

Fondamenti di segnali - Riassunto

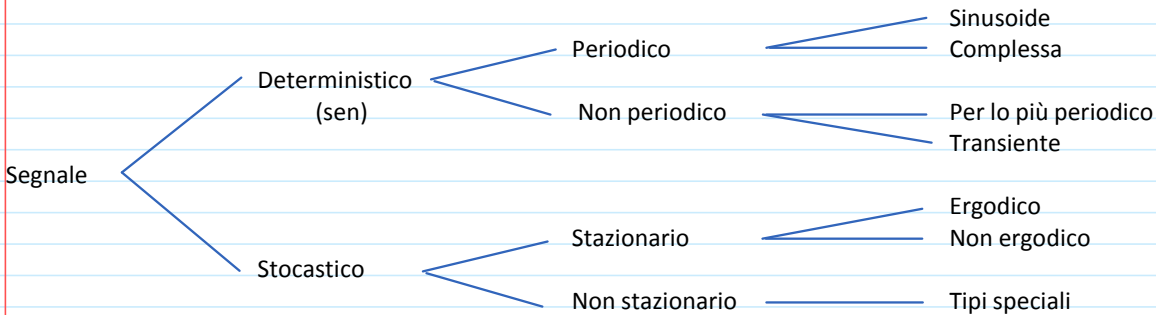
lunedì 18 giugno 2012
18:58

Un **EEG** è un segnale stocastico stazionario a tratti e, se misurato con il sistema internazionale 10/20, ha diversi ritmi:

δ	< 4 Hz	sofferenza cerebrale
θ	4-8 Hz	stress emozionale
α	8-13 Hz	occhi chiusi
β	>13 Hz	compiti cognitivi

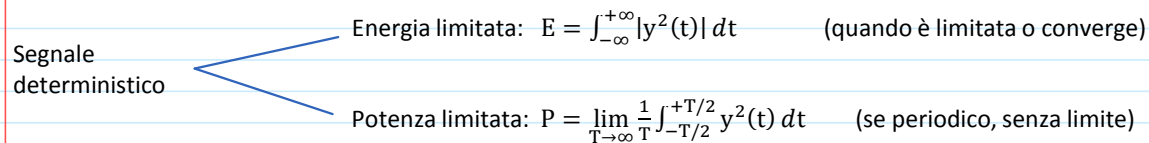
Un **ECG** è la misurazione del potenziale elettrico registrato dalle 12 derivazioni prefissate (6 arti + 6 toraciche). La prima derivazione segue lo schema classico PQRST delle depolarizzazioni e ripolarizzazioni.

Un segnale a tempo continuo (**analogico**) è definito in ogni istante, un segnale a tempo discreto si ottiene campionando il segnale continuo secondo un periodo di campionamento T_c .



Un **segnale deterministico** ha una funzione nel tempo che lo descrive.

Un **segnale stocastico** invece viene descritto attraverso le sue caratteristiche statistiche; si dice anche stazionario se le caratteristiche statistiche non variano nel tempo. La **stazionarietà** è debole se rimangono costanti media e varianza e se l'autocorrelazione (ACF) dipende dal ritardo τ tra i campioni. Il segnale stocastico stazionario è **ergodico** se si possono stimare le caratteristiche statistiche da una singola realizzazione del processo.



L'**ampiezza efficace** (*root mean square*) del segnale è $A_{eff} = \sqrt{P}$, misurabile anche in dB con la formula $A_{eff}(dB) = 20 \log(A_{eff})$. Anche la potenza è misurabile in dB, si applica la stessa trasformazione con un fattore 10 anziché 20.

Il rapporto tra le ampiezze efficaci di un segnale ideale ed uno sporcato da un rumore è il cosiddetto rapporto segnale - rumore (SNR).

Teorema di **Shannon**: $f_c \geq 2f_{max}$

L'**impulso di Dirac** $\delta(t)$ è una funzione con area unitaria ma base $\rightarrow 0$ e posta nell'origine, così $E \rightarrow \infty$; quindi $\delta(0)=1$ e $\delta(t)=0$ per $t \neq 0$.

Il **pettine di Dirac** è una distribuzione di infiniti impulsi a intervalli regolari T_c : $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - iT_c)$

Moltiplicato per un segnale continuo, si ottiene un segnale a tempo discreto di periodo T_c : $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} y(t) \delta(t - iT_c)$

Se non si vuole perdere dell'informazione dal segnale, è importante il teorema di Shannon (sopra).

