<0\right)$



PERCHÉ NON SI ABBIA DISTORSIONE LE COMPONENTI SINUSOIDALI IN CUI PUÒ PENSARSI SCOMPOSTO UN SEGNALE ARBITRARIO DEVONO:

1) Essere amplificate o attenuate tutte nella stessa misura
2) Ritardate ognuna della medesima quantità (SFASATE QUINDI DI UN ANGOLO PROPORZIONALE ALLA FREQUENZA $\cos(2\pi f(t-t_0)) = \cos(2\pi f t - 2\pi f t_0)$)

QUANTO DETTO VALE PER UN SISTEMA IDEALE. PER UN SISTEMA REALE VI SONO LIMITI INTRINSECI DI BANDA ED INOLTRE NON SAREBBE POSSIBILE GARANTIRE UNA RISPOSTA IN f CON LE CARATTERISTICHE SUDDETTE

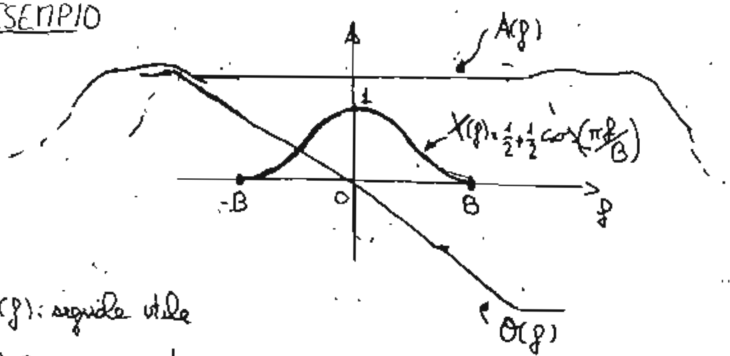
In realtà il segnale utile $x(t)$ sarà in generale caratterizzato da una BANDA LIMITATA

$$\Downarrow$$

È IMPORTANTE CHE IL SLS VERIFICHI LE CONDIZIONI SOLO PER LE FREQUENZE ALL'INTERNO DELLA BANDA DEL SEGNALE

N.B.! Ai fini della distorsione introdotta sul segnale non è rilevante l'andamento della risposta del filtro alle frequenze dove non vi sono componenti del segnale d'ingresso

ESEMPIO



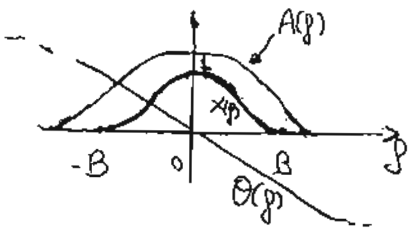
X(f): segnale utile

A(f), θ(f): risposta in ampiezza e risposta in fase

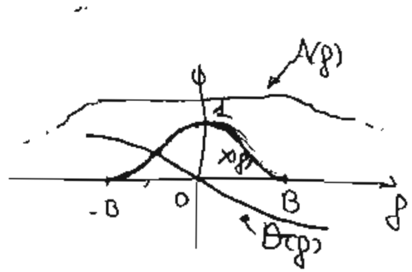
IN QUESTO CASO IL SEGNALE D'INGRESSO x(t) VIENE RIPORTATO IN USCITA INDISTORTO

NEL CASO IN CUI LE CONDIZIONI DI NON-DISTORSIONE NON VENGANO GARANTITE NEMMENO NELLA BANDA DEL SEGNALE SI POSSONO AVERE LE SEGUENTI SITUAZIONI

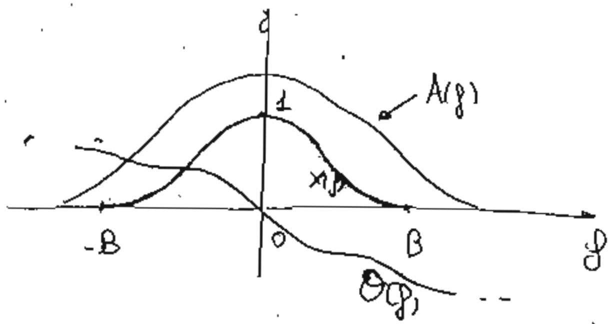
DISTORSIONE D'AMPIEZZA



DISTORSIONE DI FASE



DISTORSIONE DI AMPIEZZA E FASE



DENSITÀ SPETTRALE DI ENERGIA

SIA x(t) UN SEGNALE AD ENERGIA FINITA

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)\,dt<+\infty$$

L'ENERGIA DEL SEGNALE x(t) PUÒ ESSERE CALCOLATA ANCHE OPERANDO NEL DOMINIO DELLA f

$$x^2(t)=x(t)\cdot x(t)\longleftrightarrow X(f)*X(f)=\int_{-\infty}X(\nu)X(f-\nu)\,d\nu$$

E_x rappresenta l'area della funzione $x^2(t)$. L'area [illegible] funzione coincide con il valore della trasform[illegible]

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}X(\nu)X(-\nu)\,d\nu$$

CAMBIANDO VARIABILE D'INTEGRAZIONE $(f=\nu)$ E OSSERVANDO CHE PER SEGNALI REALI VALE LA PROPRIETÀ $X(f)=X^*(f)$ SI OTTIENE

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2\,df$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E_x=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2\,df}$$

TEOREMA (O RELAZIONE) DI PARSEVAL

Nel dominio temporale la quantità $x^2(t)$ rappresenta la potenza istantanea. Ci si chiede se non sia possibile attribuire un significato locale alla funzione [illegible]

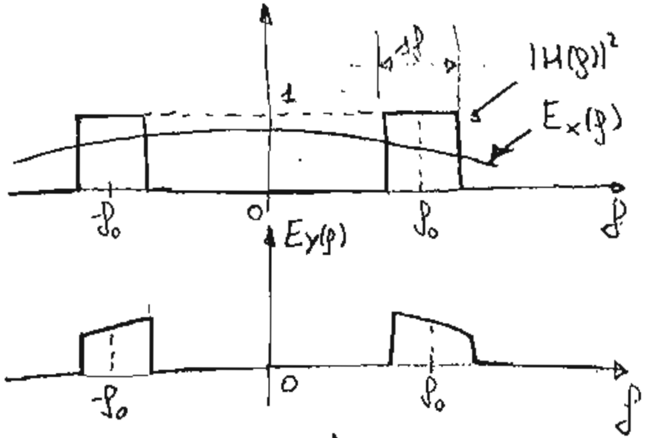
$$E_x(f)\triangleq|X(f)|^2$$

DA UN PUNTO DI VISTA FISICO SI PUÒ PENSARE CHE $E_x(f_0)=2|X(f_0)|^2df$ SIA L'ENERGIA DELLA FORMA D'ONDA ALL'USCITA DI UN FILTRO PASSA-BANDA IDEALE, CON BANDA df, CENTRATO ALLA FREQUENZA f_0

SI CONSIDERI SLS CON RISPOSTA IN FREQUENZA $H(f)$ AL CUI INGRESSO È APPLICATO $x(t)$ E LA CUI USCITA SIA $y(t)$. SI OTTIENE

$$E_y(f)=|Y(f)|^2=|X(f)H(f)|^2=|X(f)|^2|H(f)|^2=E_x(f)\,|H(f)|^2$$

$H(f)$ È LA RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN FILTRO PASSA-BANDA CON BANDA Δf E FREQUENZA CENTRALE f_0



L'ENERGIA DEL SEGNALE ALL'USCITA È PARI A

$$E_y=2\int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}} E_x(f)\,df$$

SE SI RIDUCE PROGRESSIVAMENTE Δf SI PUÒ DIRE CHE $E_x(f)\simeq E_x(f_0)$

L'ENERGIA DEL SEGNALE D'USCITA SI PUÒ SCRIVERE AL LIMITE COME

$$E_y(f_0)=2E_x(f_0)\,df$$

$y(t)$ È COSTITUITO DALLE COMPONENTI SINUSOIDALI DI $x(t)$ NELLA BANDA INTORNO A f_0; $E_x(f_0)=|X(f_0)|^2$ HA IL SIGNIFICATO DI DENSITÀ SPETTRALE DI ENERGIA DI $x(t)$ PER UNITÀ DI BANDA (SI È ATTRIBUITA METÀ ENERGIA ALLE $f>0$ E METÀ ALLE $f<0$)

OSS. Ai fini del calcolo dell'energia di $x(t)$, conta solo lo spettro di ampiezza del segnale stesso, mentre lo spettro di fase è ininfluente. La stessa osservazione vale anche a proposito della relazione $E_y(f)=E_x(f)\,|H(f)|^2$ dove ai fini del calcolo della densità spettrale di energia conta solo la risposta in ampiezza $|H(f)|^2$ del sistema

IN GENERALE IL TEOREMA DI PARSEVAL PER LE FUNZIONI REALI SI SCRIVE COME

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,Y^*(f)\,df$$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

CALCOLIAMO L'ANTITRASFORMATA DELLA DENSITÀ SPETTRALE DI ENERGIA

$$\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau}\,df=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\,X^*(f)\,e^{j2\pi f\tau}\,df=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,x(t-\tau)\,dt$$

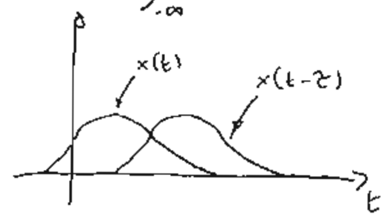
SI DEFINISCE

$$\boxed{R_x(\tau)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,x(t-\tau)\,dt}$$ FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

N.B! $R_x(\tau)$ REALE E PARI
$|X(f)|^2$ REALE E PARI

$$R_x(\tau)\leftrightarrow|X(f)|^2$$

CONSIDERANDO L'ESPRESSIONE $\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,x(t-\tau)\,d\tau$ SI FA IL PRODOTTO DI $x(t)$ PER LA FUNZIONE TRASLATA $x(t-\tau)$ E SE NE CALCOLA L'AREA



IMPORTANTE LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE FORNISCE UN'INFORMAZIONE SULLA RAPIDITÀ DI VARIAZIONE DEL SEGNALE.
IL NOME AUTOCORRELAZIONE SUGGERISCE IL FATTO CHE QUESTA FUNZIONE FORNISCE UN INDICE DI "SOMIGLIANZA" DELLA FUNZIONE CON SE STESSA, O MEGLIO CON UNA REPLICA DI SE STESSA TRASLATA

SI VERIFICA FACILMENTE CHE

$$E_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

ED INOLTRE CHE

$$R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$$ ← il segnale, come ovvio, è massimamente correlato per $\tau = 0$

DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA

I CONCETTI INTRODOTTI PER I SEGNALI AD ENERGIA FINITA POSSONO ESSERE GENERALIZZATI AL CASO DI SEGNALI A POTENZA FINITA ATTRAVERSO LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA

PER UN SEGNALE $x(t)$ PERIODICO DI PERIODO T_0 SI HA

$$R_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k \tau / T_0}$$

$$R_x(\tau) \Leftrightarrow |X_k|^2$$

LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA SI OTTIENE TRASFORMANDO $R_x(\tau)$:

$$S_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

LA POTENZA DI $x(t)$ COINCIDE CON $R_x(0)$:

$$P_x = R_x(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$$

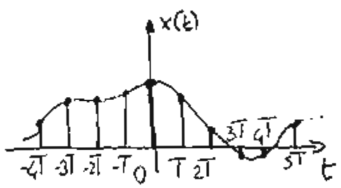
LEZIONE N.9 DEL 21/12/2004 AULA N11 8.15 - 9.15

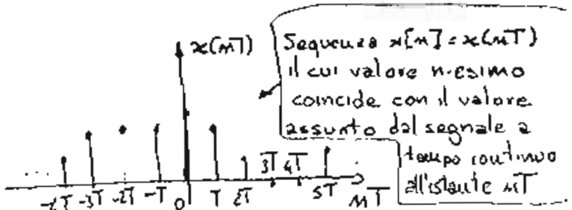
CAMPIONAMENTO DEI SEGNALI A TEMPO CONTINUO

LA CLASSIFICAZIONE DEI SEGNALI EFFETTUATA IN BASE AL TIPO DELLA VARIABILE INDIPENDENTE DEFINISCE UN SEGNALE DISCRETO COME UNA SUCCESSIONE x_n O SEQUENZA $x[n]$ DI NUMERI FUNZIONE DI VARIABILE INTERA RELATIVA n.

<u>CASO TIPICO</u>: IL SEGNALE TEMPO DISCRETO È OTTENUTO ATTRAVERSO UN'OPERAZIONE DI CAMPIONAMENTO

CAMPIONARE UN SEGNALE $x(t)$ SIGNIFICA "ESTRARRE" **DAL SEGNALE** STESSO I VALORI CHE ESSO ASSUME IN **ISTANTI DI TEMPO** EQUISPAZIATI, CIOÈ MULTIPLI DI UN INTERVALLO T DETTO PERIODO DI CAMPIONAMENTO.





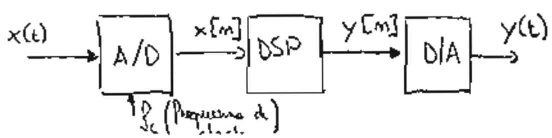
DAL PUNTO DI VISTA SIMBOLICO L'OPERAZIONE DI CAMPIONAMENTO SI RAPPRESENTA COME:

$$x(t) \xrightarrow[t = nT]{} x(nT)$$

LA CADENZA CON CUI L'INTERRUTTORE SI CHIUDE PRENDE IL NOME DI FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO

$$f_c = \frac{1}{T} \quad \left[\frac{\text{campioni}}{s}\right] \text{ o } [Hz]$$

IL CAMPIONAMENTO È UNA DELLE OPERAZIONI CHE VENGONO EFFETTUATE IN UN CONVERTITORE ANALOGICO / DIGITALE



$x(nT)$: numero reale

$x[n]$: rappresentazione finita di $x(nT)$ (aritmetica binaria)

LA CONDIZIONE DI NYQUIST E IL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

Considerando il campionamento di un segnale a tempo continuo $x(t)$:

$$x[n] = x(nT)$$

si vogliono determinare quali sono le conseguenze in AMBITO FREQUENZIALE della relazione valida in ambito temporale. Si indica con $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$

Si considera il segnale tempo continuo $x_c(t)$ ricavato moltiplicando il segnale $x(t)$ per una sequenza d'impulsi ad area unitaria spaziati tra loro uniformemente a passo T:

$$x_c(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t - nT)$$

L'OPERAZIONE APPENA INTRODOTTA PRENDE IL NOME DI <u>CAMPIONAMENTO IDEALE DI UN SEGNALE A TEMPO CONTINUO E IL SEGNALE $x_c(t)$ VIENE DETTO SEGNALE CAMPIONATO IDEALMENTE.</u>

N.B! $x_c(t)$ è ancora un segnale tempo continuo costituito da impulsi con diversa area equispaziati nel tempo.

LA TRASFORMATA DI FOURIER DEL SEGNALE $x_c(t)$ È

$$X_c(f) = \mathcal{F}[x_c(t)] = X(f) * \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right]$$

Si osserva che il segnale $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ è periodico di periodo $T \Rightarrow$ sviluppabile in serie di Fourier

SI DETERMINANO I COEFFICIENTI DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER DEL TRENO D'IMPULSI

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)}_{\text{L'unico termine che dà un contributo} \neq 0 \text{ è l'impulso nell'origine}} e^{-j2\pi \frac{kt}{T}}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-j2\pi\frac{kt}{T}}\,dt = \frac{1}{T}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\frac{kt}{T}}$$

Ma

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi k}{T}} \longleftrightarrow \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT) \longleftrightarrow \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

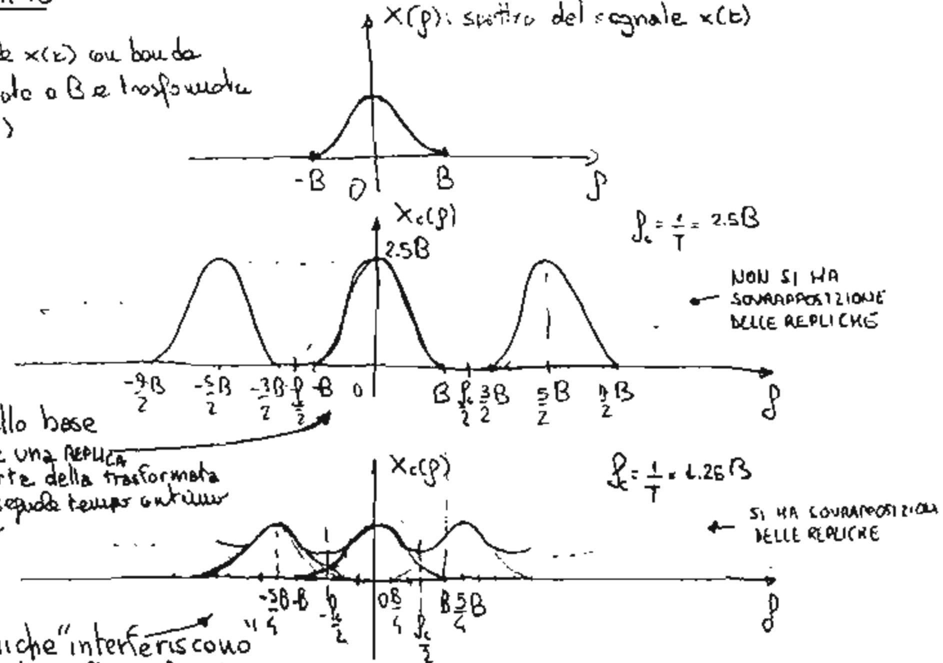
Si ottiene quindi

$$X_c(f) = X(f) * \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{m}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f-\frac{m}{T}\right)$$

Questa relazione mostra che la trasformata di Fourier di una sequenza ottenuta per campionamento si ricava come periodicizzazione della trasformata di Fourier del segnale analogico di partenza, con un periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{T}$.

ESEMPIO

Segnale x(t) con banda limitata a B e trasformata X(f)



L'intervallo base contiene una replica non distorta della trasformata X(f) del segnale tempo continuo originario

Le repliche "interferiscono" sommandosi alla replica base

ERRORE DI ALIASING CREATO DALLE REPLICHE (ALIAS) DELLO SPETTRO BASE

Per un segnale a banda limitata è possibile trovare una condizione che garantisce assenza di aliasing.

$$B \le \frac{1}{2T}$$

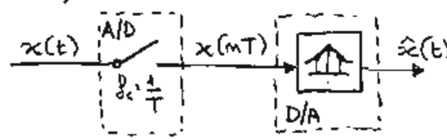
Data la banda del segnale B la frequenza di campionamento deve essere scelta in modo che valga la

$$\boxed{f_c = \frac{1}{T} \ge 2B}$$ CONDIZIONE DI NYQUIST

Per l'esempio visto la condizione di Nyquist è soddisfatta quando $f_c = 2.5B$ (l'intervallo base contiene una replica indistorta di X(f)) mentre non lo è per $f_c = 1.25B < 2B$.

Si vuole prendere in considerazione il problema della ricostruzione del segnale x(t) a partire dalla conoscenza dei suoi campioni.

Il dispositivo che effettua tale operazione è detto INTERPOLATORE. Lo schema di un sistema che effettua in pratica il campionamento del segnale e la successiva interpolazione, senza alcuna operazione intermedia è:

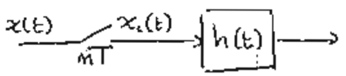


L'operazione svolta dall'interpolatore viene rappresentata come:

$$\boxed{\hat{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT)\,h(t-mT)}$$ FORMULA INTERPOLANTE

Dove si è indicato con $\hat{x}(t)$ il segnale ricostruito. Ogni campione x(mT) va a pesare una funzione h(t) traslata intorno alla posizione del campione stesso.

N.B! LA FORMULA INTERPOLANTE SI PUÒ INTERPRETARE COME IL FILTRAGGIO DEL SEGNALE CAMPIONATO CON UN FILTRO AVENTE RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$. IL FILTRAGGIO CHE SI CONSIDERA È IL SEGUENTE:



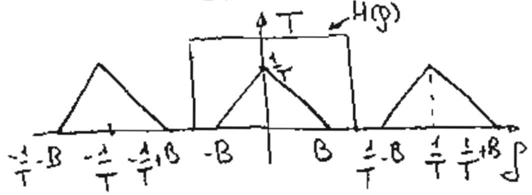
$$\hat{x}(t) = x_c(t) * h(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT)\, h(t-mT)$$

CI SI CHIEDE: ESISTE UNA FORMULA INTERPOLANTE CHE DIA RICOSTRUZIONE SENZA ERRORI?

PER RISPONDERE A QUESTA DOMANDA È CONVENIENTE OPERARE NEL DOMINIO DELLA f. L'OBBIETTIVO È QUELLO DI VEDERE SE È POSSIBILE SODDISFARE LA RELAZIONE:

$$X_c(f) \cdot H(f) = X(f)$$

Se $x(t)$ ha banda limitata B e la frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{T} \geq 2B$ esiste almeno un filtro che ricostruisce $x(t)$ evitando errori da spettro adiacente. Tale filtro è il PASSABASSO IDEALE con frequenza di taglio $\frac{1}{2T}$ (metà di f_c).



