Corsi a cui sono dedicati gli appunti:
- **Elettrotecnica A (7.5 cfu)**
- **Teoria delle reti elettriche (5 cfu)**

Prof. Amedeo Premoli

Definizioni varie per i k-porta

Adinamico: Se ciascuna delle relazioni costitutive non contiene derivate e/o integrali delle tensioni e correnti. Risulta quindi insensibile ad una alterazione nella scala del tempo.
Dinamico: se almeno una delle relazioni costitutive contiene la derivata e/o integrale di una tensione o corrente.
Tempo-variante: i componenti tempo-varianti hanno una caratteristica che varia nel tempo. Se almeno una delle relazioni costitutive dipende dal tempo.
Tempo-invariante: se ciascuna delle relazioni costitutive non contiene parametri dipendenti dal tempo.
Lineare: un k-porta è detto lineare se una qualsiasi combinazione lineare delle tensioni e correnti di due qualsiasi situazioni elettriche è a sua volta una soluzione della caratteristica. Ciascuna delle relazioni costitutive è lineare.
Non-lineare: Altrimenti un componente è detto nonlineare quando almeno una delle relazioni costitutive è non-lineare.
Omogeneo (solo per i lineari): un k-porta lineare è detto omogeneo se ogni soluzione delle relazioni costitutive, se alterata per uno scalare qualsiasi, è a sua volta una soluzione. L'origine è soluzione delle equazioni costitutive. Non ha termini noti.
Altrimenti un componente è detto nonomogeneo.

Doppi bipoli

Simmetria: un DB è detto simmetrico qualora le due relazioni costitutive non mutano allo scambio reciproco delle due porte. Un doppio bipolo simmetrico non può essere unidirezionale.
Se le matrici R/G sono definite, la simmetria del DB comporta la coincidenza dei termini sulla diagonale e di quelli fuori dalla diagonale.
Uni-direzionale: un DB è detto uni-direzionale qualora una delle due relazioni costitutive non coinvolge né la tensione né la corrente di una delle porte.
Nel caso che le matrici R/G siano definite, la uni-direzionalità del DB comporta la nullità di uno dei termini fuori dalla diagonale.
Un DB è detto zerodirezionale quando ciascuna relazione costitutiva coinvolge solamente la tensione e corrente in una porta.
Altrimenti un DB è detto bidirezionale.

Bipoli

La tensione o la corrente in un bipolo è detta non-vincolata se non compare nella rappresentazione implicita $h^v v + h^i i = \hat{h}$
Omogeneo: la situazione v=0, i=0 appartiene al dominio costitutivo del bipolo. La caratteristica dei bipoli omogenei passa per l'origine degli assi.
Impressivo: una delle grandezze è non-vincolata, l'altra assume un valore fisso. La caratteristica è parallela ad uno degli assi.
Annullando il termine noto della rappresentazione implicita troviamo il bipolo omogeneo associato.
Tutti i bipoli omogenei sono bilaterali, quello non-omogenei sono unilaterali.
Rappresentazioni esplicite: $v = ri + \hat{v}$ $\quad$ $i = gv + \hat{i}$
- i bipoli non-impressivi sono controllabili sempre sia in tensione che in corrente.

Reciprocità
Consideriamo un generico k-porta che operi in due situazioni elettriche diverse: nella prima situazione elettrica contraddistinta dal pedice$\left(\;\right)_a$, le tensioni e le correnti alle porte del k-porta sono indicate da $\mathbf{v}_a$ ed $\mathbf{i}_a$, mentre nella seconda situazione elettrica, contraddistinta dal pedice $\left(\;\right)_b$, le tensioni e le correnti alle porte del k-porta sono indicate da $\mathbf{v}_b$ ed $\mathbf{i}_b$, rispettivamente. Possiamo definire due potenze virtuali, chiamate potenze virtuali miste, per il k-porta $p' = \mathbf{v}_a^T \mathbf{i}_n$ $\quad p'' = \mathbf{v}_b^T \mathbf{i}_a$
Se le due potenze miste concidono per qualsiasi coppia di situazioni elettriche, il k-porta è detto reciproco, altrimenti è detto non-reciproco.

Un componente adinamico tempo-invariante è detto antireciproco se la somma delle 2 potenze incrociate è nulla per una qualsiasi coppia di situazioni.