La **crosscorrelazione (CCF)** tra processi stocastici stazionari ergodici è la covarianza a distanza k tra due segnali (con la **ACF**, $y_1=y_2$)

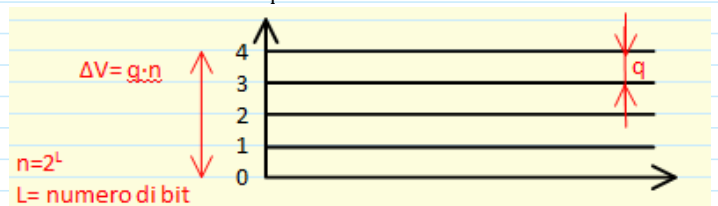
polarizzata

$$CCF(k) = \frac{1}{N} \sum_i^{N-1} y_1(i)y_2(i+k)$$

non polarizzata

$$CCF(k) = \frac{1}{N - |k|} \sum_i^{N-1} y_1(i)y_2(i+k)$$

Può capitare che sovrapposto al segnale ci sia un **rumore** scorrelato a media nulla (rumore stocastico indipendente): la varianza del segnale allora sarà la somma delle varianze del segnale pulito e del rumore.



Con l'**analisi di Fourier** ogni segnale diventa una somma di sinusoidi di frequenza $1/T$ (fondamentale) e k/T (armoniche). Valgono il teorema della risposta in frequenza ($f_{out} = f_{in}$) e il principio di sovrapposizione degli effetti.

$$y(t) = m + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) = m + \sum_{\varphi=1}^{\infty} c_k \cos(\omega_k t) + d_k \sin(\omega_k t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_k t}$$

Il calcolo degli a_k va nelle frequenze, mentre il ritorno a $y(t)$ va nel tempo.

Nello scomporre nelle sinusoidi, sono importanti anche i coefficienti delle sinusoidi:

- $k=0$: componente continua
- $k=1$: armonica fondamentale
- $k+$: armoniche superiori

Con le funzioni non periodiche si considera il periodo $T \rightarrow \infty$.

$$Y(\omega) = FT\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \quad [\text{Trasformazione lineare}]$$

Sottoponendo un'onda quadra, la $Y(\omega)$ ha un lobo centrale tanto maggiore quanto è minore la base dell'onda.

Teorema di **Parseval**:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega$$

Convoluzione temporale:

$$y(t) = y_1(t) * y_2(t) = \int_{-\infty}^t y_1(\xi)y_2(t-\xi) d\xi$$

Un campionamento di periodo T_c con un pettine di Dirac nel tempo continuo equivale a replicare $Y(\omega)$ per tutti i multipli $\omega_c = 2\pi f_c$; bisogna usare Shannon quindi affinché i picchi non si sovrappongano!

$$f_{Ny} = \frac{f_c}{2} \geq f_{max}$$

Il fenomeno dell'**aliasing** si verifica quando non viene rispettato Shannon: i picchi nelle frequenze si sovrappongono ai lati sommandosi tra loro. Quando s'è scelta una f_c secondo Shannon, bisogna pulire tutte le f tra f_c e f_N con un filtro antialiasing.

Per ricostruire un segnale da un campionamento bisogna interpolare i dati con un filtro passabasso ideale, eliminando le repliche dei multipli di f_c tenendo quelle originarie.

Trasformata di Fourier nel tempo discreto (**DTFT**):

$$Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)e^{-j\Omega k} \quad \text{con } \Omega = \omega T_c = 2\pi \frac{f}{f_c}$$

Vale ancora il teorema della risposta in frequenza e la convoluzione (che è la risposta di un sistema discreto a riposo):

$$y(i) = u(i) * h(i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)h(i-k)$$

La **trasformata Z** è per funzioni a tempo discreto (si ritorna alla DTFT).

$$Z\{y(k)\} = Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)z^{-k} \quad \text{con } z = e^{j\Omega}$$

Anche questa trasformazione è lineare, vale la convoluzione e la proprietà del ritardo unitario.

$$Z\{y(k-1)\} = z^{-1}Y(z)$$

I poli e gli zeri dei filtri variano a seconda del periodo di campionamento:

- $T_c > t$ di sistema (sottocampionamento): i poli si spostano verso Ω_N e, se complessi, possono essere equivocati se $\Omega_N > \pi$;
- $T_c < t$ di sistema (sovracampionamento): i poli vanno verso $z=1$.