La risposta impulsiva del filtro è

$$h(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

e dunque vale la seguente formula interpolante

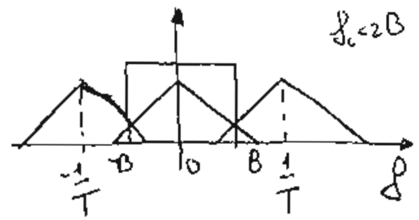
$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT}{T}\right)$$

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

Un segnale il cui spettro è limitato nella banda B può essere ricostruito esattamente a partire dai propri campioni, purché la frequenza di campionamento sia superiore a $2B$

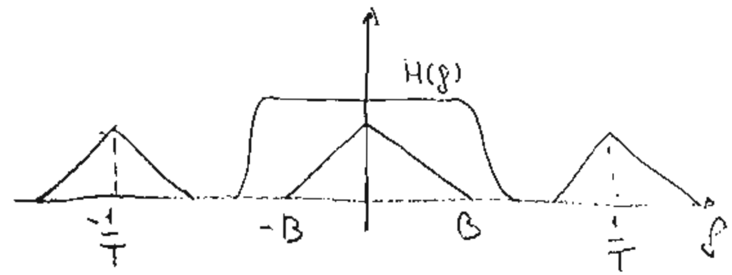
$f_c \geq 2B$ CONDIZIONE DI NYQUIST

Se non è soddisfatta la condizione di Nyquist si verifica che



← Si verifica il fenomeno dell'ALIASING: le componenti ad alta frequenza rientrano come componenti a bassa frequenza.

OSS. Il filtro passa-basso ideale non è realizzabile in pratica con un'approssimazione soddisfacente



$H(f)$ ha una transizione più graduale da banda passante a banda attenuata.

OSS. Analogamente si dimostra che il segnale periodico $y(t)$ ottenuto dalla periodicizzazione del un segnale aperiodico $x(t) \leftrightarrow X(f)$: $y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t-mT_0)$ ha trasformata di Fourier

$$Y(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

RICHIAMI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

NELL'EFFETTUAZIONE DI UN ESPERIMENTO ALEATORIO È CONVENIENTE ASSOCIARE AL RISULTATO UNA VARIABILE ALEATORIA, CIOÈ UNA QUANTITÀ NUMERICA VARIABILE A SECONDA DEL RISULTATO.

DEFINIZIONE FORMALE DI VARIABILE ALEATORIA

SI CONSIDERI UN ESPERIMENTO ALEATORIO AVENTE UNO SPAZIO CAMPIONE Ω, UNA LEGGE DI PROBABILITÀ $P(\cdot)$ E IN CUI GLI EVENTI SONO INDICATI CON ω_i.

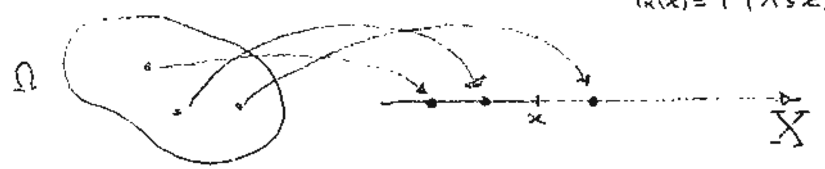
SI DEFINISCE VARIABILE ALEATORIA $X(\omega_i)$, LA CORRISPONDENZA CHE ASSOCIA A CIASCUN RISULTATO ω_i DELL'ESPERIMENTO UN UNICO NUMERO REALE

SI PARLA DI VARIABILE ALEATORIA:

- CONTINUA: QUANDO $X(\omega_i)$ PUÒ ASSUMERE UN QUALSIASI VALORE REALE (I RISULTATI POSSIBILI SONO IN NUMERO INFINITO).
  Esempio. misura con uno strumento avente una certa precisione.
  In questo caso ripetendo la misura (esperimento) si ottengono risultati diversi in modo aleatorio
- DISCRETA: QUANDO I POSSIBILI RISULTATI ω_i SONO IN NUMERO FINITO.
  Esempio. lancio dado.

IL COMPORTAMENTO STATISTICO DI UNA VARIABILE ALEATORIA X (si omette d'ora in poi la dipendenza dal risultato dell'esperimento) È COMPLETAMENTE DESCRITTO DALLA FUNZIONE DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

$$F_x(x) \triangleq P(X \le x)$$



UNA DESCRIZIONE ALTERNATIVA DI UNA VARIABILE ALEATORIA X È DATA DALLA FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \Rightarrow F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)\,du$$

PROPRIETÀ DI $f_x(x)$

- $f_x(x) \ge 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

ATTRAVERSO L'USO DI $f_x(x)$ È FACILE CALCOLARE LA PROBABILITÀ CHE LA VARIABILE ALEATORIA X ASSUMA UN VALORE COMPRESO IN UN INTERVALLO (a,b)

$$P(a < X \le b) = P(x \le b) - P(x \le a) = F_x(b) - F_x(a) = \int_a^b f_x(x)\,dx$$

OSS. PER UNA VARIABILE ALEATORIA DISCRETA LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ È

$$f_x(x) = \sum_{i=1}^{M} P(x_i)\,\delta(x - x_i)$$

M: numero eventi discreti
$P(x_i)$: probabilità di ottenere il valore x_i

MEDIA E MOMENTI STATISTICI

PER UNA VARIABILE CASUALE X LA CONOSCENZA DI $f_x(x)$ RAPPRESENTA IL MASSIMO DELL'INFORMAZIONE CHE SI PUÒ AVERE SUL COMPORTAMENTO STATISTICO DEI SUOI VALORI.

IN MOLTE APPLICAZIONI INTERESSA DETERMINARE IL VALORE MEDIO DI UNA VARIABILE CASUALE O DI UNA SUA FUNZIONE.

VALOR MEDIO

PER UNA VARIABILE CASUALE X IL VALOR MEDIO m_x, DETTO ANCHE VALORE ATTESO $E\{X\}$ O MOMENTO DEL I ORDINE È DEFINITO COME

$$m_x = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

INDICANDO CON $Y=h(X)$ UNA FUNZIONE DELLA VARIABILE ALEATORIA X SI OTTIENE CHE IL VALOR MEDIO DI Y È PARI A:

$$m_y = E\{Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,dx$$

PER UNA VARIABILE ALEATORIA X DISCRETA IL VALOR MEDIO È PARI A:

$$m_x = \sum_{i=1}^{M} x_i P(x_i)$$

MENTRE PER UNA SUA FUNZIONE $Y=h(X)$ È

$$m_y = \sum_{i=1}^{M} h(x_i) P(x_i)$$

OSS: LA DESCRIZIONE DEL COMPORTAMENTO DI UNA VARIABILE ALEATORIA ATTRAVERSO IL SUO VALORE MEDIO È LIMITATIVA.

SI INTRODUCE IL CONCETTO DI

VARIANZA

$$\sigma_x^2 = E\{(x-m_x)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 f(x)\,dx$$

Sviluppando il quadrato si ottiene

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2m_x x + m_x^2) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - m_x^2$$

Si definisce VALORE QUADRATICO MEDIO (o POTENZA MEDIA STATISTICA) le quantità

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

LA VARIANZA È DUNQUE PARI A:

$$\sigma_x^2 = E\{X^2\} - m_x^2$$

NOTA: $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ è detta DEVIAZIONE STANDARD (o SCARTO QUADRATICO MEDIO) e rappresenta una misura della dispersione, rispetto al valor medio, dei valori assunti da X.

Una delle distribuzioni più importanti che si incontra nello studio dei sistemi di comunicazione è quella gaussiana.

VARIABILE ALEATORIA GAUSSIANA

Una variabile aleatoria gaussiana con media m_x e varianza σ_x^2 è caratterizzata dalla seguente densità di probabilità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

La funzione distribuzione di probabilità è data da:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\,du$$

La soluzione dell'integrale non è esprimibile in forma chiusa.. In genere viene espressa attraverso l'impiego della funzione

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

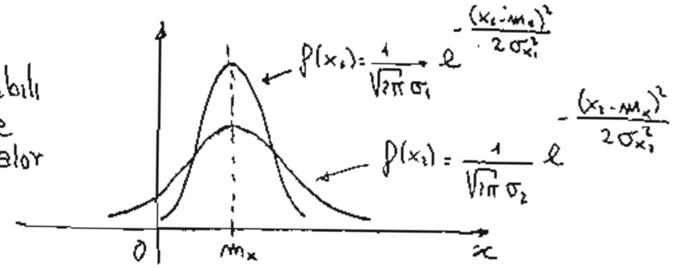
Si ottiene

$$F(x) = 1 - Q\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)$$

NB! I VALORI CHE ASSUME $Q(x)$ SI TROVANO TABULATI

Es: $f(x)$ gaussiane

x_1 e x_2 sono variabili aleatorie gaussiane aventi lo stesso valor medio m_x e deviazioni standard $\sigma_{x_2} > \sigma_{x_1}$



OSS1. UNA VARIABILE ALEATORIA GAUSSIANA X È COMPLETAMENTE DESCRITTA DA m_x E σ

OSS.2

$$P(m_x - 3\sigma_x < X \leq m_x + 3\sigma_x) = \int_{m_x-3\sigma_x}^{m_x+3\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\,dx \simeq 0.997 \Leftarrow$$

in prima approssimazione si può dire che la gaussiana si estende da $m_x - 3\sigma_x$ a $m_x + 3\sigma_x$

SISTEMI DI VARIABILI ALEATORIE

NELLO STUDIO DI UN ESPERIMENTO ALEATORIO PUÒ ESSERE UTILE ASSOCIARE UNA COPPIA DI NUMERI REALI (x,y) AI RISULTATI DELL'ESPERIMENTO STESSO. IN QUESTA SITUAZIONE OLTRE ALLA CARATTERIZZAZIONE DELLE SINGOLE VARIABILI ALEATORIE CON $F_X(x)$ E $F_Y(y)$ INTERESSA UNA CARATTERIZZAZIONE CONGIUNTA DEL COMPORTAMENTO DELLE 2 VARIABILI ALEATORIE.

NEL CASO IN CUI, AD ESEMPIO, LE VARIABILI ALEATORIE SONO IL PESO E L'ALTEZZA DI UNA PERSONA, SARÀ IMPROBABILE TROVARE UNA PERSONA MOLTO ALTA E CONGIUNTAMENTE MOLTO LEGGERA. IN QUESTO CASO VI È UN'INTERFERENZA RECIPROCA TRA I VALORI ASSUNTI DALLE 2 VARIABILI ALEATORIE CHE NON PUÒ ESSERE DESCRITTA SEPARATAMENTE ATTRAVERSO $F_X(x)$ E $F_Y(y)$.

Data la coppia (X,Y) si definisce la FUNZIONE DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ CONGIUNTA

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

La sua derivata parziale rispetto a X e Y fornisce la DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONGIUNTA

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

IN GENERALE PER UN SISTEMA DI N VARIABILI ALEATORIE SI AVRÀ $f(x_1, x_2, \ldots x_N)$.

CORRELAZIONE

In modo analogo a quanto visto per una singola variabile aleatoria, per una coppia (X,Y) di variabili aleatorie è possibile determinare un INDICE STATISTICO che fornisce indicazioni utili per la comprensione del comportamento statistico congiunto. Tale indice è detto CORRELAZIONE ed è definito come

$$r_{xy} = E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\,f(x,y)\,dx\,dy$$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Le definizioni di $F(x,y)$ e $f(x,y)$ derivano dal concetto di probabilità congiunta $P(A,B)$. In modo analogo dalla proprietà

$$P(A,B) = P(B|A)\,P(A)$$

si ottiene la definizione di DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$f(x,y) = f(y|x)\,f(x)$$

QUANDO X E Y SONO INDIPENDENTI $f(y|x) = f(y) \Rightarrow f(x,y) = f(y)f(x)$

SOMMA DI VARIABILI ALEATORIE

SI VOGLIONO CONSIDERARE ALCUNE PROPRIETÀ DELLA VARIABILE ALEATORIA

$$Z = X + Y$$

DOVE X E Y SONO VARIABILI ALEATORIE AVENTI DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONGIUNTA $f(x,y)$.

È immediato mostrare che

$$m_Z = m_X + m_Y$$

NEL CASO IN CUI X E Y SONO INDIPENDENTI, $f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$

1) $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ ← varianza di Z è pari alla somma delle varianze di X e Y

2) $f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z)$ ← la densità di probabilità di Z è ottenuta dalla convoluzione delle densità di probabilità di X e Y

NB! LE PROPRIETÀ VISTE PER LA SOMMA DI 2 VARIABILI ALEATORIE POSSONO ESSERE GENERALIZZATE AL CASO DI SOMMA DI N VARIABILI ALEATORIE

$$Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

In questa situazione è importante osservare che per N molto grande e variabili aleatorie X_i indipendenti $f(z)$ è prossima alla gaussiana, indipendentemente dalle singole densità!

PROCESSI ALEATORI

NEI SISTEMI DI COMUNICAZIONE SI INCONTRANO 2 TIPI DI SEGNALI: DETERMINATI E ALEATORI.
NELLA TRATTAZIONE SVOLTA FINO AD ORA SI SONO CONSIDERATI I SOLI SEGNALI DETERMINATI. È IMPORTANTE SOTTOLINEARE IL CONCETTO CHE LE FORME D'ONDA PORTATRICI D'INFORMAZIONE NON POSSONO ESSERE SPECIFICATE PER MEZZO DI UNA SEMPLICE FUNZIONE DEL TEMPO MA DEVONO ESSERE DESCRITTE ATTRAVERSO METODI PROBABILISTICI

ESEMPIO: MISURA DELLA TENSIONE ALL'USCITA DI UN GENERATORE IDEALE

Nell'effettuare la misura non è possibile avere la certezza assoluta del valore che assumerà il risultato dell'esperimento. A PRIORI si può dare solo il grado di certezza relativo al fatto che la tensione misurata sarà compresa nell'intorno di un certo valore. In questo caso si sta fornendo una DESCRIZIONE STATISTICA del parametro tensione.

UNO DEI PUNTI CHIAVE NELL'ANALISI STATISTICA DI UN SISTEMA DI COMUNICAZIONE È RAPPRESENTATO DALLA CARATTERIZZAZIONE DEI SEGNALI ALEATORI COME LA VOCE, IL SEGNALE TELEVISIVO, IL RUMORE TERMICO, I SEGNALI DIGITALI, ...

La caratterizzazione di un segnale aleatorio viene effettuata attraverso la teoria dei processi aleatori. Si vogliono introdurre sinteticamente i concetti basilari dei processi aleatori.

PROPRIETÀ DEI SEGNALI ALEATORI

1) Sono funzioni di t
2) Sono descritti associando ad ogni risultato ω_i dello spazio campione Ω una funzione $x_i(t)$. Lo spazio campione di tutte queste funzioni è detto PROCESSO ALEATORIO.

ESEMPIO. Rumore termico

Il termine RUMORE viene solitamente impiegato per designare segnali aleatori che tendono a disturbare la trasmissione e l'elaborazione dei segnali nei sistemi di comunicazione e sui quali non si può operare nessun controllo.

Il rumore termico è generato dall'agitazione termica degli elettroni nei mezzi conduttori. Un comune resistore per il fatto di trovarsi ad una certa temperatura genera una debole tensione di rumore $x_n(t)$. Quanto più elevata sarà la temperatura a cui si trova il componente, tanto più elevata sarà l'agitazione termica e di conseguenza la tensione generata dal resistore

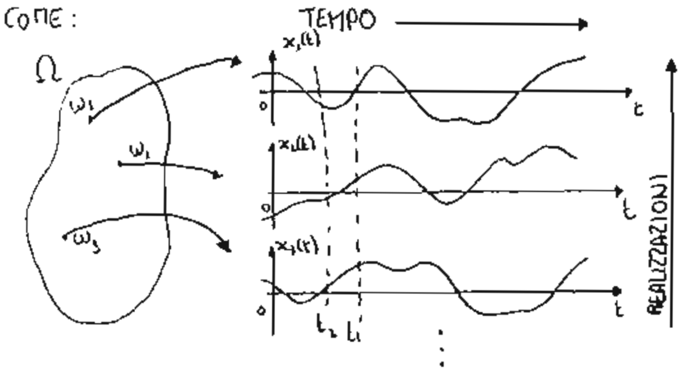
LA POTENZA DELLA TENSIONE DI RUMORE AI CAPI DI UN RESISTORE R A TEMPERATURA T, MISURATA IN UNA BANDA Δf, È PARI A

$$P_{x_n} = 4kTR\Delta f \quad [V^2]$$

$k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K (costante di Boltzmann)

OSS. Si noti che P_{x_n} è da intendersi come potenza della variabile aleatoria tensione e quindi le sue dimensioni sono V^2.

L'ASSOCIAZIONE TRA LE TENSIONI MISURATE AI CAPI DI DIVERSI RESISTORI ALLA MEDESIMA TEMPERATURA T E IL PROCESSO ALEATORIO RUMORE TERMICO È RAPPRESENTATO COME:



REALIZZAZIONI DEL PROCESSO ALEATORIO (sono i segnali deterministici associati ai risultati dell'esperimento aleatorio che sono effettivamente osservati)

Le realizzazioni del processo aleatorio hanno caratteristiche simili ma sono tutte diverse tra loro poiché gli elettroni si muovono in modo indipendente nei diversi resistori.

N.B! IL PROCESSO ALEATORIO È DEFINITO IN 2 DIMENSIONI: QUELLA TEMPORALE E QUELLA DELLE REALIZZAZIONI (DETTA ANCHE DIMENSIONE "D'INSIEME")

IL PROCESSO ALEATORIO VIENE INDICATO CON $X(t)$

Se l'obiettivo è quello di determinare l'effetto prodotto dal rumore termico in un'apparecchiatura elettronica presente in un sistema di trasmissione, è utile conoscere quali sono le sue CARATTERISTICHE che sono COMUNI a tutte le realizzazioni

SI PUÒ OSSERVARE CHE I VALORI ASSUNTI DALLE REALIZZAZIONI DEL PROCESSO IN UN ISTANTE $t=t_1$ SONO ALEATORI

$\Downarrow$

IL PROCESSO ALEATORIO $X(t)$ IN UN DATO ISTANTE $t=t_1$ È UNA VARIABILE ALEATORIA

$\Downarrow$

Il suo comportamento può essere descritto attraverso la DENSITÀ DI PROBABILITÀ $f_{X_t}(x)$ DELLE AMPIEZZE del processo

OSS. LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DELLE AMPIEZZE $f_{X_t}(x)$ È IN GENERALE UNA FUNZIONE DI t POICHÉ LE PROPRIETÀ STATISTICHE DELLA VARIABILE ALEATORIA ESTRATTA DAL PROCESSO CAMBIANO AL VARIARE DI t. NELLA NOSTRA TRATTAZIONE SI PRENDERANNO IN CONSIDERAZIONE SOLO I PROCESSI ALEATORI STAZIONARI, PER I QUALI CIOÈ LE CARATTERISTICHE STATISTICHE NON DIPENDONO DA t

Poiché t è una variabile reale continua, il processo aleatorio $X(t)$ è visto come una collezione di ∞ variabili aleatorie

$\Downarrow$

La sua DESCRIZIONE STATISTICA COMPLETA è data dalla densità di probabilità congiunta di ordine ∞. Poiché tale descrizione è difficile da ottenere si ricorre all'uso di INDICI STATISTICI SEMPLIFICATI

- VALOR MEDIO DEL PROCESSO

$$m_x \triangleq E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

← Si è omessa la dipendenza da t poiché si considerano solo i processi aleatori stazionari

- VALORE QUADRATICO MEDIO (O POTENZA MEDIA STATISTICA) DEL PROCESSO

$$P_x \triangleq E\{X^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

← per i segnali aleatori è l'analogo della potenza media dei segnali deterministici

- VARIANZA DEL PROCESSO

$$\sigma_x^2 \triangleq E\{(X(t)-m_x)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - m_x^2$$

- FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$R_x(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2$$

N.B! Per i processi stazionari la funzione di autocorrelazione dipende solo dalla differenza temporale $\tau = t_1 - t_2$ e si indica come

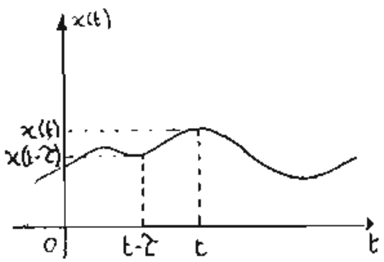
$$R_x(\tau) = E\{X(t-\tau)X(t)\}$$

SIGNIFICATO FISICO DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DESCRIVE QUANTITATIVAMENTE IL LEGAME TRA IL VALORE ASSUNTO DAL PROCESSO ALEATORIO IN UN DATO ISTANTE E QUELLO ASSUNTO IN UN ISTANTE A DISTANZA τ

PER COMPRENDERE IL **SIGNIFICATO FISICO** DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE SI CONSIDERINO 2 PROCESSI ALEATORI $X(t)$ E $Y(t)$ AVENTI LE STESSE DENSITÀ DI PROBABILITÀ $p(x) = p(y)$ ($\Rightarrow m_x = m_y$ e $P_x = P_y$).

SI CONFRONTINO LE REGISTRAZIONI DI UNA REALIZZAZIONE DEI PROCESSI



Il processo $X(t)$ ha realizzazioni che variano lentamente nel tempo

⇩

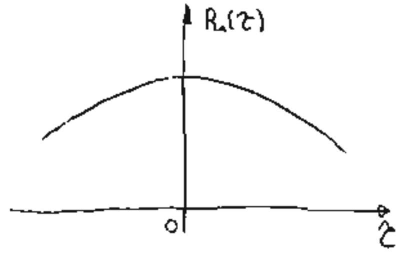
Il valore $x(t)$ assunto da una realizzazione in t è solitamente poco diverso dal valore $x(t-\tau)$ assunto in $t-\tau$

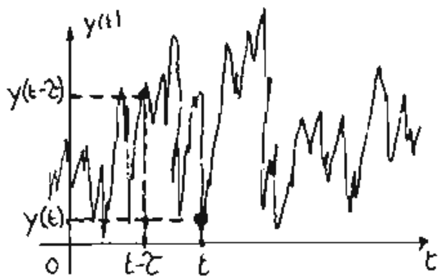
⇩

I valori sono molto correlati

⇩

La funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ decresce molto lentamente





Il processo $Y(t)$ ha realizzazioni che variano velocemente nel tempo

⇩

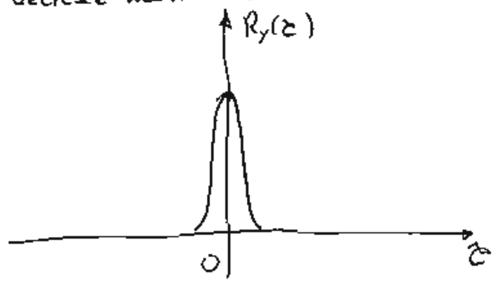
Il valore $y(t)$ assunto da una realizzazione in t è solitamente molto diverso dal valore $y(t-\tau)$ assunto in $t-\tau$.