- un componente lineare nonomogeneo è né reciproco né antireciproco.
- Un bipolo lineare è sempre reciproco

Il k-porta è reciproco se e solo se la matrice resistenza R è simmetrica.
Il k-porta è antireciproco se e solo se la matrice R è antisimmetrica.
Il k-porta è reciproco se e solo se la matrice G è simmetrica.
Il k-porta è antireciproco se e solo se la matrice G è antisimmetrica.

La reciprocità di un DB di cui siano note le matrici T' e T'' implica che il determinante della matrice sia unitario: |T'|=1 e |T''|=1
L'antireciprocità di un DB impica che la matrice T' e T'' sia diagonale o antidiagonale e che il suo determinante |T'| e |T''| sia, rispettivamente, 1 o -1.

Un DB simmetrico, di cui esiste la matrice R, è anche reciproco.
Un DB simmetrico di cui esiste la matrice H' è "in genere" anche reciproco. L'unico caso in cui non è reciproco è $\quad h'_{11} = h'_{22} = 0 \qquad h'_{12} = \pm 1 \qquad h'_{21} = \pm 1$
Un DB simmetrico di cui esiste la matrice T' è "in genere" anche reciproco. L'unico caso in cui non è reciproco è $\quad t'_{12} = t'_{21} = 0 \qquad t'_{11} = \pm 1 \qquad t'_{22} = \pm 1$

Teorema di reciprocità
Assumiamo di trovarci davanti ad un componente che distinguiamo con il pedice $\left(\;\right)_a$ costituito da due componenti che distinguiamo con i pedici $\left(\;\right)_b$ e $\left(\;\right)_c$. qualora i componenti B e C siano reciproci, il componente composito A è a sua volta reciproco.
Un componente composto da solo elementi reciproci, è a sua volta reciproco.

Rappresentazioni per doppi bipoli

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad r_{11} = \left[\frac{v_1}{\hat{i}_1}\right]_{i_2=0} \quad r_{12} = \left[\frac{v_1}{\hat{i}_2}\right]_{i_1=0} \quad r_{21} = \left[\frac{v_2}{\hat{i}_1}\right]_{i_2=0} \quad r_{22} = \left[\frac{v_2}{\hat{i}_2}\right]_{i_1=0} \quad \text{(impedenza Z)}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad g_{11} = \left[\frac{i_1}{\hat{v}_1}\right]_{v_2=0} \quad g_{12} = \left[\frac{i_1}{\hat{v}_2}\right]_{v_1=0} \quad g_{21} = \left[\frac{i_2}{\hat{v}_1}\right]_{v_2=0} \quad g_{22} = \left[\frac{i_2}{\hat{v}_2}\right]_{v_1=0} \quad \text{(ammettenza Y)}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H'} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad h'_{11} = \left[\frac{v_1}{\hat{i}_1}\right]_{v_2=0} \quad h'_{12} = \left[\frac{v_1}{\hat{v}_2}\right]_{i_1=0} \quad h'_{21} = \left[\frac{i_2}{\hat{i}_1}\right]_{v_2=0} \quad h'_{22} = \left[\frac{i_2}{\hat{v}_2}\right]_{i_1=0}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H''} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad h''_{11} = \left[\frac{i_1}{\hat{v}_1}\right]_{i_2=0} \quad h''_{12} = \left[\frac{i_1}{\hat{i}_2}\right]_{v_1=0} \quad h''_{21} = \left[\frac{v_2}{\hat{v}_1}\right]_{i_2=0} \quad h''_{22} = \left[\frac{v_2}{\hat{i}_2}\right]_{v_1=0}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T'} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad t'_{11} = \left[\frac{v_1}{\hat{v}_2}\right]_{i_2=0} \quad t'_{12} = \left[\frac{v_1}{\hat{i}_2}\right]_{v_2=0} \quad t'_{21} = \left[\frac{i_1}{\hat{v}_2}\right]_{i_2=0} \quad t'_{22} = \left[\frac{i_1}{\hat{i}_2}\right]_{v_2=0}$$

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T''} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \quad t''_{11} = \left[\frac{v_2}{\hat{v}_1}\right]_{i_1=0} \quad t''_{12} = \left[\frac{v_2}{\hat{i}_1}\right]_{v_1=0} \quad t''_{21} = \left[\frac{i_2}{\hat{v}_1}\right]_{i_1=0} \quad t''_{22} = \left[\frac{i_2}{\hat{i}_1}\right]_{v_1=0}$$

N.B. il verso delle correnti, i_1 entrante, i_2 uscente nelle matrici di trasmissione.