Si può passare da $H(s)$ a $H(z)$ attraverso la trasformazione bilineare: $s = \frac{2}{T_c} \frac{z-1}{z+1}$

La trasformata di Fourier discreta (**DFT**) ottiene N valori nelle frequenze da N campioni nel tempo (dato un segnale campionato per NT_c tempo e $0 < \Omega < \pi$): è la versione campionata della DTFT!

$$Y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} y(i)e^{-j\Delta\Omega kn} \quad \text{con } \Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}$$

Se N è una potenza di 2, posso applicare la trasformata veloce di Fourier (FFT).

Lo **zero padding** aggiunge valori nulli al campionamento: non cambia nulla, ma permette di avere i campioni necessari per applicare la FFT. La raccolta dei campioni avviene mediante una finestra: al di fuori, il valore è (supposto) nullo.

Una finestra ulteriore smussa la distorsione iniziale e finale che si avrebbe.

I **filtri FIR** hanno m poli nell'origine ed m zeri dipendenti da filtro; la risposta all'impulso sono i coefficienti ed è sempre stabile. C'è un ritardo di $(N-1)/2$ nella risposta.

Vengono progettati attraverso tre metodi principali:

- **Finestra temporale:** troncamento di una risposta infinita per renderla finita attraverso un prodotto che diventa una convoluzione nelle frequenze. La risultante avrà un lobo principale tanto più grande quanto la finestra è più piccola e dei lobi laterali tanto più visibili (per evitare, finestra a pesi non uniformi)
- **Campionamento in frequenza:** si campiona la risposta di un passabasso, si calcola la DFT e si applica la FFT inversa per avere la risposta all'impulso (non si è impostata la DTFT, che ha dei ripple)
- **Equiripple:** risolve il problema della transizione e dei ripple imponendo un ripple uniforme in banda passante ed oscura (ripple minore vuole una transizione maggiore)

	Pro	Contro
FIR	<ul style="list-style-type: none"> - Elevata flessibilità - Meno distorsioni nel modulo - Fase lineare e quindi meno distorsioni se Fdt simmetrica - Sempre stabili - Algoritmi veloci e veloce calcolo in progetto 	<ul style="list-style-type: none"> - Alte prestazioni solo con molti campioni - Alti tempi di calcolo - Meno flessibilità nel variare l'ampiezza dei lobi per i poli solo nell'origine - Non esiste una famiglia standard - F_{cut} imprecisa
IIR	<ul style="list-style-type: none"> - Alte prestazioni anche con pochi campioni (filtri ideali) - Poche difficoltà di calcolo - Poli in qualunque posizione nel cerchio unitario - Famiglie classiche di filtri (B, C, E) 	<ul style="list-style-type: none"> - Scarsa flessibilità (filtri tradizionali in analogico) - Fase non lineare - Possono diventare instabili (anche se partono da stabili)

Una serie di due filtri è uguale ad uno unico dalla convoluzione delle due risposte all'impulso.

Per trovare in un segnale un evento preciso, che di solito è un'onda con determinate caratteristiche, si può usare un **template** (morfologia fissa) o il suo contenuto in frequenza. Il problema è distinguerlo dal rumore per stabilire il tempo esatto.

Un template ha più informazioni di partenza: attraverso un filtro matched si cerca nella risposta il template prefissato (in ampiezza e fase) continuando a traslarlo: il risultato, se supera una soglia, è un riconoscimento.

Si può cercare anche con la crosscorrelazione polarizzata. Il template è sensibile alle variazioni di media (segnale rialzato) o di ampiezza: basta derivare nel primo caso ed equalizzare nel secondo.

Riconoscere il picco QRS di un ECG è un lavoro in base alla frequenza: le anomalie indicano problemi seri.

Esiste l'algoritmo di **Pan-Tompkins** per identificarlo, composto da:

1. Filtro passabanda
2. Derivata
3. Elevato al quadrato
4. Media mobile

I **potenziali evocati (PE)** sono risposte a stimoli elettrici per evidenziare eventuali lesioni dei sensi o dei nervi. Nella risposta si misurano i tempi di latenza (tempo a manifestarsi) dei picchi e l'ampiezza dei medesimi.