⇩

I valori sono poco correlati

⇩

La funzione di autocorrelazione $R_y(\tau)$ decresce molto velocemente



PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

- $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ SIMMETRIA COMPLESSA CONIUGATA
- $R_x(0) = P_x = E\{X^2(t)\} \geq 0$ IL VALORE DELL'ORIGINE DELL'AUTOCORRELAZIONE COINCIDE CON LA POTENZA MEDIA STATISTICA DEL PROCESSO
- $R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$

PROCESSI ALEATORI ERGODICI

NELLE DEFINIZIONI DI VALOR MEDIO, POTENZA E AUTOCORRELAZIONE È PREVISTA UNA OPERAZIONE DI VALOR MEDIO RELATIVAMENTE A TUTTE LE REALIZZAZIONI DEL PROCESSO.

Se si considera ad esempio il valor medio statistico m_x di un processo aleatorio $X(t)$ in un istante t_k, esso corrisponde al valor medio della variabile aleatoria $X(t_k)$ che descrive tutti i possibili valori delle realizzazioni del processo osservate nell'istante t_k.

Per calcolare tale valor medio è necessario CONOSCERE le densità di probabilità del processo

IN GENERALE LE DENSITÀ DI PROBABILITÀ NON SONO NOTE

MOLTO SPESSO DI UN DATO PROCESSO SI OSSERVA UNA SOLA REALIZZAZIONE.

PER QUESTA REALIZZAZIONE È POSSIBILE EFFETTUARE SOLO MEDIE TEMPORALI

ES Si abbia un processo casuale stazionario $X(t)$ di cui si conosce una realizzazione $x(t)$. Si definisce VALOR MEDIO TEMPORALE del processo il valore μ_x dato dalla relazione

$$\mu_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

L'AUTOCORRELAZIONE TEMPORALE è definita come:

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t-\tau)\,x(t)\,dt$$

SIAMO INTERESSATI A LEGARE MEDIE TEMPORALI E MEDIE STATISTICHE (O D'INSIEME) ED IN PARTICOLARE A CAPIRE SE LE MEDIE TEMPORALI RAPPRESENTANO UN MEZZO PRATICO PER STIMARE LE MEDIE STATISTICHE DEL PROCESSO.

$$\Downarrow$$

PER UN PROCESSO ERGODICO SI VERIFICA CHE LE MEDIE TEMPORALI COINCIDONO CON QUELLE STATISTICHE

ERGODICO IN MEDIA $\Rightarrow$ $\boxed{\mu_x = E\{X(t)\}}$

ERGODICO PER L'AUTOCORRELAZIONE $\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{R}_x(\tau) = E\{X(t-\tau)X(t)\}}$

OSS. È sempre vero che per un processo stazionario

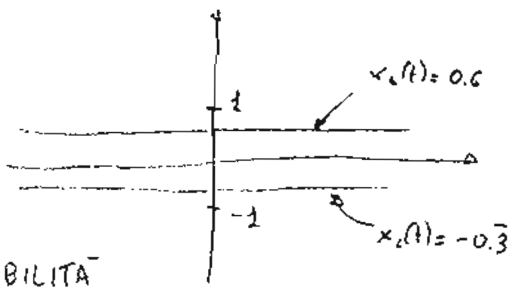
$$m_x = E\{\mu_x\}$$

$$R_x(\tau) = E\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$$

IL RUMORE TERMICO È UN ESEMPIO DI PROCESSO ERGODICO!

ESEMPIO

Si consideri il processo aleatorio $x(t) = A$ dove A è un v.a. uniforme nell'intervallo $[-1, 1]$.



IL PROCESSO ALEATORIO È STAZIONARIO NELLA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DELL'AMPIEZZA: COMUNQUE SI FISSI UN ISTANTE DI TEMPO LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ RISULTANTE È LA STESSA. $f_{X_t}(x) = f_A(a)$

IL PROCESSO NON È ERGODICO IN MEDIA!

DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA

NEL TRATTARE I PROCESSI ALEATORI (SOPRATTUTTO NELLE SITUAZIONI IN CUI SI EFFETTUANO DEI FILTRAGGI) CONVIENE RICORRERE AD UNA CARATTERIZZAZIONE FREQUENZIALE. SI DEFINISCE DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI UN PROCESSO ALEATORIO STAZIONARIO $X(t)$ LA TRASFORMATA DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE $R_x(\tau)$

$$\boxed{S_x(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau}$$

SI È GIÀ AVUTO MODO DI DIRE CHE LA POTENZA MEDIA DEL PROCESSO È $P_x = R_x(0)$. PER LE PROPRIETÀ DELLE TRASFORMATE SI OTTIENE CHE:

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\, df$$

$$\Downarrow$$

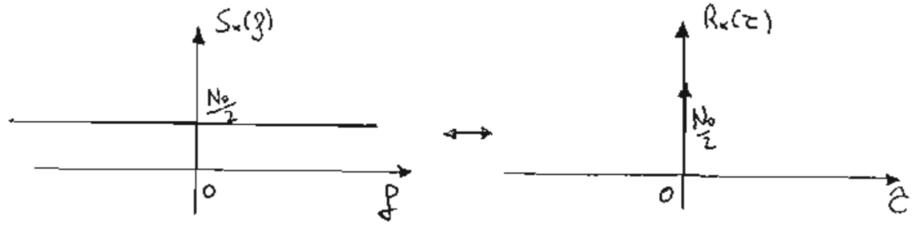
L'AREA DELLA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA COINCIDE CON LA POTENZA MEDIA DEL PROCESSO

OSS. È ovvio che le realizzazioni di un processo aleatorio sono segnali a potenza finita. Questo è il motivo per cui si considera la densità spettrale di potenza

È VISTO CHE NEL DOMINIO TEMPORALE LA DURATA DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DÀ UN'INDICAZIONE DELLA RAPIDITÀ DI VARIAZIONE MEDIA DELLE REALIZZAZIONI DI UN PROCESSO ALEATORIO.

PER IL LEGAME TRA LA DURATA TEMPORALE DI UN SEGNALE E LA SUA BANDA NELLE FREQUENZE QUESTO SIGNIFICA CHE TANTO MAGGIORE SARÀ LA RAPIDITÀ DI VARIAZIONE TANTO PIÙ GRANDE SARÀ LA BANDA DEL SUO SPETTRO DI POTENZA

La situazione limite che si può considerare è quella in cui si ha un processo aleatorio con una densità spettrale di potenza COSTANTE



$$S_x(f) = \frac{N_0}{2} \longleftrightarrow R_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau)$$

UN PROCESSO ALEATORIO CHE PRESENTA QUESTE CARATTERISTICHE È DETTO PROCESSO DI RUMORE BIANCO (per l'analogia con lo spettro della luce bianca che contiene componenti alla stessa ampiezza per tutte le freq.)

OSS. AVERE UN'AUTOCORRELAZIONE IMPULSIVA SIGNIFICA CHE IL VALORE $X(t)$ ASSUNTO DAL PROCESSO NELL'ISTANTE t NON È IN ALCUN MODO PREDICIBILE DAL VALORE $X(t-\tau)$ ASSUNTO DAL PROCESSO NELL'ISTANTE $t-\tau$: IL PROCESSO VARIA IN MODO INFINITAMENTE RAPIDO

NB Un processo bianco è solo un'astrazione matematica (spettro costante $\Rightarrow$ potenza infinita = condizione impossibile per un segnale fisico)

IL RUMORE TERMICO PUÒ ESSERE CONSIDERATO ALLA STREGUA DI UN PROCESSO DI RUMORE BIANCO. INFATTI LA SUA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA È PARI A

$$S_N(f) = 2KTR \quad \text{per } f \ll \frac{KT}{h} = f_0$$

$h = 6.62 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$ (costante di Planck)

Alla temperatura ambiente ($17°C \Rightarrow 290\,K$) si ottiene

$$f_0 = \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 290}{6.62 \cdot 10^{-34}} = 6.05 \cdot 10^{12} = 6.05\ THz$$

FILTRAGGIO DI UN PROCESSO ALEATORIO A TEMPO CONTINUO

SI VUOLE CONSIDERARE L'APPLICAZIONE DI UN GENERICO PROCESSO ALEATORIO $X(t)$ STAZIONARIO IN INGRESSO AD UN SLS CARATTERIZZATO DA UNA RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t) = X(t) * h(t)$$

IL SEGNALE D'USCITA $Y(t)$ È IL NUOVO PROCESSO ALEATORIO LE CUI REALIZZAZIONI SONO OTTENUTE COME CONVOLUZIONE DELLE REALIZZAZIONI DI $X(t)$ CON LA RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$.

IL PROBLEMA DI RICAVARE LE DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONGIUNTE DEL PROCESSO D'USCITA A PARTIRE DA QUELLE DEL PROCESSO D'INGRESSO È, SALVO CASI PARTICOLARI, INSOLUBILE: CI SI ACCONTENTA DI RICAVARE IL VALOR MEDIO E LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DI $Y(t)$ SUPPONENDO DI CONOSCERE m_x E $R_x(\tau)$.

SIA $x(t)$ UNA REALIZZAZIONE DEL PROCESSO ALEATORIO STAZIONARIO $X(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha$$

IL VALOR MEDIO DI $Y(t)$ È:

$$m_y = E\{y(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t-\alpha)\} h(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} m_x h(\alpha) d\alpha$$

$$= m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) d\alpha = m_x \cdot H(0) \Rightarrow \boxed{m_y = m_x \cdot H(0)}$$

L'AUTOCORRELAZIONE DI $Y(t)$ È:

$$R_y(\tau) = E\{y(t-\tau) y(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau-\alpha) h(\alpha) d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\beta) h(\beta) d\beta\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t-\tau-\alpha)\, x(t-\beta)\} h(\alpha) h(\beta) d\alpha d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau+\beta-\alpha) h(\alpha) h(\beta) d\alpha d\beta = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$\boxed{R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \iff S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2}$$

OSS. Si è già avuto modo di dire che il rumore termico è dovuto all'agitazione termica degli elettroni nei mezzi conduttori. Poiché il numero di elettroni in un resistore è molto grande, l'ampiezza della tensione di rumore risulta essere una variabile aleatoria GAUSSIANA.

UN PROCESSO ALEATORIO CHE HA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DELLE AMPIEZZE GAUSSIANA È DETTO PROCESSO GAUSSIANO

La densità di probabilità di un processo gaussiano stazionario $X(t)$ con valor medio m_x e varianza σ_x^2 ha la seguente espressione

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

OSS. NEL CASO DI RUMORE TERMICO $m_x = 0$!

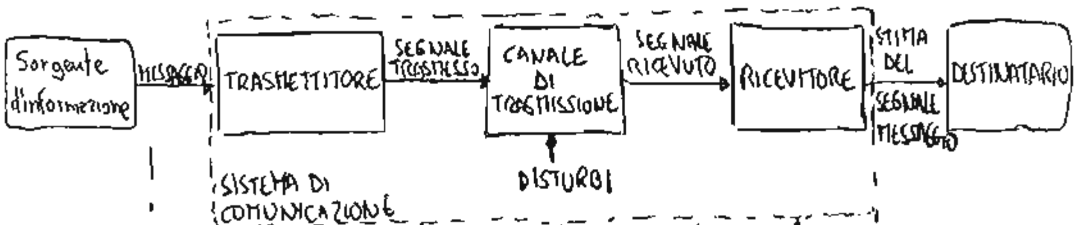
UN'IMPORTANTISSIMA PROPRIETÀ DEI PROCESSI GAUSSIANI È LA SEGUENTE: SE UN PROCESSO GAUSSIANO $X(t)$ È APPLICATO ALL'INGRESSO DI UN SLS SI VERIFICA CHE IL PROCESSO ALEATORIO $Y(t)$ SVILUPPATO ALL'USCITA DEL FILTRO È ANCORA GAUSSIANO

SEGNALI DIGITALI E TRASMISSIONE AD IMPULSI IN BANDA BASE

IL TERMINE COMUNICAZIONE VIENE IN GENERALE ASSOCIATO ALLA TRASMISSIONE D'INFORMAZIONE DA UN SISTEMA AD UN ALTRO, PIÙ O MENO DISTANTE, ATTRAVERSO UNA SUCCESSIONE DI PROCESSI CHE POSSONO ESSERE DESCRITTI COME SEGUE:

1) GENERAZIONE DI UN SEGNALE MESSAGGIO (voce, musica, dati, ...)
2) DESCRIZIONE DEL SEGNALE MESSAGGIO CON UNA CERTA MISURA DI PRECISIONE ATTRAVERSO UN INSIEME DI SIMBOLI (visuali, elettrici, uditivi, ...)
3) CODIFICA DEI SIMBOLI IN UNA FORMA ADATTA PER LA TRASMISSIONE SUL MEZZO FISICO D'INTERESSE (CANALE DI TRASMISSIONE)
4) TRASMISSIONE DEI SIMBOLI CODIFICATI ALLA DESTINAZIONE DESIDERATA
5) DECODIFICA E RIPRODUZIONE DEI SIMBOLI ORIGINALI
6) RICOSTRUZIONE DEL MESSAGGIO ORIGINALE, CON UN DEGRADO DI QUALITÀ DETERMINABILE (la degradazione è determinata da imperfezioni presenti nel sistema).

N.B! Indipendentemente dal tipo di processo di comunicazione considerato gli elementi base di un sistema di comunicazione sono: TRASMETTITORE, CANALE E RICEVITORE.



La sorgente può essere numerica o analogica

Il trasmettitore ha il compito di convertire il segnale messaggio prodotto dalla sorgente in una forma adatta per la trasmissione sul canale.

A causa delle imperfezioni presenti nel canale di trasmissione il segnale trasmesso viene distorto. Il rumore e i segnali interferenti (generati da altre sorgenti) si sommano al segnale desiderato all'uscita del canale: il segnale ricevuto è una versione distorta del

Il ricevitore ha il compito di elaborare il segnale ricevuto in modo da ricostruire una forma comprensibile del messaggio originale

IL SEGNALE TRASMESSO È CASUALE: LA SORGENTE D'INFORMAZIONE EMETTE DEI SIMBOLI SCELTI DAL SUO ALFABETO CHE NON SONO NOTI A PRIORI

⬇

LA DESCRIZIONE DELL'EMISSIONE DELLA SORGENTE AVVIENE ATTRAVERSO UN PROCESSO CASUALE CONTINUO O DISCRETO

TRASMISSIONE NUMERICA DI SEGNALI ANALOGICI

I MODERNI SISTEMI DI COMUNICAZIONE EFFETTUANO LA TRASMISSIONE DI SEGNALI NUMERICI (O DIGITALI). UN SEGNALE NUMERICO È DEFINITO COME UN SEGNALE DISCRETO NEL TEMPO CON AMPIEZZE DISCRETE.

Nel caso in cui la sorgente d'informazione è numerica, il segnale all'ingresso del trasmettitore è già in una forma adatta per essere trasmesso al destinatario attraverso il sistema di trasmissione digitale (Es: la sorgente è un computer che produce un file di testo in cui ogni carattere è codificato con una parola di n bit secondo lo standard ASCII)

La situazione è invece diversa nel caso in cui la sorgente d'informazione è analogica. IN QUESTO CASO PRIMA DI EFFETTUAR A TRASMISSIONE È NECESSARIO CONVERTIRE IL SEGNALE ANALOGICO N UN SEGNALE NUMERICO.

A TRASMISSIONE DI SEGNALI NUMERICI HA I SEGUENTI VANTAGGI:

- POSSIBILITÀ DI UTILIZZARE CIRCUITERIA DIGITALE A BASSO COSTO
- POSSIBILITÀ DI CIFRATURA DEI MESSAGGI PER PRESERVARE SEGRETEZZA O RISERVATEZZA
- OMOGENEIZZAZIONE DEI VARI TIPI DI SEGNALI (VOCE, VIDEO, DATI) IN UN FORMATO COMUNE
- MAGGIORE PROTEZIONE DAI DISTURBI

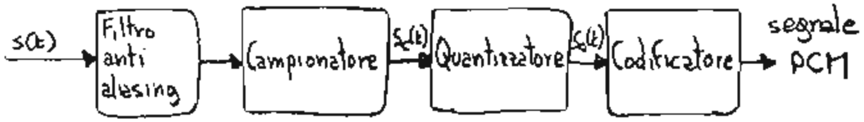
er effettuare la trasmissione in forma numerica di segnali analogici, il segnale leve essere sottoposto a conversione analogico digitale (ADC, Analog to Digital Conversion ale processo è spesso denominato "MODULAZIONE IMPULSIVA CODIFICATA" (PCM, Pulse Code Modulation

LA DENOMINAZIONE **MODULAZIONE IMPULSIVA** È RIFERITA AL FATTO CHE LA PRIMA OPERAZIONE CHE SI EFFETTUA NELLA CONVERSIONE ANALOGICO-DIGITALE COMPORTA LA RAPPRESENTAZIONE DEL SEGNALE ATTRAVERSO UNA SEQUENZA COSTITUITA DALLA RIPETIZIONE PERIODICA, CON INTERVALLO COSTANTE, DI UNA FORMA D'ONDA (IMPULSO) LA CUI AMPIEZZA È **MODULATA** DAI VALORI DEI CAMPIONI DEL SEGNALE. LA FREQUENZA DI RIPETIZIONE DELLA RISPOSTA IMPULSIVA È SCELTA IN ACCORDO AL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO.

MODULAZIONE IMPULSIVA CODIFICATA (PCM)

LA SEQUENZA DI OPERAZIONI CHE PERMETTE DI CONVERTIRE UN SEGNALE ANALOGICO IN SEGNALE PCM È LA SEGUENTE:

1) CAMPIONAMENTO
2) QUANTIZZAZIONE
3) CODIFICA



s(t): segnale analogico

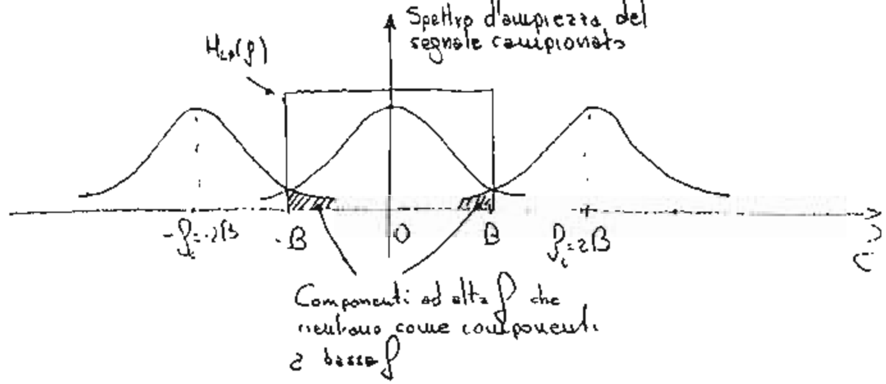
CAMPIONAMENTO

L'operazione di campionamento è effettuata in accordo al teorema del campionamento che presuppone che il segnale d'interesse sia strettamente limitato in banda!

NEI CASI PRATICI LO SPETTRO D'AMPIEZZA DEL SEGNALE NON È RIGOROSAMENTE A BANDA LIMITATA → SI VERIFICA IL FENOMENO DELL'ALIASING

B: banda nominale del segnale (è definita convenzionalmente con un criterio prestabilito)

$f_c = 2B$: frequenza di campionamento

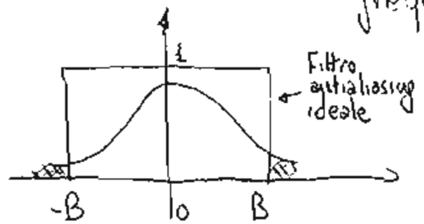


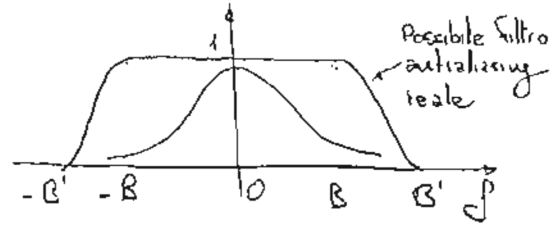
Le componenti alle alte frequenze del segnale sono riportate come componenti a bassa frequenza nello spettro del segnale ricostruito.

SI PUÒ OSSERVARE CHE NON È PIÙ POSSIBILE OTTENERE LO SPETTRO DEL SEGNALE ORIGINALE ATTRAVERSO UN FILTRAGGIO PASSA BASSO ⟹ LA PRESENZA DI ALIASING SI TRADUCE IN UNA DISTORSIONE SUL SEGNALE

Per contrastare gli effetti dell'aliasing si adottano 2 contromisure:

1) FILTRO ANTIALIASING: il segnale analogico originale viene filtrato con un filtro passabasso (filtro antialiasing) che attenua le componenti ad alta frequenza al di fuori della banda d'interesse





2) Si campiona il segnale filtrato con $f_c = 2B' > 2B$

IL SEGNALE ANALOGICO s(t) AVENTE BANDA NOMINALE B VIENE FILTRATO CON UN FILTRO ANTIALIAS E POI CAMPIONATO AD UNA FREQUENZA $f_c > 2B$

LE AMPIEZZE DEL SEGNALE CAMPIONATO $s_c(t)$ VARIANO IN MODO CONTINUO.