Potenza [R] $p = r_{11}i_1^2 + (r_{12} + r_{21})i_1 i_2 + r_{22}i_2^2$ $\quad P = [i_1 \quad i_2]\mathbf{R}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$

[G] $p = g_{11}v_1^2 + (g_{12} + g_{21})v_1 v_2 + g_{22}v_2^2$ $\quad P = [v_1 \quad v_2]\mathbf{G}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

[H’] $p = h'_{11}\, i_1^2 + (h'_{12} + h'_{21})i_1 v_2 + h'_{22}\, v_2^2$ $\quad P = [i_1 \quad v_2]\mathbf{H'}\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

[H’’] $p = h''_{11}\, v_1^2 + (h''_{12} + h''_{21})v_1 i_2 + h''_{22}\, i_2^2$ $\quad P = [v_1 \quad i_2]\mathbf{H''}\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$

Potenza massima erogabile da una sorgente che ha resistenza interna R_{in} risulta pari a:

$P_{\max} = \dfrac{V_{eq}}{4R_{in}} = \dfrac{I_{eq}^2 R_{in}}{4}$ (per sorgenti caratterizzabili come bipoli non-omogenei e non-impressivi)

Questo valore viene raggiunto per $v = \dfrac{\hat{i}}{2g}$ o $i = \dfrac{\hat{v}}{2r}$.

La resistenza e la conduttanza dei resistori presenti nei due modelli equivalenti è la stessa poiché essa coincide con la resistenza del bipolo omogeneo associato che non dipende dalla rappresentazione.

- ✓ un doppio bipolo è dissipativo se la matrice R è semidefinita positiva, cioè deve avere $\det \geq 0$ e gli elementi sulla diagonale principale devono essere ≥ 0.
- ✓ Per trovare la massima potenza erogabile occorre fare la derivata della potenza rispetto alla tensione e porla uguale a 0. Se si tratta di un doppio bipolo occorre fare il sistema di 2 derivate rispetto alle 2 tensioni.

- ✓ Per trovare le rappresentazioni cardinali con la matrice di trasmissione occorre usare metodi algebrici.

La convenzione normale (degli utilizzatori) vede le correnti entranti nel doppio bipolo e la corrente opposta alla tensione nel bipolo.
La convenzione non-normale (dei generatori) vede la corrente alla prima porta entrante e la corrente alla seconda porta uscente nel doppio bipolo e la corrente nello stesso verso della tensione nel bipolo.

Sorgenti pilotate
- non-impressivo, omogeneo, unidirezionale

sorgente di tensione pilotata in corrente (V_I)

$R:\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_m & 0 \end{bmatrix}$ $\quad v_2 = r_m i_1 \quad p = r_m i_1 i_2$ (transresistenza)

$T' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r_m & 0 \end{bmatrix}$ $\quad v_1 = 0 \quad v_2 = r_m i_1$ $\quad i_2$ nonvincolata

sorgente di corrente pilotata in tensione (I_V)

$G:\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_m & 0 \end{bmatrix}$ $\quad i_2 = g_m v_1 \quad p = g_m v_1 v_2$ (transconduttanza)

$T' = \begin{bmatrix} 0 & -1/g_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad i_1 = 0 \quad i_2 = g_m v_1$ $\quad v_2$ nonvincolata

sorgente di corrente pilotata in corrente (I_I)

$H':\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ $\quad i_2 = \beta i_1 \quad p = \beta i_1 v_2$ (guadagno di corrente)

$T' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\beta \end{bmatrix}$ $\quad v_1 = 0 \quad i_2 = \beta i_1$ $\quad v_2$ nonvincolata

sorgente di tensione pilotata in tensione (V_V)

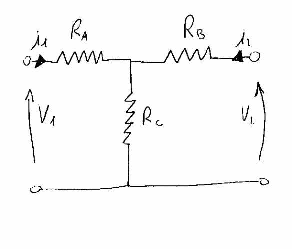
$H'':\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ $\quad v_2 = \alpha v_1 \quad p = \alpha v_1 i_2$ (guadagno di tensione)