Un PE visivo è di media latenza ed il picco più significativo del test pattern reversal (griglia bitonale che inverte i colori) è il P100 (picco positivo che si presenta dopo 100 ms).

Si può applicare la **media sincrona (averaging)** ipotizzando:

1. Additività segnale-rumore ($y'(t)=y(t)+n(t)$);
2. Non variabilità del segnale evocato;
3. Rumore come processo casuale stazionario scorrelato a media nulla e varianza σ^2 .

E' una tecnica per la quale, se si aumentano le N ripetizioni, la media del rumore tende a zero:

$$SNR = 20 \text{ Log} \left(\frac{rms_{PE}}{rms_n} \sqrt{N} \right)$$

	Malati	Sani
Test +	TP	FP
Test -	FN	TN

Accuratezza

$$Ac = \frac{TP + TN}{n} \%$$

Sensibilità

$$Se = \frac{\text{Malati trovati}}{\text{Malati totali}} = \frac{TP}{TP + FN} \%$$

Specificità

$$Sp = \frac{\text{Sani trovati}}{\text{Sani totali}} = \frac{TN}{TN + FP} \%$$

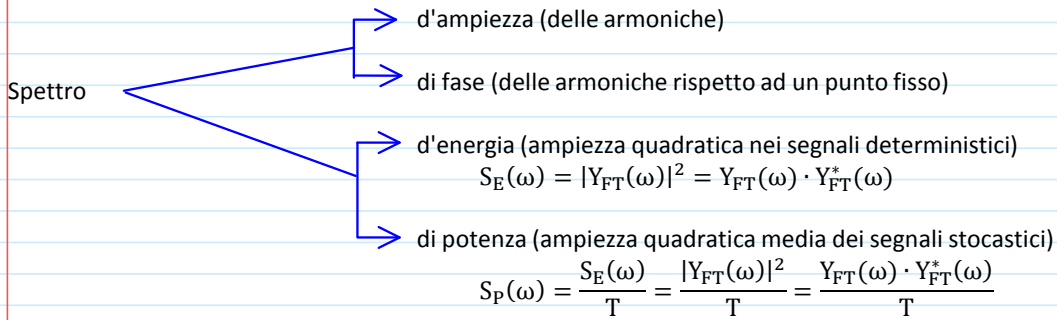
Per validare un test di riferimento prima si analizza il caso di parità di sani e malati (ideale), poi viene applicato in ambito ospedaliero (reale).

La **curva ROC** mostra la relazione tra Se (TP) sulle ordinate e 1-Sp (FP) sulle ascisse in base alla soglia arbitraria imposta.

Un buon riconoscitore ha una curva con l'area sottesa tendente a 1, altrimenti l'area tende a 0,5.

L'**analisi spettrale** è lo studio del contenuto in frequenza di un segnale.

Lo **spettro** è il tracciato ottenuto dalla FT di un segnale stazionario.



In un processo discreto, stocastico, stazionario, ergodico a media nulla, la potenza è uguale alla varianza σ^2

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(i)^2 = \text{Potenza}$$

Teorema di Wiener-Khinchin:

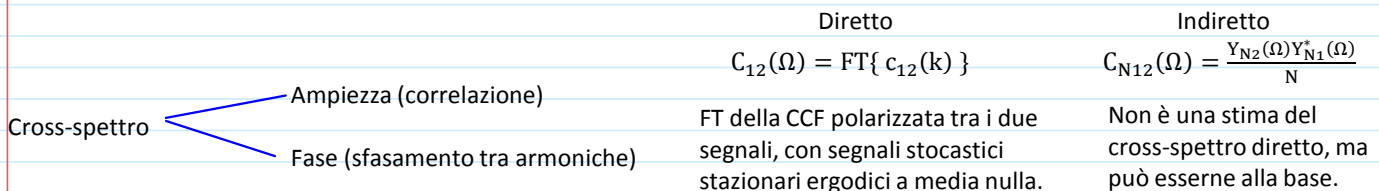
lo spettro di potenza è la FT della ACF

$$S(\Omega) = \text{FT}\{r(k)\}$$

Spettro di potenza = densità spettrale di potenza = **PSD**

	Periodogramma di Schuster	Metodo di Bartlett	Metodo di Welch
Costruzione	- Diretto: modulo quadratico della DTFT finestrato su N campioni - Indiretto: calcolo la DTFT della stima polarizzata della ACF	Divido il segnale lungo N campioni in K finestre di M=N/K campioni ciascuna, calcolo lo spettro di ogni finestra e faccio la media con tutti.	Divido il segnale lungo N campioni in K finestre di M=N/K campioni + overlap di K-1 finestre del 50%, calcolo lo spettro di ogni finestra e faccio la media con tutti
Finestratura	Una finestra rettangolare di base N = Triangolare della ACF di base N	K finestre implicite rettangolari di base M = Triangolari della ACF di base 2M-1	2K-1 finestre esplicite di Hamming (raccordo dei bordi a zero)
Lobo laterale		$4\pi/M$ di larghezza a -13 dB	$8\pi/M$ di larghezza a -31 dB
Caratteristiche	-riferimento- (↑=miglioramento) (↓=peggioramento)	↓ K per la risoluzione in frequenza ↑ K per la varianza della stima ↑ \sqrt{K} per il SNR Presenza di spectral leakage	↓ 2K per la risoluzione in frequenza ↑ 2K-1 per la varianza della stima ↑ $\sqrt{2K-1}$ per il SNR Riduzione dello spectral leakage

Lo studio della crosscorrelazione di due segnali nel dominio delle frequenze è effettuato mediante il **cross-spettro**, che non indica necessariamente una relazione tra i due, ma se esiste ed è nota, mostra come funziona.



Quindi per effettuare una stima del cross-spettro occorre:

1. Dividere M campioni in K finestre (overlapping, finestratura implicita/esplicita)
2. Trovare la DTFT (FFT con zero padding) di ogni spezzone l ($1 \leq l \leq K$)
3. In ogni spezzone l $C_l = Y_{l1}^*(\Omega)Y_{l2}(\Omega)$ è in modulo il prodotto dei moduli e in fase l'angolo di y_2 riferito ad y_1
4. Calcolare la media per ogni Ω per ogni finestra

Quest'ultimo passaggio è necessario perché essendo $\Omega \in \mathbb{C}$, $C_l(\Omega)$ trova una buona correlazione anche quando questa è nulla: infatti se sfruttiamo i fasori, si vede che una scarsa correlazione è ottenibile con vettori che si annullano a vicenda, mentre una buona correlazione c'è quando ho uno sfasamento minimo costante.

La **coerenza quadratica** è il cross-spettro rapportato allo spettro di potenza dei processi di partenza:

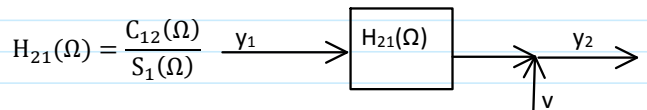
$$K_{12}^2(\Omega) = \frac{C_{12}(\Omega)C_{12}^*(\Omega)}{S_1(\Omega)S_2(\Omega)}$$

Con $0 \leq K_{12}^2(\Omega) \leq 1$ ed indica il grado di correlazione tra segnali frequenza per frequenza.

Solo in alcuni casi si può dire che esiste una relazione dalla CCF:

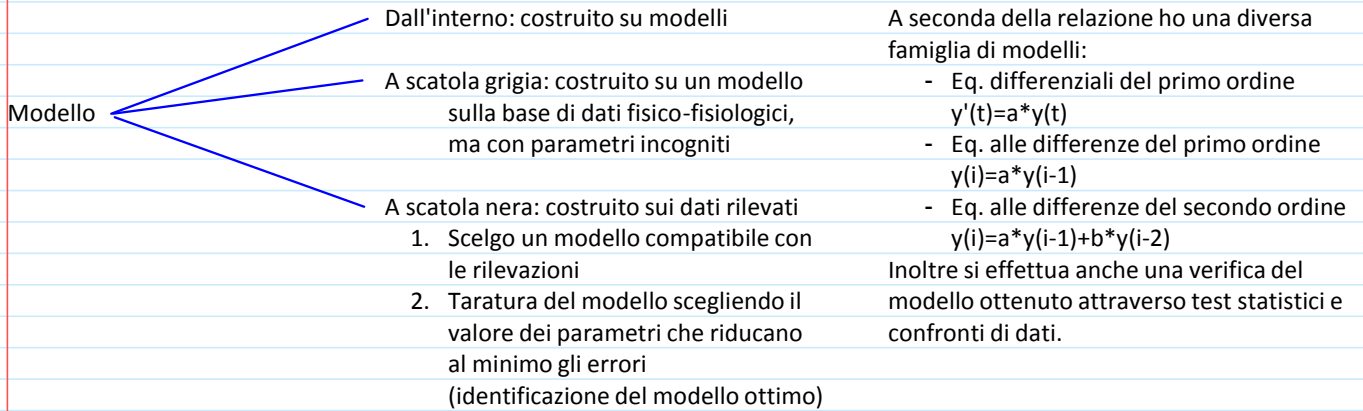
- Feedback
- Causa in comune

Dal cross-spettro si può trovare inoltre la Fdt tra i segnali, se uno causa l'altro, con la formula:



La stima non ha significato fuori da y_1 e può anche eliminare il rumore v , se è scorrelato

Si effettua una **stima parametrica** quando considero un segnale come generato da un modello matematico o un meccanismo descritto da formule con parametri non prefissati.



La stima è particolarmente utile per i processi stocastici e mantiene l'ergodicità: per questo possono formare stime spettrali, cross-spettrali e di Fdt.

La stima di un modello parametrico lineare non esplicitamente dinamico i cui dati all'ingresso ed uscita sono raccolti in N esperimenti dove non è importante la successione è data dalla formula:

$$\underbrace{y(i)}_{\text{uscita}} = \underbrace{u(i)}_{\text{ingresso}} \cdot \underbrace{\theta}_{\text{parametro}} + \underbrace{n(i)}_{\text{errore casuale}} = \underbrace{y(i)}_{\text{modello}} + n(i)$$

Si può anche considerare come uno spazio vettoriale di dimensione N, che sarebbe il numero di esperimenti eseguiti.

Anche se calcolati e resi al minimo, gli errori possono essere comunque significativi: questo vuol dire che c'è una scarsa correlazione tra ingresso ed uscita, ma non che l'errore non ha dipendenza dall'ingresso.

Il **coefficiente quadratico di regressione lineare** r^2 esprime la correlazione lineare tra l'uscita e gli ingressi attraverso il rapporto tra le varianze:

$$r^2 = \frac{\text{var}[u \cdot \theta]}{\sigma_y^2} = \frac{\text{var}[u \cdot \theta]}{\text{var}[u \cdot \theta] + \sigma_n^2} = \begin{cases} < 1 & \text{per } \sigma_n^2 \ll \text{var}[u \cdot \theta] \\ 0 & \text{per } \sigma_n^2 \gg \text{var}[u \cdot \theta] \end{cases}$$

Regressione semplice: $\text{var}[u \cdot \theta] = \sigma_n^2 \cdot \bar{\theta}^2 = c_{yn} \bar{\theta}$
 Regressione multipla: $\text{var}[u \cdot \theta] = \sum_{i=1}^q c_{yn_i} \bar{\theta}_i$

Nei modelli parametrici lineari dinamici invece ha importanza l'ordine temporale e si cerca di trovare una relazione lineare che dai campioni passati sappia dare una stima dei futuri (con margine di errore minimo) attraverso un modello di predizione che evita l'accumulo di errori e la necessità di stimare le condizioni iniziali.

Con un **modello AR_p** (autoregressivo di ordine p) si ipotizza il campione di segnale $y(i)$ come combinazione lineare dei campioni passati più un errore causale $n(i)$:

$$y(i) = y(i) + n(i) = -a_1 y(i-1) + \dots - a_p y(i-p) + n(i)$$

dove $-a_x$ sono i parametri AR che vengono stimati per minimizzare l'errore quadratico.

Stimati i parametri $-\hat{a}_x$, resta da ricavare la serie di errori \hat{n} dall'equazione e studiarne la varianza λ^2 :

$$\hat{n}(i) = y(i) - \hat{y}(i) = y(i) + \hat{a}_1 y(i-1) + \dots + \hat{a}_p y(i-p)$$

Lo si può considerare un filtraggio sbiancante FIR con come risposta all'impulso i parametri stimati.

L'autoregressione inoltre consente di risolvere le equazioni normali di una regressione multipla, considerando come ingressi i precedenti valori di $y(i)$.