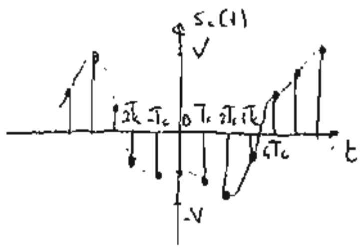
PER RENDERE NUMERICO IL SEGNALE OCCORRE DISCRETIZZARE ANCHE LE AMPIEZZE DEI CAMPIONI ATTRAVERSO UN'OPERAZIONE DI "QUANTIZZAZIONE"

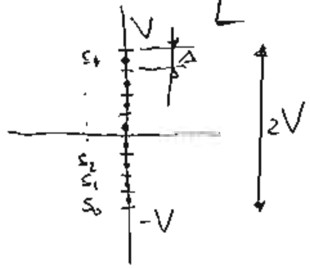
QUANTIZZAZIONE

I POSSIBILI VALORI (IN NUMERO ∞) DELL'AMPIEZZA DEI CAMPIONI VENGONO RIDOTTI AD UN NUMERO FINITO L DI LIVELLI. IL VALORE DI CIASCUN CAMPIONE VIENE APPROSSIMATO CON IL LIVELLO, TRA GLI L POSSIBILI, CHE GLI È PIÙ VICINO.

SI CONSIDERI UN PROCESSO ALEATORIO LA CUI AMPIEZZA PUÒ ASSUMERE UN VALORE CONTINUO NELL'INTERVALLO $[-V, V]$

SI PARLA DI QUANTIZZAZIONE UNIFORME SE L'INTERVALLO DI VARIAZIONE DELL'AMPIEZZA, COMPRESO TRA $-V$ E V, È SUDDIVISO IN INTERVALLI DI QUANTIZZAZIONE TUTTI UGUALI DI AMPIEZZA $\Delta = \frac{2V}{L}$.



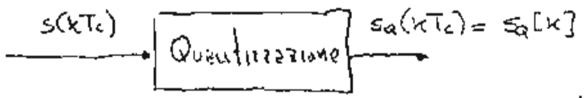


In questo caso $L = 8$

$\Downarrow$

Si hanno intervalli di quantizzazione di ampiezza $\frac{V}{4}$

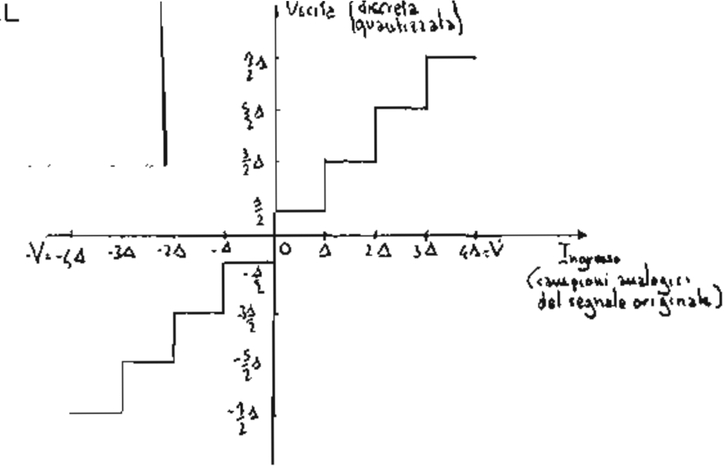
I valori s_i, con $i = 0, \ldots, 7$, rappresentano i possibili valori d'ampiezza discreta che il segnale quantizzato può assumere e corrispondono al punto medio degli 8 intervalli di quantizzazione



$s_Q[k]$ può assumere i valori $\{s_0, \ldots, s_{L-1}\}$ dove L è il numero di livelli di quantizzazione.

DAL PUNTO DI VISTA GRAFICO LA CARATTERISTICA INGRESSO-USCITA DEL QUANTIZZATORE È:

LEZIONE N 12 DEL
17/01/2005
AULA S18
13.15 ÷ 15.15



POICHÈ SI STA APPROSSIMANDO IL VALORE DEL CAMPIONE ANALOGICO CON UN NUMERO FINITO DI LIVELLI, SI INTRODUCE UN ERRORE NEL SEGNALE TRASMESSO.

L'ERRORE CHE S'INTRODUCE È DETTO "ERRORE DI QUANTIZZAZIONE" ED È DEFINITO COME LA DIFFERENZA TRA IL VALORE DEL SEGNALE ALL'USCITA DEL QUANTIZZATORE E IL VALORE DEL CAMPIONE DEL SEGNALE AL SUO INGRESSO

$$\varepsilon(kT_c) = s_Q(kT_c) - s(kT_c)$$

L'ERRORE DI QUANTIZZAZIONE HA VALORI D'AMPIEZZA COMPRESI NELL'INTERVALLO $\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$.

POICHÈ IL SEGNALE D'INGRESSO È ALEATORIO SI VERIFICA CHE L'ERRORE DI QUANTIZZAZIONE VARIA IN MODO CASUALE IN UN INTERVALLO DI AMPIEZZA Δ.

SE IL NUMERO DI LIVELLI L È ELEVATO (INTERVALLI DI AMPIEZZA MOLTO PICCOLA)

$\Downarrow$

ERRORE DI QUANTIZZAZIONE È UNA VARIABILE ALEATORIA CON DENSITÀ DI PROBABILITÀ UNIFORME NELL'INTERVALLO $\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{\Delta} \quad \text{per} \quad |\varepsilon| \le \frac{\Delta}{2}$$

IL VALOR MEDIO E LA POTENZA DELL'ERRORE DI QUANTIZZAZIONE SONO

$$m_Q = E\{\varepsilon\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon\, p(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \varepsilon \frac{1}{\Delta} d\varepsilon = \frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \varepsilon\, d\varepsilon = 0$$

$$P_Q = E\{\varepsilon^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 p(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \varepsilon^2 \frac{1}{\Delta} d\varepsilon = \frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{1}{\Delta}\left.\frac{\varepsilon^3}{3}\right|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta^2}{12}$$

IL VALORE Δ DA ASSEGNARE ALL'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO È UN PARAMETRO CONTROLLATO DAL PROGETTISTA

$\Downarrow$

La distorsione introdotta dall'errore di quantizzazione può essere controllata scegliendo Δ sufficientemente piccolo.

NELL'ESEMPIO VISTO $\Delta = \frac{2V}{L} \Rightarrow P_q = \frac{V^2}{3L^2}$

GLI EFFETTI DEL RUMORE DOVUTO ALLA QUANTIZZAZIONE POSSONO ESSERE QUANTIFICATI INTRODUCENDO IL CONCETTO DI RAPPORTO SEGNALE RUMORE DI QUANTIZZAZIONE (SNR_Q, SIGNAL-TO-NOISE RATIO) DEFINITO COME

$$SNR_Q = \frac{P_s}{P_Q} \qquad P_s\text{: potenza segnale}$$

NEL CASO IN CUI IL SEGNALE D'INGRESSO HA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DELLE AMPIEZZE UNIFORME NELL'INTERVALLO $[-V, V]$ LA SUA POTENZA SARÀ $P_s = V^2/3$

$$SNR_Q = \frac{V^2/3}{\Delta^2/12} = \frac{V^2/3}{4\frac{V^2}{L^2}\frac{1}{12}} = L^2$$

OSS.1 È consuetudine esprimere il rapporto segnale rumore in dB

PER SNR_Q SI OTTIENE

$$10\log_{10} SNR_Q = 10\log_{10}\frac{P_s}{P_Q} = 10\log_{10} L^2 = 20\log_{10} L$$

$\Downarrow$

Raddoppiando il numero di livelli L SNR_Q aumenta di 6 dB

$$20\log_{10} 2L = 20\log_{10} 2 + 20\log_{10} L = 6 + 20\log_{10} L$$

OSS.2 In generale il valor medio del processo aleatorio per il quale si effettua la conversione analogica-digitale è pari a $\emptyset$. Nel caso di valor medio $\neq 0$ si deve esprimere SNR_Q come

$$SNR_Q = \frac{\sigma_x^2}{P_Q} \qquad \sigma_x^2 \text{ varianza segnale}$$

CODIFICA

LA COMBINAZIONE DEI PROCESSI DI CAMPIONAMENTO E DI QUANTIZZAZIONE FA SI CHE LE SPECIFICHE DI UN SEGNALE ANALOGICO TEMPO CONTINUO DIVENTINO QUELLE DI UN SEGNALE NUMERICO.

IL SEGNALE NUMERICO NON È ANCORA IN UNA FORMA ADATTA PER ESSERE TRASMESSO. PER TRADURLO IN UNA FORMA PIÙ APPROPRIATA È NECESSARIO IMPIEGARE UN PROCESSO DI CODIFICA.

OSS. Ogni strategia per rappresentare ogni elemento di un insieme discreto di valori come una particolare combinazione di eventi discreti è detta CODIFICA. Ciascuno degli eventi discreti in un codice è detto SIMBOLO. (Ad esempio, la presenza o l'assenza di una risposta impulsiva può essere impiegata per rappresentare 2 simboli).

UNA PARTICOLARE COMBINAZIONE DI SIMBOLI IN UN DATO CODICE CHE VIENE IMPIEGATA PER RAPPRESENTARE UN SINGOLO EVENTO È DETTA PAROLA DI CODICE

- IN UN CODICE BINARIO OGNI SIMBOLO PUÒ ASSUMERE I 2 VALORI DISTINTI 0 E 1 PER RAPPRESENTARE UN BIT (Binary digit = cifra binaria)
- IN UN CODICE TERNARIO OGNI SIMBOLO PUÒ ASSUMERE UNO TRA 3 VALORI DISTINTI

Nell'ipotesi di impiegare un codice binario con parole di codice di n bit è possibile rappresentare fino a 2^n livelli discreti distinti

ES. UN CAMPIONE QUANTIZZATO AD UNO TRA 128 POSSIBILI LIVELLI PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO CON PAROLE DI n bit

$$2^n = 128$$

VI SONO DIVERSE POSSIBILITÀ PER STABILIRE UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA I LIVELLI RAPPRESENTATIVI E LE PAROLE DI CODICE.

LA PIÙ IMMEDIATA È QUELLA CHE ESPRIME IL NUMERO ORDINALE DEL LIVELLO RAPPRESENTATIVO COME NUMERO BINARIO (in un sistema di numerazione binario ad ogni cifra è associato un peso che è pari ad una potenza di 2 il cui esponente è determinato dalla posizione)

ESEMPIO

8 LIVELLI ⇒ PAROLE DI 3 BIT

7	111
6	110
5	101
4	100
3	011
2	010
1	001
0	000

CODIFICA DI GRAY

7	100
6	101
5	111
4	110
3	010
2	011
1	001
0	000

La cadenza in bit/secondo di un segnale numerico è detta RITMO DI TRASMISSIONE.

ESEMPIO

SI VUOLE CONVERTIRE IN FORMA BINARIA PCM UN SEGNALE ANALOGICO s(t) AVENTE FREQUENZA MASSIMA $f_{max} = 3.4\,kHz$ (segnale vocale di qualità telefonica). IL NUMERO DI LIVELLI DI QUANTIZZAZIONE È PARI A $L = 256$. SI CHIEDE DI DETERMINARE IL BIT-RATE R_b.

$$n = \log_2 L = \log_2 256 = 8 \frac{bit}{campione}$$ ← numero di bit impiegato per rappresentare ogni campione quantizzato del segnale originale.

Per il thm del campionamento

$$f_c \geq 2 f_{max} = 6.8\,kHz \Rightarrow \text{SI SCEGLIE } f_c = 8\,kHz \left(8 \cdot 10^3 \frac{campioni}{sec}\right)$$

Il segnale telefonico in forma numerica richiede un bit-rate

$$R_b = n f_c = 8 \cdot 8 \cdot 10^3 = 64 \cdot 10^3 \frac{bit}{s} = 64 \frac{kbit}{s}$$

UN SEGNALE ANALOGICO IN SEGUITO A CAMPIONAMENTO, QUANTIZZAZIONE E CODIFICA BINARIA È RAPPRESENTATO DA UNA SEQUENZA DI BIT CARATTERIZZATA DA UN CERTO RITMO DI TRASMISSIONE (BIT-RATE).

...0 1 0 1 1 0 1 0 0 0...

A QUESTO PUNTO CI SI PUÒ DIMENTICARE DEL SEGNALE ORIGINALE E DEL FATTO CHE I BIT DEBBANO ESSERE LETTI A GRUPPI DI m!! ⇒ SI È GIUNTI AD UNA RAPPRESENTAZIONE DEL SEGNALE IN UN FORMATO OMOGENEO CHE È INDIPENDENTE DAL TIPO DI SEGNALE ANALOGICO (telefonico, televisivo, musicale, dati)

IL PROBLEMA CHE SI DEVE AFFRONTARE ORA È QUELLO DI TRASMETTERE LA SEQUENZA DI BIT, CON IL PROPRIO RITMO R_b, ATTRAVERSO UN CANALE DI TRASMISSIONE

TRASMISSIONE IN BANDA BASE DI SEGNALI NUMERICI *(Vedi sotto)

N.B! Il termine BANDA BASE viene usato per identificare la banda di frequenze originale di un segnale (numerico o analogico).

Per inviare il segnale numerico sul canale di trasmissione è necessario associare alla sequenza di bit opportune sequenze di forme d'onda.

Per effettuare questa operazione si hanno a disposizione diverse modalità.

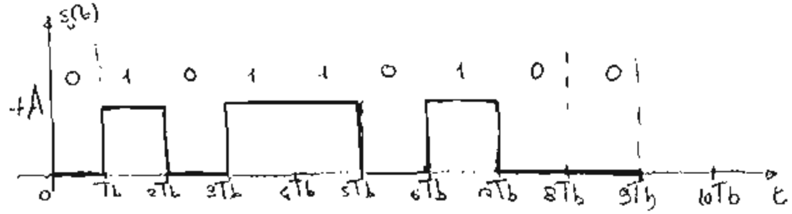
LA PIÙ EFFICIENTE, IN TERMINI DI POTENZA TRASMESSA E BANDA OCCUPATA, CONSISTE NELL'IMPIEGARE UNA SEGNALAZIONE IN CUI L'AMPIEZZA DI UNA SEQUENZA DI FORME D'ONDA, IDENTICHE CHE SI SUSSEGUONO CON CADENZA COSTANTE, VIENE MODULATA CON UN NUMERO DISCRETO DI VALORI

Si supponga di dover trasmettere una sequenza binaria con bit equiprobabili e caratterizzata da un bit-rate $R_b = \frac{1}{T_b}\left[\frac{bit}{s}\right]$.

* I segnali analogici sono inviati sul canale così come sono originariamente prodotti dalla sorgente.

UNA PRIMA POSSIBILITÀ È QUELLA DI RAPPRESENTARE LA TRASMISSIONE DEL BIT +1 CON UN VALORE D'AMPIEZZA COSTANTE +A PER UN INTERVALLO DI TEMPO T_b E LA TRASMISSIONE DEL BIT 0 CON ASSENZA DI SEGNALE PER UN INTERVALLO DI TEMPO T_b (Questo tipo di segnalazione è detta di tipo ON-OFF o UNIPOLARE).

Es. Trasmissione sequenza binaria 010 11010...



L'INTERVALLO DI TEMPO CON CUI LE FORME D'ONDA RETTANGOLARI SI SUSSEGUONO COINCIDE CON T_b ⇒ IL RATE CON CUI I SIMBOLI SONO INVIATI SUL CANALE DI TRASMISSIONE È DUNQUE

$$R_s = \frac{1}{T_b} = R_b \left[\frac{bit}{s}\right]$$

Il segnale binario rappresentato in figura potrebbe ad esempio essere il segnale all'uscita della porta seriale di un computer.

IL SEGNALE $s_0(t)$ (ALEATORIO!) È IN UNA FORMA ADATTA PER ESSERE TRASMESSO SUL CANALE DI TRASMISSIONE. L'ESPRESSIONE ANALITICA DI $s_0(t)$ È LA SEGUENTE:

$$s_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \,\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_b}{2} - kT_b}{T_b}\right)$$

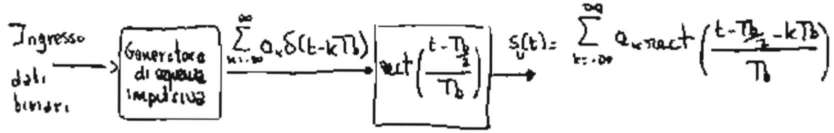
DOVE L'AMPIEZZA a_k DIPENDE DAL BIT ALL'INGRESSO NELL'ISTANTE kT_b:

$$a_k = \begin{cases} +A & \text{se il bit all'ingresso è } +1 \\ 0 & \text{se il bit all'ingresso è } 0 \end{cases}$$

OSS. Se la sequenza binaria all'ingresso è costituita da bit equiprobabili ↓

$$P(a_k=+A)=P(a_k=0)=\frac{1}{2}$$

DAL PUNTO DI VISTA SCHEMATICO SI PUÒ PENSARE CHE $s_u(t)$ SIA OTTENUTO COME



FILTRO FORMATORE
o
FILTRO DI TRASMISSIONE

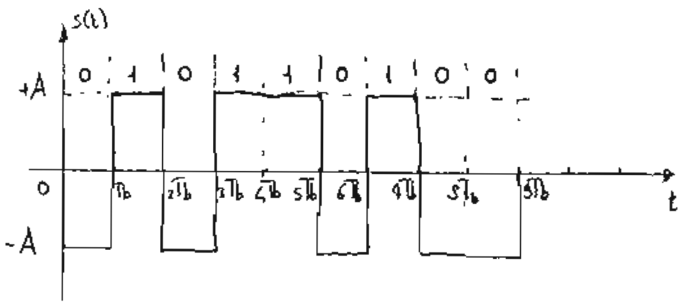
$$s_u(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t-kT_b) * \mathrm{rect}\left(\frac{t-T_b/2}{T_b}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T_b}{2}-kT_b}{2}\right)$$

L'ESEMPIO VISTO NON È L'UNICA ASSOCIAZIONE POSSIBILE TRA I BIT D'INGRESSO E LE AMPIEZZE DEL SEGNALE DA TRASMETTERE.

SI SAREBBE POTUTA, AD ESEMPIO, ADOTTARE UNA SEGNALAZIONE POLARE (O ANTIPODALE) IN CUI

$$a_k=\begin{cases} +A & \text{se il bit all'ingresso è } 1 \\ -A & \text{se il bit all'ingresso è } 0 \end{cases}$$

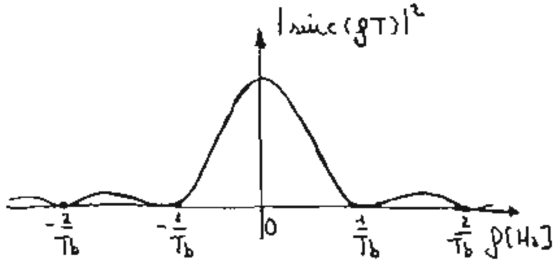
IL SEGNALE BINARIO IN QUESTO CASO È



LA RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DI $s_A(t)$ È ANCORA LA STESSA

$$s_A(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T_b}{2}-kT_b}{T_b}\right)$$

LO SPETTRO DI POTENZA DEL SEGNALE CASUALE TRASMESSO È PROPORZIONALE ALLO SPETTRO D'AMPIEZZA AL QUADRATO DEL FILTRO FORMATORE.



← oss. Poiché la forma d'onda rettangolare ha durata limitata nei tempi il suo spettro d'ampiezza ha estensione illimitata.

NEI DUE ESEMPI DI SEGNALAZIONE VISTI I BIT SONO INVIATI SUL CANALE UNO PER VOLTA ⇒ <u>TRASMISSIONE BINARIA</u>

LA TRASMISSIONE BINARIA È UN CASO PARTICOLARE DI TRASMISSIONE CON M LIVELLI D'AMPIEZZA (TRASMISSIONE MULTILIVELLO M-PAM) INFATTI LA SEQUENZA BINARIA DA TRASMETTERE POTREBBE ANCHE ESSERE LETTA A GRUPPI DI m bit. IL NUMERO DI SIMBOLI DELLA SEQUENZA NUMERICA SARÀ IN QUESTO CASO UNA POTENZA DI 2

$$M = 2^m$$ ← OGNI SIMBOLO HA UN CONTENUTO PARI A m bit

<u>ESEMPIO</u>

SI CONSIDERI IL CASO IN CUI SI VOGLIA TRASMETTERE LA SEQUENZA BINARIA 0101101000 CON UNA SEGNALAZIONE MULTILIVELLO A 4 LIVELLI D'AMPIEZZA (4-PAM).