$T = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad i_1 = 0 \quad v_2 = \alpha v_1$ $\quad i_2$ nonvincolata

Tripoli resistivi

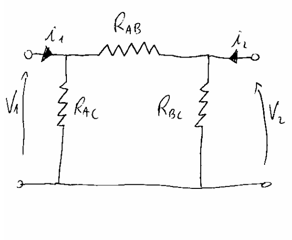
Stella

$$R:\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_a + r_c & r_c \\ r_c & r_b + r_c \end{bmatrix}$$



triangolo

$$G:\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{ac} + g_{ab} & -g_{ab} \\ -g_{ab} & g_{bc} + g_{ab} \end{bmatrix}$$



trasformazione stella→triangolo

$$r_{bc} = r_b + r_c + \frac{r_b r_c}{r_a} \qquad r_{ac} = r_a + r_c + \frac{r_a r_c}{r_b} \qquad r_{ab} = r_a + r_b + \frac{r_a r_b}{r_c}$$

trasformazioni triangolo→stella

$$r_a = \frac{r_{ab} r_{ac}}{r_{ab} + r_{bc} + r_{ac}} \qquad r_b = \frac{r_{bc} r_{ab}}{r_{ab} + r_{bc} + r_{ac}} \qquad r_c = \frac{r_{ac} r_{bc}}{r_{ab} + r_{bc} + r_{ac}}$$

- ✓ Nel caso ci siano componenti non lineari, allora occorre utilizzare l'impedenza associata al componente.
- ✓ Data una matrice R è possibile ricavare una forma resistiva equivalente solo se la matrice è simmetrica.

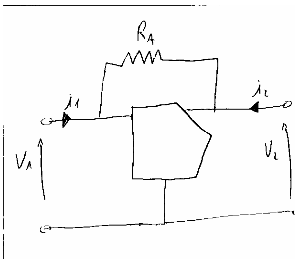
Nullore

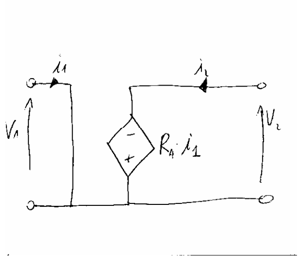
$$T'=0 \quad T':\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{cases} v_1, i_1 = 0 \\ v_2, i_2 \text{ nonvincolate}\end{cases}$$

- omogeneo, impressivo, attivo

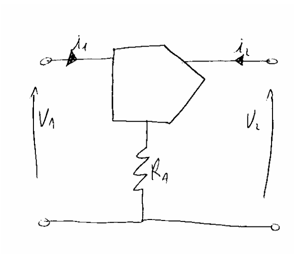
Connessioni di un nullore

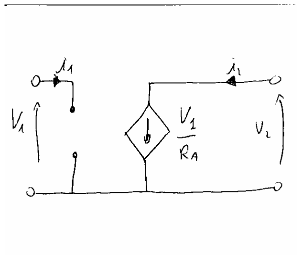
- La connessione trasversale di un $R < r_a > B_a$ al nullore tribolare DBT è equivalente ad una V_I tripolare DBT con transresistenza $r_m = r_a$





- la connessione di un $R < r_a > B_a$ in serie al terminale comune di un nullore tribolare DBT è equivalente ad una I_V tribolare DBT con transconduttanza $g_m = \dfrac{1}{r_a}$

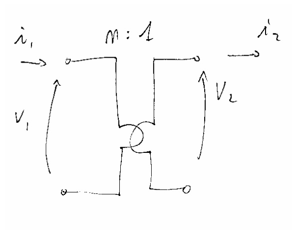




- I due resistori in parallelo alle due porte del nullore possono essere sostituiti da due c.a. qualora la corrente fluente in essi non fosse di interesse.
- I due resistori in serie alle due porte del nullore possono essere sostituiti da due c.c. qualora la tensione ai loro capi non sia di interesse.