Idealmente il modello AR è un meccanismo di generazione dei dati da un filtro ricorsivo con Fdt $1/\hat{A}(z)$ e alimentato da un rumore bianco $w(i)$, quindi la stima $\hat{n}(i)$ deve averne le stesse caratteristiche e può essere verificato con:

- $ACF \approx 0$
- Scorrelato sufficientemente a lungo
- Se l'ordine p aumenta, aumenta anche la bianchezza (ma bisogna tenere conto del principio di parsimonia)
- Cifra di merito di **Akaike**:
 $AIC = \ln(\lambda^2) + \frac{2p}{N}$ con $\lambda^2 = r_p(0)$

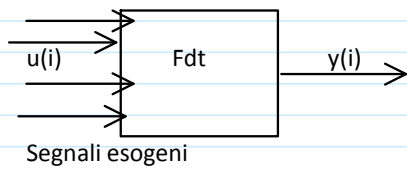
C'è quindi un trade off tra l'ordine p e l'errore di predizione.

Il filtro $1/\hat{A}(z) \left| \hat{n} \rightarrow \frac{1}{\hat{A}(z)} \rightarrow y \right|$ è a tutti poli con picchi di risonanza in ogni polo o coppia di poli; l'ingresso è un rumore bianco con ACF impulsiva e spettro piatto $S_n(\Omega) = \lambda^2$ (se sono rispettate le condizioni a fianco), "colorato" dalla risonanza avendo uno spettro finale di equazione:

$$S_y(\Omega) = \frac{\lambda^2}{|A(e^{j\Omega})|^2}$$

	Pro	Contro
Metodi non parametrici	- Non serve il modello di generazione di y - Algoritmi efficienti e veloci	- Risoluzione $\rightarrow 1/T$ - \downarrow risoluzione per $\downarrow T$
Metodi parametrici	- Buona risoluzione anche con $\downarrow T$ - No finestatura - Possibile spettro ME - Possibile decomposizione	- Verificare il modello di generazione di y - Bisogna determinare l'ordine ottimo (Akaike) - Algoritmi pesanti (AR)

I **modelli** di predizione **multivariati** funzionano su più segnali: un vettore di più segnali viene predetto in base ai valori passati, consentendo un'analisi cross-spettrale parametrica



Un **modello ARX** (autoregressivo, ingresso esogeno) è lineare, applicabile alle equazioni normali e può stimare la Fdt.

$$y(i) = \underbrace{-a_1 y(i-1) + \dots - a_p y(i-p)}_{p \text{ campioni di } y} + \underbrace{b_k u(i-k) + \dots + b_q u(i-q)}_{q-k+1 \text{ campioni } u \text{ (dal ritardo } k)} + n(i)$$

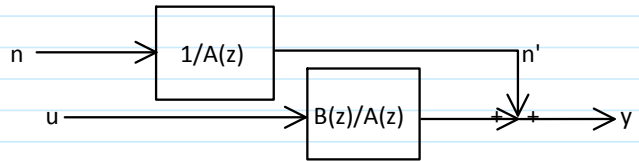
Applicando la trasformata Z, l'equazione diventa:

$$(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p})Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q})U(z) + N(z) \rightarrow A(z)Y(z) = B(z)U(z) + N(z)$$

$$\rightarrow Y(z) = \underbrace{\frac{B(z)}{A(z)}}_{\text{componente deterministica (p poli e q zeri)}} U(z) + \underbrace{\frac{1}{A(z)}}_{\text{componente stocastica (p poli)}} N(z)$$

La funzione quindi dipende dagli stessi poli: questi e gli zeri vanno stimati, ma non sono lineari e portano a stime sofisticate. Inoltre bisogna verificare la bianchezza del rumore $N(z)$.

Il modello ARX fornisce una stima di $B(z)/A(z)$ depurata dal rumore colorato: l'uscita del filtro infatti fornisce un filtraggio dal rumore.



	Filtro di Wiener	Filtro di Widrow
Ipotesi	Segnale misurato $y(i)$ come somma di segnale ideale $s(i)$ e un rumore colorato $n(i)$ tra loro scorrelati	Rumore misurato $n'(i)$ correlato al rumore $n(i)$ e segnale sporcato $y(i)$
Schema		
Filtro	$ H_{W_{ie}}(z) = \frac{S_{ss}(\Omega)}{S_{yy}(\Omega)} = \frac{S_{ss}(\Omega)}{S_{ss}(\Omega) + S_{nn}(\Omega)}$	