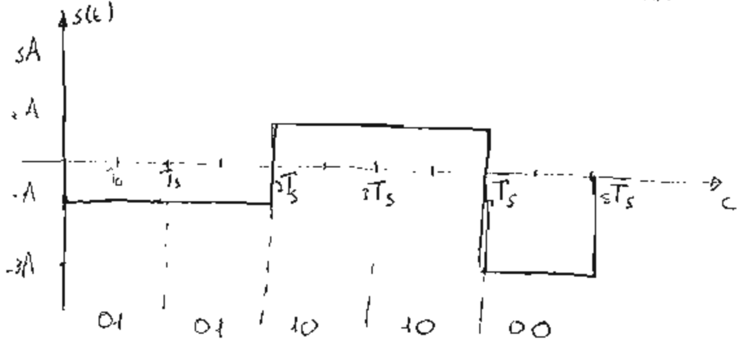
LA PRIMA OPERAZIONE CONSISTE NEL SUDDIVIDERE LA SEQUENZA BINARIA IN BLOCCHI DI $\log_2 4 = 2$ bit

$$\underbrace{01}_{2bit}\underbrace{01}_{2bit}\underbrace{10}_{2bit}\underbrace{10}_{2bit}\underbrace{00}_{2bit}$$

AD OGNUNA DELLE 4 POSSIBILI COMBINAZIONI SI ASSEGNA UN OPPORTUNO VALORE D'AMPIEZZA

+3A	11
+A	10
-A	01
-3A	00

LA FORMA D'ONDA QUATERNARIA DA TRASMETTERE s(t) SARÀ:



IL TEMPO DI SIMBOLO È RADDOPPIATO $T_s = 2T_b$

⬇

Il rate di simbolo trasmesso sul canale si è dimezzato

$$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{2T_b} = \frac{R_b}{2} \left[\frac{simb}{s}\right]$$

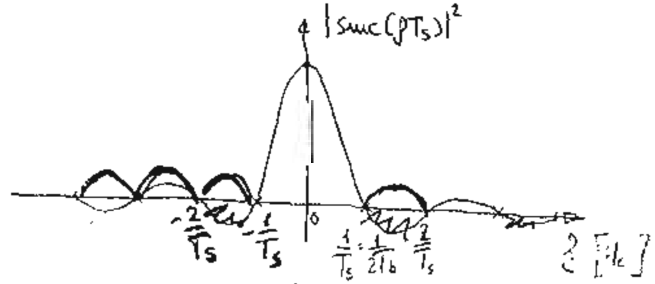
La rappresentazione matematica del segnale da trasmettere è ancora la stessa

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \,\text{rect}\left(\frac{t - T_s/2 - kT_s}{T_s}\right)$$

La differenza è nei possibili valori che può assumere a_k

$$a_k = \begin{cases} +3A & \text{se la coppia dei bit d'ingresso è } (1,1) \\ +A & \text{" " " " " } (1,0) \\ -A & \text{" " " " " } (0,1) \\ -3A & \text{" " " " " } (0,0) \end{cases}$$

LO SPETTRO DI POTENZA DEL SEGNALE TRASMESSO È PROPORZIONALE A:

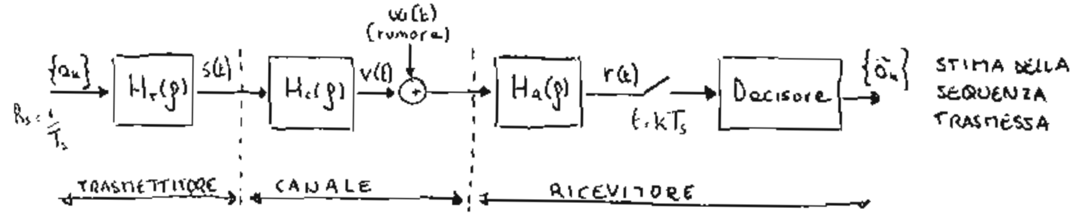


⇩

SE COME BANDA SI PRENDE CONVENZIONALMENTE LA FREQUENZA IN CORRISPONDENZA DELLA QUALE SI HA IL PRIMO ZERO, NEL CASO DI UN SEGNALE A 4 LIVELLI D'AMPIEZZA SI È AVUTO UN DIMEZZAMENTO DI BANDA.

Poiché nella trasmissione multilivello con M livelli d'ampiezza ad ogni impulso trasmesso sono associati $\log_2 M$ bit la banda occupata, rispetto alla trasmissione binaria, diminuirà del fattore $\log_2 M$.

LO SCHEMA CHE SI VUOLE STUDIARE È IL SEGUENTE



$H_T(f)$: risposta in frequenza del filtro di trasmissione (FILTRO FORMATORE)

$H_C(f)$: risposta in frequenza del canale

$H_R(f)$: risposta in frequenza del filtro di ricezione

IL COMPITO DEL RICEVITORE È QUELLO DI IDENTIFICARE IL POSSIBILE SIMBOLO a_k TRASMESSO NELL'ISTANTE kT_s. TALE COMPITO SARÀ OSTACOLATO

1) DALLE DISTORSIONI: prodotte dal canale che possono generare interferenze tra impulsi trasmessi in intervalli di tempo adiacenti (INTERFERENZA INTERSIMBOLICA, ISI Inter Symbol Interference)

2) DAL RUMORE $w(t)$: che è modellato come un segnale che si somma al segnale utile prima del filtro formatore

SI INIZIA CON IL CONSIDERARE IL PROBLEMA DELL'INTERFERENZA INTERSIMBOLICA.

SI È VISTO CHE LA RISPOSTA IN FREQUENZA DEL FILTRO FORMATORE DETERMINA LO SPETTRO DI POTENZA DEL SEGNALE TRASMESSO E DI CONSEGUENZA ANCHE LA SUA BANDA.

IL CANALE DI TRASMISSIONE È A <u>BANDA LIMITATA</u>. SE IL SEGNALE TRASMESSO HA BANDA ILLIMITATA VIENE DISTORTO NEL PASSAGGIO ATTRAVERSO IL CANALE

$\Downarrow$

SI UTILIZZA UN FILTRO DI TRASMISSIONE $H_T(f)$ CON BANDA CHE È AL MASSIMO PARI A QUELLA DEL CANALE

QUESTO FA SORGERE PERÒ UN SECONDO PROBLEMA PERCHÉ <u>I SEGNALI A BANDA LIMITATA HANNO DURATA ILLIMITATA</u>

$\Downarrow$

<u>SI GENERA INTERFERENZA TRA GLI IMPULSI TRASMESSI IN INTERVALLI TEMPORALI ADIACENTI</u>

INDICANDO CON $h_T(t)$ L'ANTITRASFORMATA DI $H_T(f)$ IL SEGNALE INVIATO SUL CANALE È IN GENERALE RAPPRESENTATO COME

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i h_T(t - iT_s)$$

IL SEGNALE ALL'USCITA DEL CANALE SARÀ PARI A $v(t) = s(t) * h_c(t)$, DOVE $h_c(t)$ È LA RISPOSTA IMPULSIVA DEL CANALE (antitrasformata di $H_C(f)$).

ALL'INGRESSO DEL FILTRO DI RICEZIONE IL RUMORE $w(t)$ SI SOMMA AL SEGNALE $v(t)$

<u>AL RICEVITORE SARÀ NECESSARIO EFFETTUARE UN OPPORTUNO FILTRAGGIO CON $H_R(f)$ PER CERCARE DI MINIMIZZARE L'EFFETTO DEL RUMORE.</u>

IL SEGNALE ALL'USCITA DEL FILTRO DI RICEZIONE SARÀ PARI A:

$$r(t) = v(t) * h_R(t) + w(t) * h_R(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i p(t - iT) + n(t) = y(t) + n(t)$$

DOVE $p(t)$ RAPPRESENTA LA RISPOSTA IMPULSIVA COSTITUITA DALLA CASCATA DEI TRE FILTRI (TRASMISSIONE, CANALE E RICEZIONE)

$$p(t) = h_T(t) * h_c(t) * h_R(t) \Longleftrightarrow P(f) = H_T(f) \cdot H_C(f) \cdot H_R(f)$$

SENZA PERDITA DI GENERALITÀ SI PONE CONVENZIONALMENTE $p(0) = 1$.

IL SEGNALE ALL'USCITA DEL FILTRO DI RICEZIONE È CAMPIONATO A PASSO T_s

$$r(t)\Big|_{t=kT_s} = r(kT_s) = \sum_i a_i\, p(kT_s - iT_s) + n(kT_s) = y(kT_s) + n(kT_s)$$

IL VALORE $r(kT_s)$ LETTO DAL CAMPIONATORE IN CORRISPONDENZA DELL'ISTANTE kT_s SI PUÒ ESPRIMERE COME

$$r(kT_s) = a_k + \sum_{i\neq k} a_i\, p(kT_s - iT_s) + n(kT_s)$$

NELL'ISTANTE kT_s OLTRE AL VALORE a_k, DETERMINATO DAL SIMBOLO TRASMESSO NEL MEDESIMO ISTANTE, SI AVRÀ ANCHE IL CONTRIBUTO DEI SIMBOLI TRASMESSI IN ALTRI ISTANTI

$$\sum_{i\neq k} a_i\, p((k-i)T_s) \quad \leftarrow \text{INTERFERENZA INTERSIMBOLICA}$$

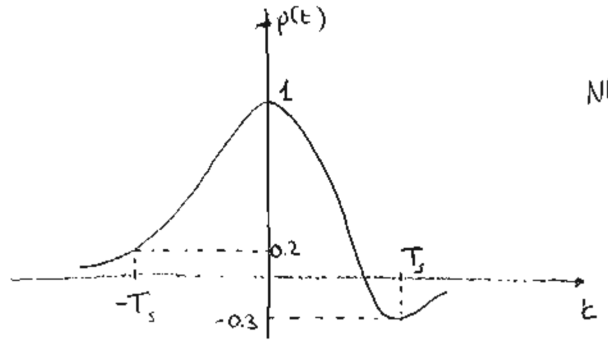
E DEL RUMORE $n(kT)$

PER COMPRENDERE QUAL È L'EFFETTO DELL'INTERFERENZA INTERSIMBOLICA SI CONSIDERI PER IL MOMENTO UNA SITUAZIONE IN CUI VI È ASSENZA DI RUMORE

ESEMPIO

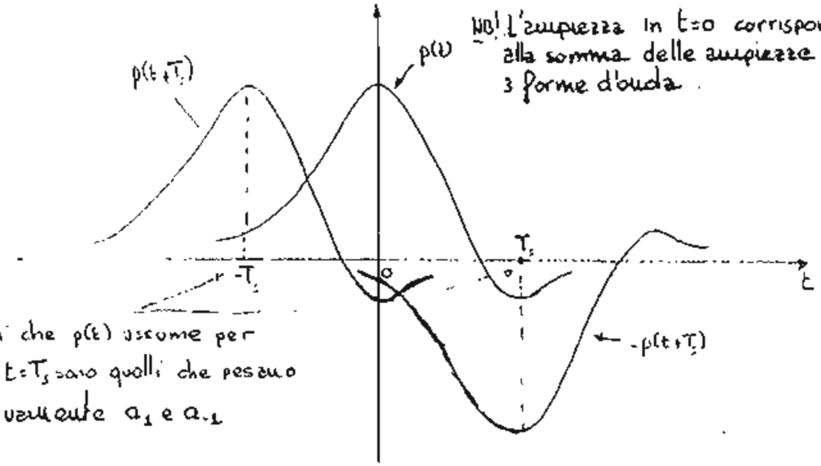
TRASMISSIONE BINARIA ANTIPODALE CON SIMBOLI $a_k = \pm 1$

ANDAMENTO DELLA RISPOSTA IMPULSIVA $p(t)$



NB! I valori assunti da $p(t)$ in altri istanti multipli interi di T_s diversi da ± 1 e 0 sono considerati trascurabili

SI VUOLE RAPPRESENTARE LA FORMA D'ONDA ALL'USCITA DEL RICEVITORE CORRISPONDENTE ALLA SEQUENZA $a_{-1} = +1,\ a_0 = +1,\ a_1 = -1$ E $|a_k| = 0$ per $k \neq \pm 1, 0$



NB! L'ampiezza in $t=0$ corrisponde alla somma delle ampiezze di 3 forme d'onda

I valori che $p(t)$ assume per $t=-T_s$ e $t=T_s$ sono quelli che pesano rispettivamente a_1 e a_{-1}

$$y(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i\, p(t - iT_s) = a_{-1}\, p(t+T_s) + a_0\, p(t) + a_1\, p(t-T_s)$$

CAMPIONANDO IL SEGNALE IN $t=0$ SI OTTIENE

$$y(0) = a_{-1}\, p(T_s) + a_0 + a_1\, p(-T_s)$$

$$\Downarrow$$

PER EFFETTO DELL'INTERFERENZA GENERATA DA $a_{-1}=1$ E $a_1=-1$ NELL'ISTANTE $t=0$ SI LEGGE IL VALORE 0.5 INVECE DEL VALORE 1 CHE SI LEGGEREBBE SE NON CI FOSSE INTERFERENZA INTERSIMBOLICA

DALL'ESEMPIO APPENA VISTO SI PUÒ DEDURRE CHE PER EVITARE IL PROBLEMA DELL'ISI LA FORMA $p(t)$ DEVE RISPETTARE LA SEGUENTE CONDIZIONE

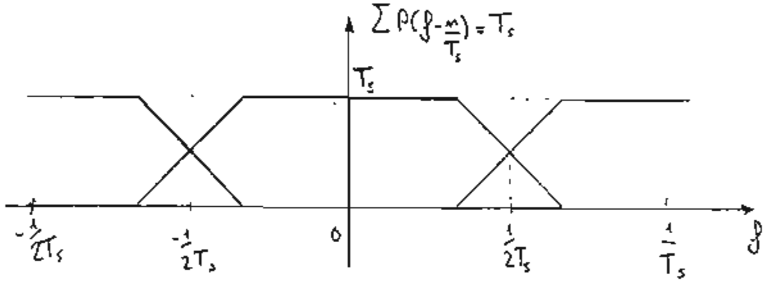
$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t=0 \\ 0 & \text{per } t=kT_s \text{, con } k\neq 0 \end{cases}$$

CHE SI PUÒ RISCRIVERE COME:

$$p(t)\cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_s) = \delta(t) \xrightarrow{TF} P(f) * \frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T_s}\right) = 1$$

$$\boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty} P\left(f - \frac{m}{T_s}\right) = T_s} \quad \text{CRITERIO DI NYQUIST}$$

Affinché la risposta impulsiva $p(t)$ non introduca ISI ad istanti multipli interi di T_s, la ripetizione periodica della sua trasformata con passo $\frac{1}{T_s}$ deve essere COSTANTE

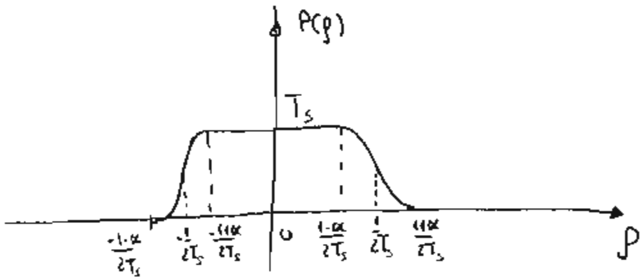


LE FUNZIONI NORMALMENTE IMPIEGATE SONO QUELLE CON TRANSIZIONE SINUSOIDALE RISPETTO A $\frac{1}{2T_s}$

$$P(f) = \begin{cases} T_s & 0 \le |f| \le \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{T_s}{2}-\frac{T_s}{2}\sin\left(\frac{\pi T}{\alpha}\left(f-\frac{1}{T}\right)\right), & \frac{1-\alpha}{2T_s} \le |f| \le \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0, & |f| > \frac{1+\alpha}{2T_s} \end{cases}$$

α: parametro di roll-off, caratterizza l'eccesso di banda rispetto al minimo

LA BANDA OCCUPATA E' PARI A $B = \frac{1}{2T_s}(1+\alpha)$ $\quad 0 \le \alpha \le 1$



$\alpha = 1 \Rightarrow$ MAX $B = \frac{1}{T_s}$ Spettro a coseno rialzato $\quad P(f) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\pi f T_s)\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f T_s}{2}\right)$

$\alpha = 0 \Rightarrow$ MIN $B = \frac{1}{2T_s}$ Spettro rettangolare $\quad P(f) = T_s\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right)$

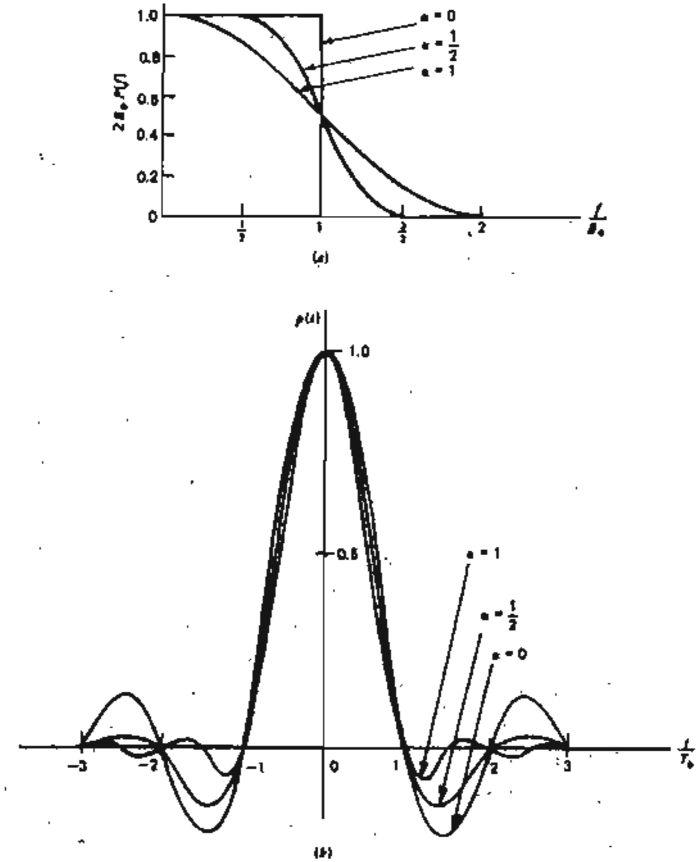


Figure 6.2
Responses for different rolloff factors. (a) Frequency response. (b) Time response.

UNA FORMA D'ONDA CHE NON DÀ LUOGO AD INTERFERENZA INTERSIMBOLICA È LA FUNZIONE

$$p(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \leftrightarrow P(f) = T_s\, \mathrm{rect}(f T_s)$$

LA BANDA OCCUPATA CON L'UTILIZZO DELLA FORMA D'ONDA sinc È DETTA **BANDA DI NYQUIST**

$$B_N = \frac{1}{2T_s}$$

E RAPPRESENTA LA MINIMA BANDA POSSIBILE PER NON AVERE INTERFERENZA INTERSIMBOLICA CON TEMPO DI SIMBOLO T_s.

IN MOLTI CASI LE CARATTERISTICHE DI UN CANALE TRASMISSIVO SONO DESCRITTE CON UN UNICO PARAMETRO: LA SUA BANDA B.

$\Downarrow$

MODELLO DI CANALE DI TIPO PASSABASSO IDEALE DI BANDA B.

QUESTO SIGNIFICA CHE UN SEGNALE CON BANDA INFERIORE A B VIENE TRASMESSO INALTERATO SENZA DISTORSIONI MENTRE UN SEGNALE CON BANDA MAGGIORE DI B VIENE DISTORTO.

IDENTIFICANDO B COME BANDA DI NYQUIST IL MASSIMO RATE DI TRASMISSIONE È PARI A $2B$ $\frac{\text{impulsi}}{s}$ (RITMO DI NYQUIST).

N.B! In questo caso si sta <u>SFRUTTANDO</u> al massimo la banda del canale. Infatti se si volesse impiegare un ritmo più alto sarebbe necessaria una banda maggiore di B. Poiché la banda del canale è limitata a B si introdurrebbe ISI.

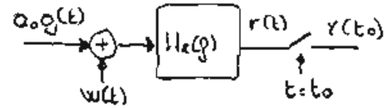
<u>OSS.</u> IL PROBLEMA LEGATO ALLA FORMA D'ONDA sinc È LA FISICA REALIZZABILITÀ

FINO AD ORA CI SI È OCCUPATI DEL PROBLEMA DI QUALI CARATTERISTICHE DEVE POSSEDERE LA RISPOSTA IMPULSIVA $p(t)$ AFFINCHÉ NON INTRODUCA INTERFERENZA INTERSIMBOLICA. NELLA TRATTAZIONE SVOLTA CI SI È COMPLETAMENTE DISINTERESSATI DELLA PRESENZA DEL RUMORE $w(t)$.

<u>PROGETTO DEL RICEVITORE</u>

IL <u>PROBLEMA FONDAMENTALE</u> DI CUI TENER CONTO NEL <u>PROGETTO DEL RICEVITORE</u> È CHE IN GENERALE LA SUA FUNZIONE È QUELLA DI EFFETTUARE <u>UNA STIMA DEL SIMBOLO TRASMESSO</u> DALL'OSSERVAZIONE DEL SEGNALE UTILE IMMERSO IN RUMORE ADDITIVO

SI CONSIDERA LA SITUAZIONE IN CUI ALL'INGRESSO DEL RICEVITORE SI HA:



$$r(t) = u_s(t) + n(t) = a_0 p(t) + n(t)$$

DOVE $a_0 \in \{-1, +1\}$, $g(t)$ È UNA FORMA D'ONDA NOTA AD ENERGIA FINITA E_g E $w(t)$ È RUMORE BIANCO (la sua densità spettrale di potenza è costante). Convenzionalmente la densità spettrale di potenza del rumore si indica con $\frac{N_0}{2}$. Il valor medio di $w(t)$ è nullo.

<u>N.B!</u> Si sta considerando la situazione in cui si effettua la trasmissione di un <u>impulso isolato</u>, cioè quella in cui si <u>TRASMETTE UN SIMBOLO PER VOLTA</u>. Nei sistemi di comunicazione in generale si ha a che fare con <u>SEQUENZE CONTINUE D'IMPULSI</u>. In questi casi è possibile considerare ogni impulso come <u>ISOLATO</u> quando non <u>INTERFERISCE</u> con gli altri, cioè in <u>assenza di interferenza intersimbolica</u>.

Ad esempio, nel caso in cui si ha a disposizione un canale di banda infinita, se si considera la trasmissione PAM binaria con segnalazione ON-OFF di una forma d'onda rettangolare, poiché non si ha interferenza tra i simboli trasmessi in diversi intervalli, è possibile trattare ognuno di essi come se fosse isolato.

SI VUOLE DISTINGUERE L'IPOTESI IN CUI È STATO TRASMESSO IL SIMBOLO -1 DA QUELLA IN CUI È STATO TRASMESSO IL SIMBOLO $+1$.

POICHÉ IL FILTRO È LINEARE PER IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI È POSSIBILE TRATTARE SEPARATAMENTE $g(t)$ E $w(t)$. SIANO $u_s(t)$ E $m(t)$ IL SEGNALE UTILE E IL RUMORE PRODOTTI ALL'USCITA DEL FILTRO RISPETTIVAMENTE DA $g(t)$ E $w(t)$.

L'IMPULSO MODULATO IN AMPIEZZA DAL SIMBOLO a_0 SI PUÒ ESPRIMERE COME ANTITRASFORMATA DI $P(f) = G(f) \cdot H_R(f)$

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, H_R(f)\, e^{+j2\pi f t}\, df$$

SI INDICA CON t_0 L'ISTANTE DI TEMPO IN CUI $p(t)$ ASSUME IL VALORE MASSIMO

$$p(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) H_R(f)\, e^{+j2\pi f t_0}\, df$$

SI CONSIDERA ORA L'EFFETTO DEL RUMORE $m(t)$ ALL'USCITA DEL FILTRO $H_R(f)$. LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI $m(t)$ È PARI A

$$S_m(f) = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2$$

DOVE $\frac{N_0}{2}$ È LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI $w(t)$

LA POTENZA DI RUMORE ALL'USCITA DEL FILTRO È

$$\sigma_m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df$$

LE PRESTAZIONI DEL RICEVITORE DIPENDONO DAL RAPPORTO SEGNALE RUMORE D'USCITA DEFINITO COME

$$SNR = \frac{p^2(t_0)}{\sigma_m^2} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \cdot H_R(f)\, e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df}$$

$p^2(t_0)$: Potenza istantanea (in t_0) del segnale utile

IL PROGETTO DEL FILTRO DI RICEZIONE $H_R(f)$ DEVE ESSERE EFFETTUATO CON L'OBBIETTIVO DI MASSIMIZZARE IL RAPPORTO SEGNALE RUMORE,

CIOÈ FARE IN MODO CHE IN $t = t_0$ LA POTENZA ISTANTANEA DI $p(t)$ SIA LA PIÙ GRANDE POSSIBILE PARAGONATA CON LA VARIANZA (POTENZA MEDIA) DI $m(t)$.

PER DETERMINARE LA RISPOSTA $H_R(f)$ CHE RENDE MASSIMO L'SNR SI UTILIZZA LA SEGUENTE RELAZIONE

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} G(f) H_R(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df$$

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ

IL SEGNO DI UGUALE VALE QUANDO

$$H_R(f) = \left(G(f)\, e^{j2\pi f t_0}\right)^* = G^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$$

SOSTITUENDO LA **DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ** NELL'ESPRESSIONE CHE DÀ SNR SI OTTIENE

$$SNR = \frac{p^2(t_0)}{\sigma_m^2} \le \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \frac{2 E_g}{N_0}$$

IL MASSIMO DEL RAPPORTO SEGNALE-RUMORE È PARI A

$$SNR = \frac{p^2(t_0)}{\sigma_m^2} = \frac{2 E_g}{N_0}$$

E SI OTTIENE QUANDO $H_R(f) = G^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$, CHE RAPPRESENTA QUINDI LA RISPOSTA IN FREQUENZA DEL FILTRO OTTIMO. IN QUESTO CASO IL FILTRO VIENE DETTO "ADATTATO".

OSS. IL RAPPORTO SEGNALE-RUMORE MASSIMO DIPENDE SOLO DALL'ENERGIA DEL SEGNALE E DALLA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DEL RUMORE. NON DIPENDE DALLA FORMA DI $g(t)$!

A PARTE L'ESPONENZIALE COMPLESSO $e^{-j2\pi f t_0}$, CHE RAPPRESENTA UN RITARDO PARI A t_0, LA RISPOSTA IN FREQUENZA DEL FILTRO DI RICEZIONE OTTIMO

È OTTENUTA PRENDENDO LA COMPLESSA CONIUGATA DI $G(f)$.

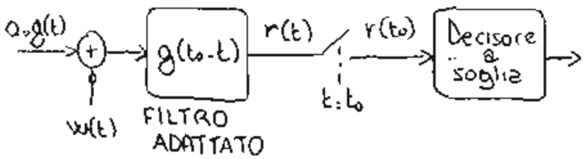
LA RISPOSTA IMPULSIVA DEL FILTRO ADATTATO È:

$$h_R(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0} e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} G(-f)\, e^{j2\pi f(t-t_0)}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, e^{j2\pi f(t_0-t)}\, df = g(t_0-t)$$

per forme d'onda reali $G(-f)=G^*(f)$

LA RISPOSTA IMPULSIVA DEL FILTRO ADATTATO CORRISPONDE ALLA RISPOSTA IMPULSIVA DEL SEGNALE D'INGRESSO RIBALTATA E RITARDATA DI t_0.

LO SCHEMA DEL RICEVITORE OTTIMO È DUNQUE



$$\begin{cases} \text{Se } r(t_0)\geq\lambda, \text{ si decide che è stato trasmesso } 1 \\ \text{Se } r(t_0)<\lambda, \text{ si decide che è stato trasmesso } -1 \end{cases}$$

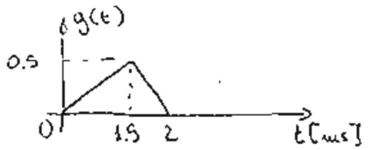
ALL'ISTANTE $t=t_0$ L'USCITA DEL FILTRO ADATTATO È CAMPIONATA E IL VALORE CHE ASSUME $r(t_0)$ È CONFRONTATO CON UNA SOGLIA PREFISSATA λ. SE IL VALORE $r(t_0)$ È MAGGIORE DI λ IL DECISORE DECIDE PER $a_0=+1$ ALTRIMENTI PER $a_0=-1$

FINO AD ORA NON SI È CONSIDERATO IL PROBLEMA DELLA FISICA REALIZZABILITÀ DEL FILTRO ADATTATO. PERCHÉ UN FILTRO ADATTATO CHE OPERA IN TEMPO REALE SIA FISICAMENTE REALIZZABILE DEVE ESSERE CAUSALE, CIOÈ LA SUA RISPOSTA IMPULSIVA DEVE ESSERE NULLA PER $t<0$.

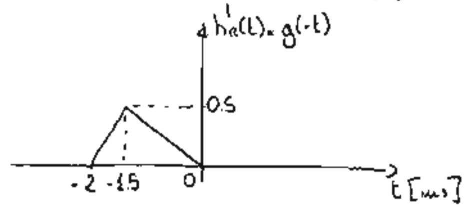
$$h_R(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ g(t_0-t), & t\geq 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

SIA $g(t)$ LA FORMA D'ONDA RAPPRESENTATA IN FIGURA

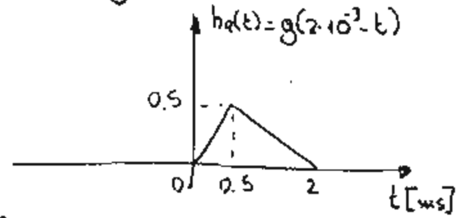


IL FILTRO ADATTATO ALLA FORMA D'ONDA È OTTENUTO RIBALTANDO $g(t)$



SE NON SI TRASLASSE VERSO DESTRA DI UN VALORE PARI AD ALMENO 2 ms IL FILTRO ADATTATO SAREBBE ANTICAUSALE.

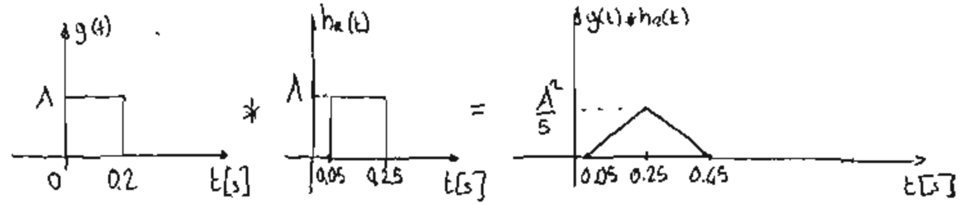
SI PONE $t_0=2\,ms \Rightarrow h_R(t)=g(2\cdot 10^{-3}-t)$



AVER POSTO $t_0=2\cdot 10^{-3}s$ IMPLICA CHE IL SEGNALE ALL'USCITA DEL FILTRO ADATTATO È CAMPIONATO NELL'ISTANTE $t_c=2\cdot 10^{-3}s$.

ESEMPIO

SIA $g(t)=A\,\mathrm{rect}(5t-0.5)$. PER RENDERE CAUSALE IL FILTRO ADATTATO SI PONE $t_0=0.25\,s$. IL CAMPIONAMENTO VIENE EFFETTUATO NELL'ISTANTE $t_c=0.25\,s$.



IL RISULTATO DELLA CONVOLUZIONE È UN TRIANGOLO CHE ASSUME VALORE MASSIMO $\frac{A^2}{5}$ IN $t=0.25\,s$

OSS. SI PUÒ OSSERVARE CHE A PARTE UNA FASE, LO SPETTRO DEL SEGNALE UTILE ALL'USCITA DEL FILTRO ADATTATO È PARI ALLA DENSITÀ SPETTRALE DI ENERGIA DEL SEGNALE D'INGRESSO

INFATTI SE SI EFFETTUA IL PRODOTTO TRA $G(f)$ E $H_a(f) = G^*(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$ SI OTTIENE:

$$G(f)\cdot H_a(f) = \underbrace{|G(f)|^2}_{\substack{\text{Densità spettrale}\\ \text{d'energia del segnale}\\ \text{d'ingresso.}}} e^{-j2\pi f t_0}$$

POICHÉ PER UN DATO SEGNALE AD ENERGIA FINITA L'ANTITRASFORMATA DELLA DENSITÀ SPETTRALE DI ENERGIA CORRISPONDE ALLA SUA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE, SI VERIFICA CHE IL SEGNALE ALL'USCITA DEL FILTRO ADATTATO NON È ALTRO CHE UNA VERSIONE RITARDATA DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE AL SUO INGRESSO.

LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DI $g(t)$ È PARI A:

$$R_g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\,g(\alpha - t)\,d\alpha$$

ANTITRASFORMANDO $|G(f)|^2 e^{-j2\pi f t_0}$ PER IL TEOREMA DEL RITARDO SI OTTIENE

$$|G(f)|^2 e^{-j2\pi f t_0} \leftrightarrow R_g(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\,g(\alpha - (t-t_0))\,d\alpha$$

CHE CORRISPONDE ALL'AUTOCORRELAZIONE DI $g(t)$ RITARDATA DI t_0.

IL SEGNALE UTILE ALL'USCITA DEL FILTRO ADATTATO È:

$$u_s(t) = a_0\, g(t) * g(t_0 - t) = a_0 R_g(t - t_0)$$

POICHÉ IL CAMPIONAMENTO DI $u_s(t)$ AVVIENE NELL'ISTANTE $t_c = t_0$ SI HA:

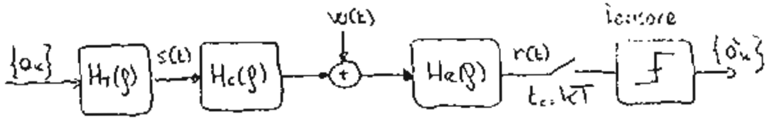
$$u_s(t_0) = a_0 R_g(0) = a_0 E_g$$

CHE COINCIDE CON IL VALORE DELL'AUTOCORRELAZIONE NELL'ORIGINE (= ENERGIA DEL SEGNALE). PROPRIETÀ DELL'AUTOCORRELAZIONE È QUELLA DI AVERE IL MASSIMO NELL'ORIGINE $\Longrightarrow$ IL SEGNALE UTILE È CAMPIONATO IN CORRISPONDENZA DEL SUO VALORE MASSIMO.

TRASMISSIONE IMPULSI SUCCESSIVI

Per semplificare la trattazione che ha portato alla determinazione del filtro adattato come filtro di ricezione ottimo si è fatta l'ipotesi di considerare il caso della trasmissione di un impulso isolato o che si può considerare come tale (Es. sequenza d'impulsi temporalmente distinti).

NELLA TRASMISSIONE DI SEQUENZE REGOLARI D'IMPULSI OLTRE AD AVERE UN FILTRO DI RICEZIONE ADATTATO ALLA FORMA D'ONDA RICEVUTA SI DESIDERA CHE GLI IMPULSI ALL'INGRESSO DEL CAMPIONATORE NON INTERFERISCANO TRA LORO



T: intervallo di simbolo

LA RISPOSTA IN FREQUENZA DEL MEZZO TRASMISSIVO $H_C(f)$ È FUORI DAL CONTROLLO DEL PROGETTISTA $\Rightarrow$ È NECESSARIO PROGETTARE IN MODO CONGIUNTO $H_T(f)$ E $H_R(f)$ IN MODO DA SODDISFARE SIA IL CRITERIO DI NYQUIST PER NON AVERE INTERFERENZA INTERSIMBOLICA CHE L'ADATTAMENTO DEL FILTRO DI RICEZIONE:

1) $H_T(f) \cdot H_C(f) \cdot H_R(f) = H_{Ny}(f)$, con $H_{Ny}(f)$ risposta in frequenza che soddisfa il criterio di Nyquist

2) $H_R(f) = H_T^*(f)\, H_C^*(f)$ _ Filtro di ricezione adattato (senza perdita di generalità si pone $t_0 = 0$).

Sostituendo la seconda relazione nella prima si ottiene:

$$H_T(f) \cdot H_C(f) \cdot H_T^*(f) \cdot H_C^*(f) = H_{Ny}(f) \Rightarrow |H_T(f)| = \frac{\sqrt{H_{Ny}(f)}}{|H_C(f)|}$$

La caratteristica di fase di $H_T(f)$ può essere scelta in modo arbitrario (viene compensata poi da quella del filtro adattato). Sostituendo la soluzione ottenuta per $|H_T(f)|$ nella seconda relazione si ottiene

$$|H_R(f)| = \sqrt{H_{Ny}(f)}$$

EFFETTO DEL RUMORE SULLE PRESTAZIONI DEL RICEVITORE

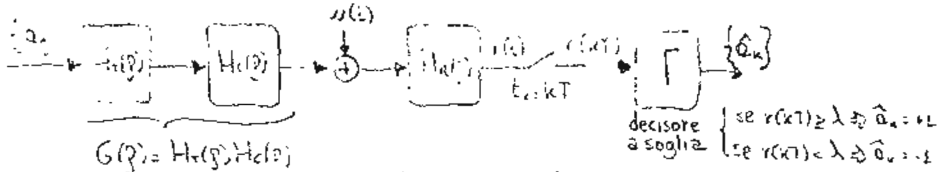
SI VUOLE PRENDERE IN CONSIDERAZIONE LA TRASMISSIONE PAM IN PRESENZA DI RUMORE TERMICO. NELLA TRASMISSIONE M-PAM L'AMPIEZZA ASSUME M POSSIBILI VALORI DISCRETI, CON $M \geq 2$. IL PROBLEMA DEL RICEVITORE È QUELLO DI DECIDERE QUALE AMPIEZZA È STATA TRASMESSA TRA LE M POSSIBILI.

In assenza di disturbi l'ampiezza del segnale negli istanti kT può assumere un valore tra gli M possibili che sono associati ai simboli trasmessi. La presenza del rumore, invece, fa sì che l'ampiezza del campione assuma in generale valori diversi e spesso qualsiasi valore intermedio tra quelli propri del segnale. È quindi necessario STABILIRE UN INTERVALLO DI DECISIONE intorno alle M ampiezze in modo che ogni qualvolta l'ampiezza del segnale ricevuto cade nell'intervallo m-esimo esso sia associato all'ampiezza m-esima ($m = 1, \ldots, M$).

IL DISTURBO NELL'ISTANTE DI LETTURA SI PUÒ CARATTERIZZARE SOLO IN TERMINI STATISTICI. NELLO STUDIO DEI SISTEMI DI TRASMISSIONE CI SI LIMITA A CONSIDERARE LA PRESENZA DEL SOLO RUMORE TERMICO. TALE DISTURBO È CARATTERIZZATO DA UNA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DELLE AMPIEZZE GAUSSIANA. POICHÉ IL RUMORE TERMICO HA MEDIA NULLA SI HA CHE LA VARIANZA, OSSIA LA POTENZA MEDIA, DEFINISCE COMPLETAMENTE LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ

PER DETERMINARE GLI EFFETTI DEL RUMORE SULLE PRESTAZIONI DEL SISTEMA DI TRASMISSIONE SI INIZIA A CONSIDERARE IL CASO BINARIO, CIOÈ $M = 2$.

LO SCHEMA DEL SISTEMA DI TRASMISSIONE È:



- $\{a_k\}$ è una sequenza di simboli binari (rate $R_b = \frac{1}{T}\left[\frac{bit}{s}\right]$) che assumono con la stessa probabilità i valori $(+1, -1)$;
- $w(t)$ è il rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$;
- la cascata $H_T(f)H_C(f)H_R(f)$ soddisfa il criterio di Nyquist per non avere interferenza intersimbolica ed il filtro di ricezione è adattato $H_R(f) = H_T^*(f)H_C^*(f) = G^*(f)$.

IL SEGNALE RICEVUTO NELL'ISTANTE DI CAMPIONAMENTO È:

$$r(kT) = r_k = u_s(kT) + n(kT) = a_k E_g + n_k$$

r_k è una variabile aleatoria ottenuta come somma di una variabile aleatoria discreta $u_s(kT)$, che può assumere i 2 valori equiprobabili $(-E_g, +E_g)$, e di una variabile aleatoria gaussiana $n(kT)$ con varianza $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}E_g$.

$u_s(kT)$ E $n(kT)$ SONO INDIPENDENTI $\Rightarrow$ LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI r_k È LA CONVOLUZIONE DELLE DUE DENSITÀ DI PROBABILITÀ:

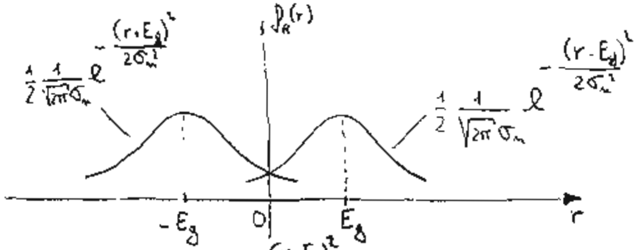
$$f_U(u) = \frac{1}{2}\delta(u+E_g) + \frac{1}{2}\delta(u-E_g)$$

E

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}}$$

SI OTTIENE

$$f_R(r) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{(r+E_g)^2}{2\sigma_n^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{(r-E_g)^2}{2\sigma_n^2}}$$



È POSSIBILE INTERPRETARE $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{(r+E_g)^2}{2\sigma_n^2}}$ COME LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DEL SEGNALE RICEVUTO CONDIZIONATA ALLA TRASMISSIONE DI $a_k = -1$

$$f(r|a_k=-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{(r+E_g)^2}{2\sigma_n^2}}$$

rappresenta la densità di probabilità (l'area è 1) di una variabile aleatoria gaussiana con valor medio $-E_g$ e varianza σ_n^2.

IN MODO ANALOGO È POSSIBILE INTERPRETARE $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{(r-E_g)^2}{2\sigma_n^2}}$ COME LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DEL SEGNALE RICEVUTO CONDIZIONATA ALLA TRASMISSIONE DI $a_k = 1$

$$f(r|a_k=1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{(r-E_g)^2}{2\sigma_n^2}}$$

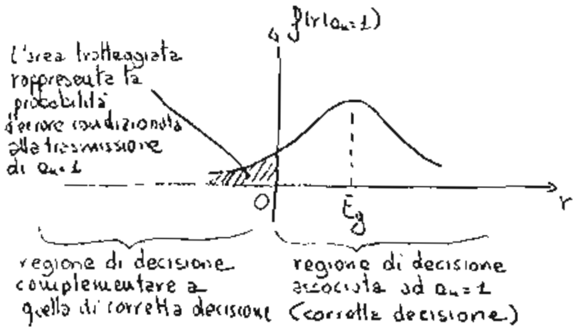
rappresenta la densità di probabilità (l'area è 1) di una variabile aleatoria gaussiana con valor medio E_g e varianza σ_n^2

SI DECIDE CHE $\hat{a}_k = 1$ SE $f(r|a_k=1) \geq f(r|a_k=-1)$. IL PUNTO IN CUI LE DUE DENSITÀ DI PROBABILITÀ SI INTERSECANO DEFINISCE IL VALORE $\lambda = 0$ DELLA SOGLIA RISPETTO ALLA QUALE SI EFFETTUA LA DECISIONE:

- se $r_k \geq 0$ si decide per $\hat{a}_k = +1$ (la regione di decisione associata è $r \geq 0$)
- se $r_k < 0$ si decide per $\hat{a}_k = -1$ (la regione di decisione associata è $r < 0$).

SE IL SIMBOLO TRASMESSO È $a_k = +1$ SI COMMETTE ERRORE QUANDO $n_k < -E_g$. LA PROBABILITÀ CHE QUESTO EVENTO SI VERIFICHI È PARI ALL'AREA SOTTESA DA $f(r|a_k=1)$ NELLA REGIONE DI DECISIONE COMPLEMENTARE A QUELLA DI

CORRETTA DECISIONE



LA PROBABILITÀ D'ERRORE CONDIZIONATA ALLA TRASMISSIONE DI $a_k = 1$ È

$$P_b(E|a_k=1) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{(u-E_g)^2}{2\sigma_n^2}} du = Q\left(\frac{E_g}{\sigma_n}\right)$$

SE IL SIMBOLO TRASMESSO È $a_k = -1$ SI COMMETTE ERRORE QUANDO $n_k > E_g$

IN QUESTO CASO LA PROBABILITÀ D'ERRORE CONDIZIONATA AD $a_k = -1$ È

$$P_b(E|a_k=-1) = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{(u+E_g)^2}{2\sigma_n^2}} du = Q\left(\frac{E_g}{\sigma_n}\right)$$

LA PROBABILITÀ D'ERRORE COMPLESSIVA SI OTTIENE PESANDO LE PROBABILITÀ D'ERRORE CONDIZIONATE PER LE PROBABILITÀ CON CUI GLI EVENTI CONDIZIONANTI SI VERIFICANO ($P(a_k=1) = P(a_k=-1) = \frac{1}{2}$). SI OTTIENE CHE LA PROBABILITÀ DI BIT ERRATO È:

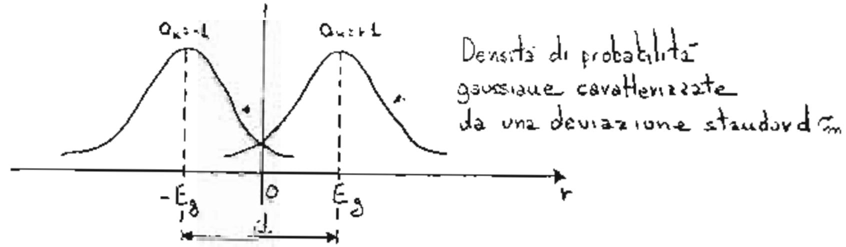
$$P_b(E) = P(E|a_k=-1)P(a_k=-1) + P(E|a_k=1)P(a_k=1) =$$

$$= \frac{1}{2}Q\left(\frac{E_g}{\sigma_n}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{E_g}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{E_g}{\sigma_n}\right)$$

RICORDANDO CHE $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}E_g$ SI OTTIENE

$$P_b(E) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$$

OSS. DAL PUNTO DI VISTA PRATICO CONVIENE ESPRIMERE LA PROBABILITÀ D'ERRORE COME UNA FUNZIONE DELLA DISTANZA TRA I PUNTI RAPPRESENTATIVI DEI SIMBOLI TRASMESSI



d: distanza tra i punti rappresentativi dei simboli trasmessi

SI COMMETTE ERRORE QUANDO IL VALORE DELL'AMPIEZZA DEL RUMORE NELL'ISTANTE DI CAMPIONAMENTO È SUPERIORE ALLA METÀ DELLA DISTANZA d NELLA DIREZIONE DEL PUNTO ADIACENTE.

$$P(E) = Q\left(\frac{d/2}{\sigma_n}\right) \quad \text{con } d = 2E_g \text{ e } \sigma_n = \sqrt{\frac{N_0}{2}E_g}$$

A PARI σ_n LA PROBABILITÀ D'ERRORE SARÀ TANTO PIÙ PICCOLA QUANTO PIÙ I PUNTI SARANNO LONTANI DALLA SOGLIA DI DECISIONE. POICHÉ LA DISTANZA È LEGATA ALL'ENERGIA DEL SEGNALE RICEVUTO (E DI CONSEGUENZA A QUELLA DEL SEGNALE TRASMESSO) PER ALLONTANARE I PUNTI RAPPRESENTATIVI DALLA SOGLIA DI DECISIONE SARÀ NECESSARIO SPENDERE PIÙ ENERGIA.

$\Downarrow$

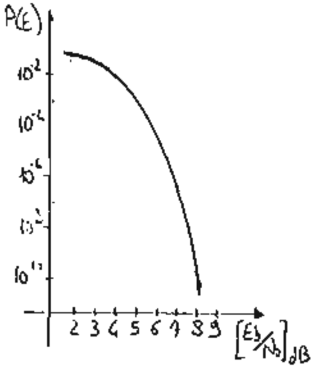
LA PROBABILITÀ D'ERRORE DIPENDE ESCLUSIVAMENTE DALLA DISTANZA d TRA I VALORI ASSOCIATI AI SIMBOLI DA TRASMETTERE E DALLA DEVIAZIONE STANDARD DEL RUMORE.

IL FILTRO ADATTATO SI PUÒ DUNQUE INTERPRETARE COME QUEL

FILTRO DI RICEZIONE CHE, NELL'ISTANTE DI CAMPIONAMENTO, MASSIMIZZA LA DISTANZA TRA I PUNTI RAPPRESENTATIVI DEI SIMBOLI TRASMESSI, PER UNA DATA FORMA D'ONDA $g(t)$ AL SUO INGRESSO.

OSS. LA PROBABILITÀ D'ERRORE VIENE SOLITAMENTE ESPRESSA IN FUNZIONE DI E_b/N_0 DOVE E_b RAPPRESENTA L'ENERGIA MEDIA PER SINGOLO BIT RICEVUTO. NEL CASO IN ESAME AD OGNI SIMBOLO CORRISPONDE UN BIT $\Rightarrow \boxed{E_b = E_g}$

LA PROBABILITÀ D'ERRORE $P(E)$ DECRESCE RAPIDAMENTE ALL'AUMENTARE DI $\frac{E_b}{N_0}$



x	Q(x)
2	$2.28 \cdot 10^{-2}$
3	$1.3 \cdot 10^{-3}$
4	$3.16 \cdot 10^{-5}$
5	$2.86 \cdot 10^{-7}$
⋮	⋮

Per valori dell'argomento maggiori di 2 un'ottima approssimazione della funzione $Q(x)$ è:

$$Q(x) \simeq \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, x}$$

TRASMISSIONE MULTILIVELLO

Si vuole ora considerare la situazione in cui il simbolo a_k, che modula l'ampiezza dell'impulso trasmesso, possa assumere M livelli discreti, con $M>2$. Come si è già avuto modo di dire questa situazione corrisponde alla suddivisione della sequenza binaria da trasmettere in blocchi di $K = \log_2 M$ bit ciascuno. Ad ogni blocco viene associato un simbolo che può avere $2^K = M$ configurazioni equiprobabili. POICHÉ LA SEQUENZA DI SIMBOLI VIENE TRASMESSA CON M AMPIEZZE DIVERSE DELLO STESSO IMPULSO (M-PAM), LA DURATA DELL'IMPULSO POTRÀ ESSERE K VOLTE QUELLA DEL CASO BINARIO E QUINDI SI AVRÀ UNA RIDUZIONE DI BANDA PARI AD UN FATTORE K.

LO SCHEMA DEL RICEVITORE È IDENTICO A QUELLO DELLA TRASMISSIONE 2-PAM CON LA DIFFERENZA CHE ORA IL DECISORE PRENDERÀ UNA DECISIONE SULLA BASE DELLA SUDDIVISIONE IN M REGIONI.

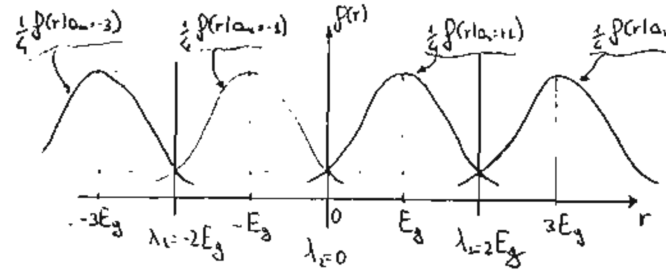
PER MANTENERE LA STESSA DISTANZA TRA GLI M LIVELLI POSSIBILI DEL SEGNALE UTILE ALL'USCITA DEL FILTRO ADATTATO SI IMPONE CHE E_g SIA LA MEDESIMA CHE SI AVEVA NEL CASO DI TRASMISSIONE BINARIA.

All'uscita del filtro adattato negli istanti di campionamento si avrà:

$$r_k = a_k E_g + n_k$$

SI CONSIDERA COME ESEMPIO IL CASO IN CUI $M=4$ DOVE a_k ASSUME CON LA STESSA PROBABILITÀ $\left(\frac{1}{4}\right)$ I VALORI $(-3,-1,1,3)$.

PER STABILIRE LE REGIONI DI DECISIONE IL CRITERIO RIMANE SEMPRE QUELLO DI MINIMIZZARE LA PROBABILITÀ D'ERRORE



SULLA BASE DEL CONFRONTO DELLE DENSITÀ DI PROBABILITÀ SI STABILISCONO I VALORI DELLE SOGLIE DI DECISIONE $\lambda_1 = 2E_g$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2E_g$ SULLA BASE DELLE QUALI IL DECISORE EFFETTUA LA DECISIONE.

Nel caso in cui siano stati trasmessi i due simboli interni $(-1,+1)$ è possibile l'errore in due direzioni, cioè sia verso l'ampiezza più alta sia verso quella più bassa. La probabilità d'errore condizionata alla trasmissione di questi simboli è

$$P(E|a_k=-1) = P(E|a_k=+1) = 2Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$$

Nel caso in cui siano stati trasmessi i due simboli esterni (-3, 3) è possibile l'errore in una sola direzione. Si ottiene

$$P(E|a_k=-3) = P(E|a_k=+3) = Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$$

La probabilità di simbolo errato è pari a:

$$P_s(E) = P(E|a_k=-3)P(a_k=-3) + P(E|a_k=-1)P(a_k=-1) + P(E|a_k=1)P(a_k=1) + P(E|a_k=3)P(a_k=3)$$
$$= \frac{1}{4}Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right) + \frac{1}{4}2Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right) + \frac{1}{4}2Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right) + \frac{1}{4}Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right) = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$$

NEL CASO GENERALE IN CUI SI HANNO M LIVELLI D'AMPIEZZA EQUIPROBABILI $\left(\frac{1}{M}\right)$ LA PROBABILITÀ DI ERRORE DI SIMBOLO VALE

$$P_s(E) = \sum_{i=1}^{M} P(E|a_k=a^{(i)})P(a_k=a^{(i)}) = \frac{1}{M}\left[2(M-2)Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right) + 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)\right] = \frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$$

NEL VALUTARE $P_s(E)$ SI È TENUTO CONTO DEL FATTO CHE PER I DUE LIVELLI ESTERNI LA PROBABILITÀ D'ERRORE È $Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$ MENTRE PER GLI $(M-2)$ LIVELLI INTERNI LA PROBABILITÀ D'ERRORE È $2Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$

SI PUÒ OSSERVARE CHE LA PROBABILITÀ DI ERRORE DI SIMBOLO VARIA TRA $Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$ $(M=2)$ E $2Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$ $(M\to\infty)$.

N.B! RISULTA UTILE ESPRIMERE LA PROBABILITÀ D'ERRORE DI SIMBOLO IN FUNZIONE DELL'ENERGIA MEDIA PER SIMBOLO O BIT RICEVUTO.

NEL CASO DI M SIMBOLI EQUIPROBABILI L'ENERGIA MEDIA PER SIMBOLO VALE

$$E_s = \sum_{i=0}^{M-1} a^{(i)2} E_g P(a^{(i)}) = \frac{E_g}{M}\sum_{i=0}^{M-1} a^{(i)2}$$

NEL CASO DI TRASMISSIONE CON SIMBOLI ANTIPODALI $(a^{(i)} = 2i-(M-1)$ CON $i=0, \ldots, M)$ SI OTTIENE

$$E_s = \frac{E_g}{M}\sum_{i=0}^{M-1}(2i-(M-1))^2 = \frac{M^2-1}{3}E_g$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{N(N-1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{N-1} k^2 = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6}}$$

Esprimendo E_g in funzione di E_s e sostituendo nell'espressione che dà la probabilità d'errore per simbolo si ottiene:

$$P_s(E) = \frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Poiché ad ogni simbolo sono associati $K=\log_2 M$ l'energia media per bit sarà:

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$$

L'espressione della probabilità d'errore di simbolo in funzione di E_b è:

$$P_s(E) = \frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2-1}\cdot\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Il confronto tra le prestazioni di sistemi PAM con diverso numero di simboli è facilitato se si passa dalla probabilità di simbolo errato a quella di bit errato. Per determinare quanti bit si sbagliano ogni volta che si sbaglia un simbolo è necessario fare una premessa sulla codifica binaria delle ampiezze utilizzata in trasmissione. Se si impiega la codifica di GRAY simboli adiacenti sono associati a codifiche binarie che differiscono di un solo bit.

⇓

IN QUESTO CASO SE SI SBAGLIA UN SIMBOLO CON UNO ADIACENTE SI COMMETTE ERRORE SU UNO SOLO DEI $K=\log_2 M$ bit CHE FORMANO IL SIMBOLO

$$P_b(E) \simeq \frac{P_s(E)}{K} = \frac{2(M-1)}{KM}Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

TRASMISSIONE DI SEGNALI IN BANDA PASSANTE

L'OBIETTIVO DI UN SISTEMA DI COMUNICAZIONE È QUELLO DI TRASFERIRE IL SEGNALE ALL'USCITA DELLA SORGENTE D'INFORMAZIONE, O SEGNALE IN BANDA BASE, AD UN DESTINATARIO ATTRAVERSO IL CANALE DI COMUNICAZIONE.

IN ALCUNI CASI, I SEGNALI POSSONO ESSERE INVIATI DIRETTAMENTE SUL CANALE TRASMISSIVO (TRASMISSIONE IN BANDA BASE). IN ALTRI CASI È NECESSARIO ADATTARE LE FORME D'ONDA ALLE CARATTERISTICHE TRASMISSIVE DEL MEZZO, CERCANDO, SE POSSIBILE, DI CONFERIRE AL SEGNALE TRASMESSO UNA CERTA PROTEZIONE CONTRO I DISTURBI PRESENTI.

PER EFFETTUARE LA TRASMISSIONE ATTRAVERSO IL CANALE DI COMUNICAZIONE LA BANDA DI FREQUENZE ORIGINALE DEL SEGNALE VIENE TRASLATA VERSO L'ALTO PER CONSENTIRE LA PROPAGAZIONE DEL SEGNALE NEL MEZZO TRASMISSIVO. IN QUESTI CASI SI PARLA DI TRASMISSIONE IN BANDA PASSANTE.

ESEMPI

• IN UN SISTEMA DI TRASMISSIONE RADIO PER POTER IRRADIARE IN MODO EFFICIENTE L'ENERGIA ELETTROMAGNETICA CHE PORTA L'INFORMAZIONE È NECESSARIO CHE L'ANTENNA DI TRASMISSIONE ABBIA DIMENSIONI DELL'ORDINE DELLA LUNGHEZZA D'ONDA. CONSIDERANDO CHE ALLA FREQUENZA DI 1kHz CORRISPONDE UNA LUNGHEZZA D'ONDA DI 300km, SI COMPRENDE COME SIA NECESSARIO CONVERTIRE I SEGNALI AD ALTA f PRIMA DI TRASMETTERLI.

• SE SI VUOLE TRASMETTERE SU UNO STESSO CANALE DI TRASMISSIONE PIÙ SEGNALI DELLO STESSO TIPO CHE OCCUPANO LA STESSA BANDA È NECESSARIO CHE ESSI SIANO TRASLATI OPPORTUNAMENTE AFFINCHÉ NON SI ABBIA SOVRAPPOSIZIONE.

La traslazione della banda di frequenze di un segnale è compiuta attraverso la MODULAZIONE, che è definita come il processo mediante il quale uno o più parametri che caratterizzano un'onda sinusoidale sono variati in accordo all'informazione da trasmettere.

Il segnale in banda base è detto segnale modulante e il risultato del processo di modulazione è detto segnale modulato.

AL RICEVITORE È NECESSARIO RIOTTENERE IL SEGNALE ORIGINALE. IL PROCESSO INVERSO COMPIUTO IN RICEZIONE CHE EFFETTUA LA TRASLAZIONE IN BANDA BASE È DETTO DEMODULAZIONE.

PRINCIPALI METODI DI MODULAZIONE

Sia data un'onda sinusoidale a frequenza f_0, ampiezza a e fase ϕ_0:

$$a \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$$

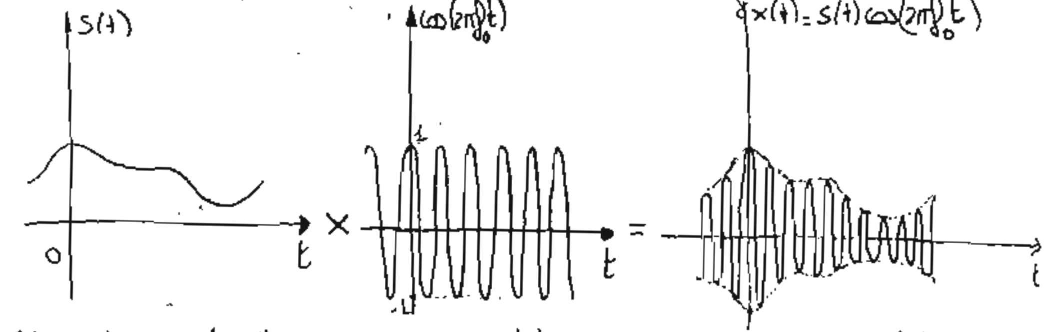
MODULAZIONE D'AMPIEZZA

Si parla di MODULAZIONE D'AMPIEZZA (AM, Amplitude Modulation) quando l'ampiezza della sinusoide viene fatta variare in accordo al segnale d'informazione $s(t)$. Si ottiene quindi l'espressione del segnale modulato in ampiezza

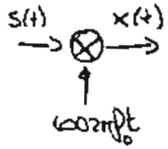
$$x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$$

dove $a(t) = k\, s(t)$, dove k rappresenta una costante di proporzionalità.

Allo scopo di rappresentare graficamente l'andamento nel tempo del segnale modulato in ampiezza si consideri il caso in cui $k=1$ e $\phi_0=0$. Si ha



Schematicamente l'operazione di modulazione viene rappresentata come



SI CONSIDERI ORA LA TRASFORMATA DEL SEGNALE MODULATO IN AMPIEZZA:

$$X(f)=\mathcal{F}[x(t)]=\mathcal{F}[s(t)\cos(2\pi f_0 t)]$$

POICHÉ IL PRODOTTO NEI TEMPI EQUIVALE ALLA CONVOLUZIONE NELLE FREQUENZE, SI OTTIENE

$$X(f)=\mathcal{F}[s(t)]*\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t)]$$

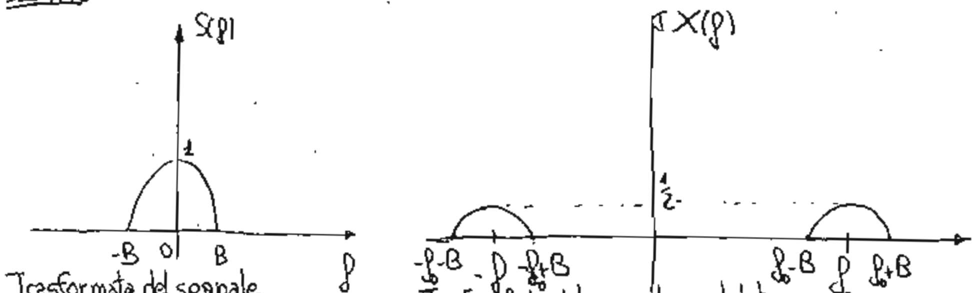
$$=S(f)*\left\{\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{X(f)=\frac{1}{2}S(f-f_0)+\frac{1}{2}S(f+f_0)}$$

Spettro del segnale modulato

ESEMPIO



Trasformata del segnale in banda base

Trasformata del segnale modulato in ampiezza

OSS1 Per effetto della modulazione lo spettro del messaggio originale $S(f)$ alle frequenze negative diventa completamente visibile alle frequenze positive purché $f_0>B$. (Questo è uno dei motivi per cui è importante il concetto di frequenza negativa).

OSS2 Relativamente alle frequenze positive, la parte di spettro tra le frequenze f_0 e f_0+B è detta **BANDA LATERALE SUPERIORE** mentre la parte compresa tra f_0-B e f_0 è detta **BANDA LATERALE INFERIORE**

La larghezza di banda del segnale modulato in ampiezza è pari a

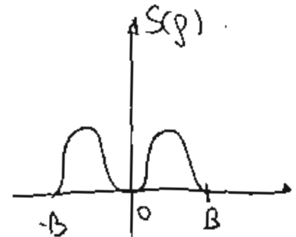
$$B_T=2B$$

$$\Downarrow$$

Si ha un'occupazione di banda doppia rispetto a quella che si avrebbe effettuando la trasmissione in banda base.

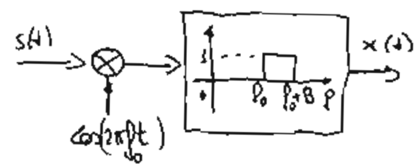
OSS. LO SPETTRO DEL SEGNALE MODULATO IN AMPIEZZA È RIDONDANTE.
INFATTI LA PARTE DI SPETTRO CONTENUTA IN UNA DELLE DUE BANDE LATERALI È SPECULARMENTE IDENTICA A QUELLA CONTENUTA NELL'ALTRA BANDA LATERALE. BASTERÀ QUINDI TRASMETTERE UNA DELLE SEMIBANDE, OCCUPANDO COSÌ UNA BANDA B PARI A QUELLA CHE SI OCCUPEREBBE IN BANDA BASE. IN QUESTO CASO SI PARLA DI MODULAZIONE D'AMPIEZZA A BANDA LATERALE UNICA (SSB, Single Sideband).

ES

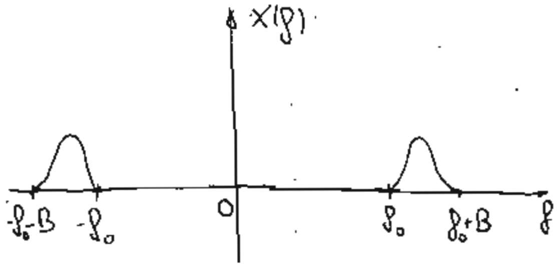


Spettro del segnale in banda base

Per effettuare la modulazione d'ampiezza a banda laterale unica, moltiplico per un'onda sinusoidale a frequenza f_0 e filtro il segnale con un passabanda ideale tra f_0 e f_0+B

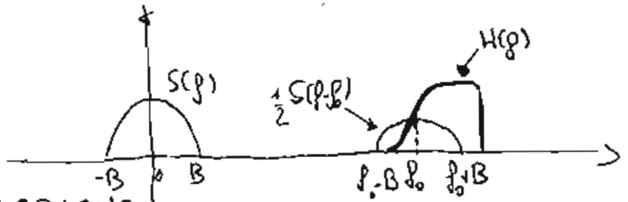


LO SPETTRO $X(f)$ SARÀ



L'USO DELLA BANDA LATERALE UNICA PUÒ ESSERE PROBLEMATICO QUANDO LO SPETTRO DEL SEGNALE MODULANTE HA COMPONENTI SIGNIFICATIVE INTORNO ALLA FREQUENZA NULLA. IN TAL CASO IL SEGNALE MODULATO HA COMPONENTI SPETTRALI INTORNO A f_0 E NON È AGEVOLE SEPARARE UNA DELLE 2 BANDE LATERALI DALL'ALTRA.

IN QUESTO CASO SI ADOTTA UNA **SOLUZIONE DI COMPROMESSO** TRA LA MODULAZIONE D'AMPIEZZA NORMALE (BANDA OCCUPATA 2B) E QUELLA A BANDA LATERALE UNICA (BANDA B): **SISTEMA A BANDA LATERALE PARZIALMENTE SOPPRESSA** (VSB, Vestigial Sideband) IN CUI SI TRASMETTE UNA BANDA LATERALE E PARTE DELL'ALTRA FILTRANDO IL SEGNALE MODULATO A DOPPIA BANDA LATERALE CON UN FILTRO $H(f)$ A SIMMETRIA DISPARI RISPETTO A f_0



DEMODULAZIONE

LA DEMODULAZIONE VIENE EFFETTUATA IN RICEZIONE CON UN'OPERAZIONE DI MOLTIPLICAZIONE DEL SEGNALE MODULATO CON UN'ONDA SINUSOIDALE ALLA STESSA f E FASE DELLA PORTANTE (DEMODULAZIONE COERENTE)

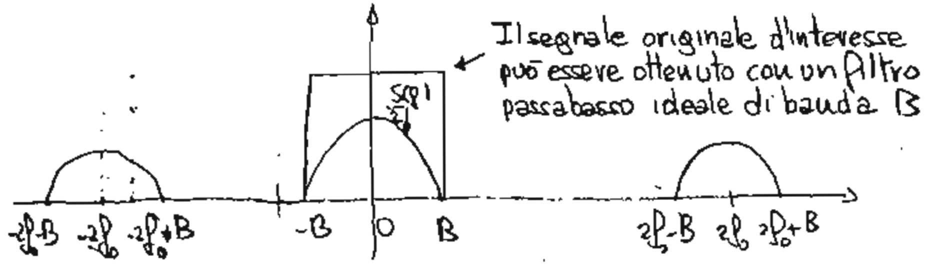
Si ottiene

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) = s(t)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t) = s(t)\cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{s(t)}{2}\left(1+\cos(2\pi 2f_0 t)\right)$$

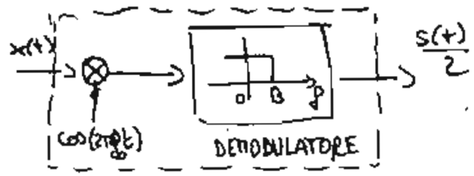
$\Downarrow$

LO SPETTRO DEL SEGNALE ALL'USCITA DEL DEMODULATORE È COSTITUITO DAL SEGNALE ORIGINARIO A CUI SI SOMMA LA SUA TRASLAZIONE INTORNO ALLA FREQUENZA $2f_0$:

$$\frac{S(f)}{2} + \frac{S(f-2f_0)}{4} + \frac{S(f+2f_0)}{4}$$



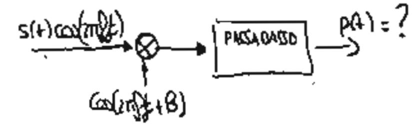
Lo schema del demodulatore è:



N.B! SI RIBADISCE IL CONCETTO CHE LA DEMODULAZIONE COERENTE RICHIEDE CHE L'ONDA SINUSOIDALE CON CUI SI MOLTIPLICA IL SEGNALE MODULATO SIA ESATTAMENTE ALLA STESSA f E FASE DELL'ONDA PORTANTE COSÌ COME ESSA SI PRESENTA ALL'INGRESSO DEL DEMODULATORE

ESERCIZIO

Determinare l'effetto di un errore di fase B sul segnale demodulato.



Il prodotto è pari a

$$s(t)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t+\beta) = s(t)\left(\frac{1}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t+\beta)\right)$$

Il segnale all'uscita del filtro passabasso è pari a

$$p(t) = \frac{s(t)}{2}\cos\beta$$

SI PUÒ OSSERVARE CHE PER $\beta = \frac{\pi}{2}$ IL SEGNALE IN USCITA È NULLO

PER QUANTO SI È APPENA DETTO RISULTA CHIARO CHE IMPIEGANDO UNA STESSA f PORTANTE È POSSIBILE TRASMETTERE DUE ONDE MODULATE IN AMPIEZZA (CIASCUNA A DOPPIA BANDA LATERALE) SULLO STESSO CANALE SENZA INTERFERENZA MUTUA.

AFFINCHÈ QUESTO ACCADA LE DUE PORTANTI DEVONO ESSERE IN QUADRATURA, CIOÈ SFASATE DI $\frac{\pi}{2}$ ($\cos(2\pi f_0 t)$ e $\sin(2\pi f_0 t)$)

QUINDI DA UN SEGNALE COMPOSITO

$$x(t) = s_1(t)\cos(2\pi f_0 t) + s_2(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

ATTRAVERSO UNA DEMODULAZIONE COERENTE CON $\cos(2\pi f_0 t)$ È POSSIBILE RECUPERARE $s_1(t)$:

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \longrightarrow s_1(t)$$

MENTRE ATTRAVERSO UNA DEMODULAZIONE COERENTE CON $\sin(2\pi f_0 t)$ È POSSIBILE RECUPERARE $s_2(t)$

$$x(t)\sin(2\pi f_0 t) \longrightarrow s_2(t)$$

NB! L'efficienza di questo metodo di modulazione, in termini di banda occupata è doppia rispetto alla normale modulazione d'ampiezza: SI TRASMETTONO DUE SEGNALI AVENTI BANDA B IN BANDA BASE SOVRAPPOSTI TRAMITE DUE PORTANTI IN QUADRATURA CON UN'OCCUPAZIONE DI BANDA SUL CANALE PARI A 2B, (SI HA LA STESSA EFFICIENZA DELLA BANDA LATERALE UNICA).

MODULAZIONE ANGOLARE

Si parla di modulazione angolare quando l'argomento dell'onda sinusoidale è variato in accordo al segnale d'informazione. SI AVRÀ QUINDI

$$a\cos(\psi(t))$$

LA MODULAZIONE ANGOLARE PUÒ ESSERE ULTERIORMENTE SUDDIVISA IN

1) MODULAZIONE DI FASE (PM, Phase Modulation)

$$\psi(t) = 2\pi f_0 t + \phi_0 + k\,s(t)$$

2) MODULAZIONE DI FREQUENZA (FM, Frequency Modulation)

$$\psi(t) = 2\pi f_0 t + \phi_0 + k\int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,d\tau$$

La frequenza istantanea è pari a

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\psi(t)}{dt} = f_0 + \frac{k}{2\pi}s(t)$$

MENTRE LA MODULAZIONE D'AMPIEZZA CONSISTE IN UNA TRASPOSIZIONE IN f DELLO SPETTRO DEL SEGNALE DALLA BANDA BASE ALLE f PIÙ ELEVATE, NELLA MODULAZIONE ANGOLARE LO SPETTRO DEL SEGNALE NON SOLO È TRASPOSTO IN f MA È ANCHE TRASFORMATO IN MODO COMPLESSO.

SISTEMI DI MODULAZIONE NUMERICI

Il segnale numerico in banda base

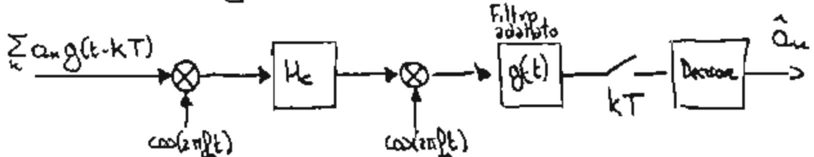
$$m(t) = \sum_k a_k g(t-kT)$$

viene trasferito in banda passante con le stesse modalità viste per il caso di un segnale analogico.

MODULAZIONE D'AMPIEZZA (ASK, Amplitude Shift Keying)

La modulazione d'ampiezza come si è visto equivale ad una traslazione in frequenza → l'analisi del sistema può essere ricondotta al caso di trasmissione in banda base.

Lo schema è il seguente

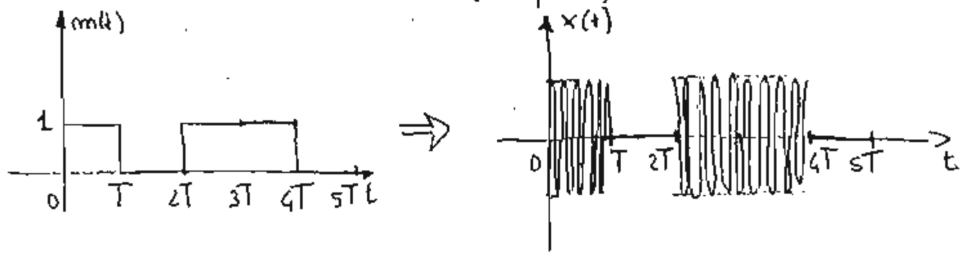


Le prestazioni sono identiche a quelle che si hanno con una trasmissione a M livelli in banda base

Es $m(t) = \sum_k a_k \, rect\left(\frac{t-kT-T/2}{T}\right)$ con $a_k \in \{0,1\}$ (trasmissione ON-OFF)

Per fare in modo che ogni simbolo trasmesso contenga un numero intero di cicli dell'onda portante, la frequenza di quest'ultima è scelta in modo che sia pari ad un multiplo intero di $1/T$. Il segnale modulato sarà pari a

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t) = \sum_k a_k \, rect\left(\frac{t-kT-T/2}{T}\right)\cos 2\pi f_0 t$$



MODULAZIONE D'AMPIEZZA IN QUADRATURA (QAM, Quadrature Amplitude Modulation)

Si è visto che 2 portanti isofrequenziali sfasate di $\pi/2$ permettono di trasportare in modulazione d'ampiezza due segnali sovrapposti che sono perfettamente separabili attraverso una demodulazione coerente.

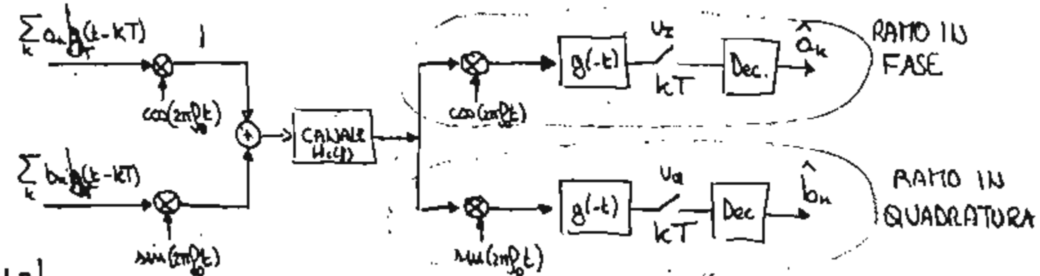
Si considerino i 2 segnali in banda base

$$\sum_k a_k g_T(t-kT) \qquad \sum_k b_k g_T(t-kT)$$

Il segnale modulato QAM è dato da

$$\sum_k a_k g_T(t-kT)\cos(2\pi f_0 t) + \sum_k b_k g_T(t-kT)\sin(2\pi f_0 t)$$

LO SCHEMA DEL MODULATORE E DEL DEMODULATORE È IL SEGUENTE



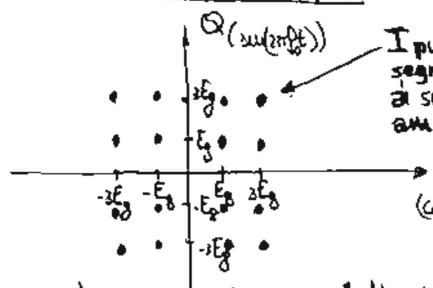
N.B.!

I VALORI ASSUNTI DAI CAMPIONI DEI SEGNALI UTILI NEGLI ISTANTI DI CAMPIONAMENTO SUL RAMO IN FASE E SU QUELLO IN QUADRATURA POSSONO ESSERE RAPPRESENTATI COME PUNTI DI UN DIAGRAMMA VETTORIALE I CUI ASSI ORTOGONALI RAPPRESENTANO LE PORTANTI

Es $a_k, b_k \in \{\pm1, \pm3\}$

Ho 16 possibili punti:

16 QAM



I punti rappresentano i possibili segnali ricevuti corrispondenti ai simboli trasmessi con ampiezze e fasi risultanti dalla somma dei 2 canali in quadratura

N.B.! Si è indicata con E_g l'energia di $g(t)\cos(2\pi f_0 t)$ pari a quella di $g(t)\sin(2\pi f_0 t)$

Se questo sistema viene impiegato per la trasmissione di dati binari, ad ogni impulso sono associati 4 bit ($\log_2 16$) $\Rightarrow$ sia ad a_k che a b_k sono associati 2 bit.

NATURALMENTE I 2 SEGNALI NUMERICI POSSONO DERIVARE DALLA SUDDIVISIONE IN 2 FLUSSI PARALLELI DI UN UNICO FLUSSO DATI PROVENIENTE DA UN'UNICA SORGENTE.

ESERCIZIO

Si consideri la trasmissione di un flusso di dati binari ad un ritmo $R_b = 64$ kbit/s su un canale ideale. Il filtro di trasmissione sia del tipo radice di Nyquist con fattore di rolloff $\alpha = 0.2$. Determinare la banda occupata che si ha trasmettendo il segnale in banda base e confrontarla con quella che si avrebbe trasmettendo lo stesso flusso con una modulazione 4-QAM.

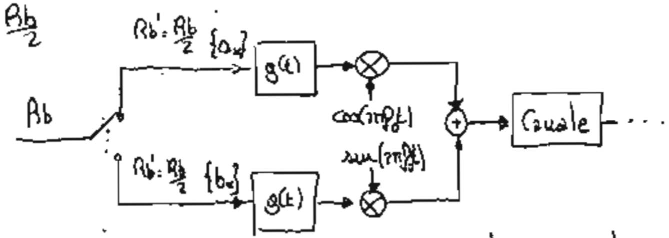
SOLUZIONE

$$B_{2\text{-PAM}} = \frac{R_b}{2}(1+\alpha) = \frac{64 \cdot 10^3}{2}(1+0.2) = 38.4 \cdot 10^3 \text{ Hz} = 38.4 \text{ kHz}$$

Con una 4-QAM ad ogni impulso sono associati $\log_2 4 = 2$ bit.

Il flusso binario viene suddiviso in due flussi (uno sul ramo in quadratura e l'altro su quello in fase) aventi ciascuno ritmo

$R_b' = \frac{R_b}{2}$



$\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono sequenze binarie. I due segnali 2-PAM modulano in ampiezza due portanti ortogonali con frequenza portante f_0.

Per il calcolo della banda occupata dal segnale modulato è necessario tener conto del fattore moltiplicativo 2

$$B_{4\text{-QAM}} = 2 \cdot \frac{R_b'}{2}(1+\alpha) = \frac{R_b}{2}(1+\alpha) = 38.4 \text{ kHz}$$

fattore moltiplicativo dovuto alla modulazione d'ampiezza

banda occupata dal segnale in banda base

SI HA LA STESSA OCCUPAZIONE DI BANDA CHE SI AVEVA NEL CASO DI TRASMISSIONE 2-PAM IN BANDA BASE.

QUALE SAREBBE STATA L'OCCUPAZIONE DI BANDA SE FOSSE STATA IMPIEGATA UNA 16-QAM?

SU OGNUNO DEI 2 RAMI IN QUADRATURA I SIMBOLI TRASMESSI POSSONO ASSUMERE 4 LIVELLI D'AMPIEZZA. IL RATE DI SIMBOLO SU OGNUNO DEI 2 CANALI E' PARI A:

$$R_s = \frac{R_b'}{\log_2 4} = \frac{R_b'}{2} = \frac{R_b}{4}$$

L'OCCUPAZIONE DI BANDA DEL SEGNALE MODULATO E' PARI A

$$B_{16\text{-}QAM} = 2\,\frac{R_s}{2}(1+\alpha) = \frac{R_b}{4}(1+\alpha) = 19.2\ kHz$$

IN GENERALE CON UNA M^2-QAM LA BANDA NECESSARIA PER EFFETTUARE LA TRASMISSIONE DI UNA SEQUENZA BINARIA CON rate R_b E' PARI A:

$$B_{M^2\text{-}QAM} = \frac{1}{\log_2 M}\,\frac{R_b}{2}(1+\alpha) = \frac{B_{2\text{-}PAM}}{\log_2 M}$$

$B_{2\text{-}PAM}$: banda necessaria per trasmettere la sequenza binaria in banda base con una 2-PAM

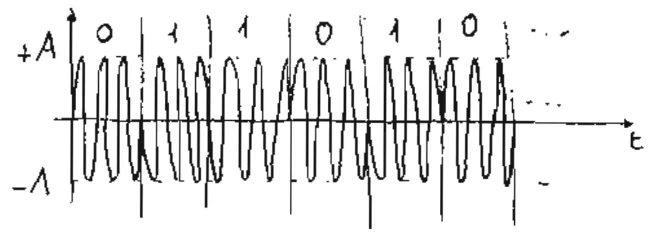
MODULAZIONE DI FASE NUMERICA (PSK, Phase Shift Keying)

L'informazione è trasportata dalla fase di un'onda portante di frequenza e ampiezza costante:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta_k),\quad \theta_k = (2m+1)\frac{\pi}{M}\quad \text{con } m = 0,\dots,M-1$$

Se θ_k può assumere M valori, significa che ogni impulso sinusoidale rappresenta $\log_2 M$ bit d'informazione.

Es $M=2 \Rightarrow$ i possibili valori per le fasi sono $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$. Si associa al bit 1 la fase $\frac{\pi}{2}$ e al bit 0 la fase $\frac{3}{2}\pi$. La trasmissione della sequenza 0 1 1 0 1 0 .. equivale alla trasmissione del segnale rappresentato nella figura che segue:



Equivale ad una ASK dove il segnale numerico modulante è binario antipodale (2-PAM con simboli ±1)

Poiché

$$A\cos(2\pi f_0 t + \theta_k) = \underbrace{A\cos\theta_k}_{a_k}\cos(2\pi f_0 t) - \underbrace{A\sin\theta_k}_{b_k}\sin(2\pi f_0 t)$$

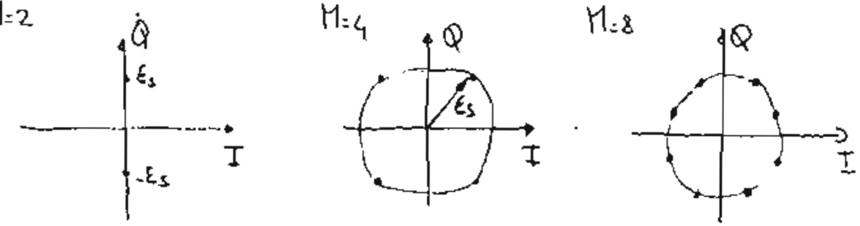
$$\Downarrow$$

E' POSSIBILE RAPPRESENTARE LA MODULAZIONE PSK COME UNA MODULAZIONE QAM DOVE LE COMPONENTI SULLE DUE PORTANTI ORTOGONALI SONO LEGATE TRA LORO DALLA FASE θ_k:

$$\sum_k A\cos\theta_k \,\mathrm{rect}\left(\frac{t-kT-T/2}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t) - \sum_k A\sin\theta_k\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-kT-T/2}{T}\right)\sin(2\pi f_0 t)$$

QUESTO SIGNIFICA CHE E' POSSIBILE UTILIZZARE IL DIAGRAMMA CON ASSI ORTOGONALI IN FASE E QUADRATURA PER RAPPRESENTARE IL SEGNALE PSK.

M=2 M=4 M=8



BPSK (coincide come già detto con la ASK dove il segnale modulante è binario antipodale)

4-PSK (coincide con la 4-QAM)

8-PSK

SI PUÒ OSSERVARE CHE I PUNTI RAPPRESENTATIVI SONO DISPOSTI IN MODO EQUISPAZIATO SU UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO E_s CHE RAPPRESENTA L'ENERGIA PER SIMBOLO