Trasformatore ideale

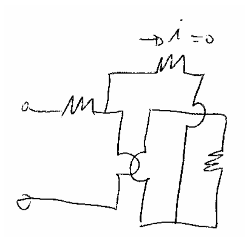
$$T' = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \quad T'' = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \quad H' = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \quad H'' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}$$



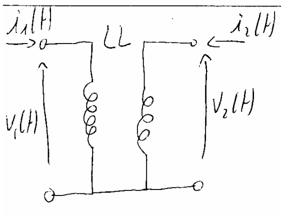
È un componente inerte. È sia reciproco, sia antireciproco.
n: rapporto di trasformazione.

Connessioni di un trasformatore

- trasformatore ideale chiuso su un resistore è equivalente ad un resistore con resistenza $n^2 r_u$
- trasformatore ideale chiuso su una $\hat{v}_a$ è equivalente ad una $\hat{v}$ con tensione impressa $n\hat{v}_a$
- trasformatore ideale chiuso su una $\hat{i}_a$ è equivalente ad una $\hat{i}$ con corrente impressa pari a $\frac{\hat{i}_a}{n}$
- trasformatore ideale chiuso su un c.c. è equivalente ad un c.c.
- trasformatore ideale chiuso su un c.a. è equivalente ad un c.a.
- una resistenza tra il terminale non comune della prima porta ed il terminale comune della seconda è equivalente ad un c.a.



Induttori accoppiati



Gli induttori accoppiati sono reciproci.

Rappresentazione differenziale
$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix}$$

Energia immagazzinata
$$w^{ene}(t) = \frac{1}{2}\left[L_1 \cdot i_1(t)^2 + L_2 \cdot i_2(t)^2 + 2M \cdot i_1(t) \cdot i_2(t) \right]$$

Proprietà gli induttori accoppiati sono equivalenti, limitatamente all'istante t=t_1, ad una coppia di *sIi* con correnti impresse $\hat{i}_1 = i_{L1}(t_1)$ e $\hat{i}_2 = i_{L2}(t_1)$

Serie e parallelo degli induttori accoppiati

La connessione in serie delle due porte è equivalente ad un $L\left\langle L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M \right\rangle$

La connessione in parallelo delle due porte è equivalente ad un $L\left\langle L_{eq} = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \right\rangle$

Coefficiente di accoppiamento $k = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ $[-1, +1]$

Modello equivalente

gli induttori accoppiati ammettono un modello equivalente consistente in due induttori disaccoppiati con induttanza L_s in serie e L_p in parallelo e un tr.id. Nel caso k=±1 L_s è nullo.

$n = k\sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}}$ $\quad L_p = k^2 L_1 = \dfrac{M^2}{L_2}$ $\quad L_s = (1-k^2)L_1 = L_1 - \dfrac{M^2}{L_2}$

Gli induttori accoppiati diventano variabili di stato solo se k<1.

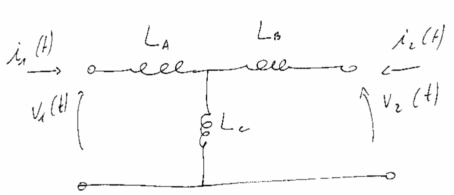
Se $k = \pm 1$ le correnti nei 2 induttori accoppiati sono legate da una relazione algebrica, solo una corrente diventa variabile di stato, il circuito è di ordine 1.

$L_s, L_p \geq 0$ M indifferente

Altro modello equivalente

Vale solo nel caso sia tripolare:

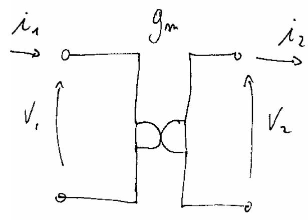
$L_a = L_1 - M$ $\quad L_b = L_2 - M$ $\quad L_c = M$



Giratore

$$\mathbf{T'}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{g_m}\\ g_m & 0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{R}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{g_m}\\ \frac{1}{g_m} & 0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{G}=\begin{bmatrix}0 & g_m\\ -g_m & 0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{T''}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{g_m}\\ g_m & 0\end{bmatrix}$$

È un componente inerte. È antireciproco.
g_m: transconduttanza di girazione.



Connessioni di un giratore

- Un giratore con la seconda porta chiusa su un resistore R_u è equivalente ad un unico resistore con resistenza pari a $\frac{1}{g_m^2 R_u}$
- Un giratore con la seconda porta chiusa su una $\widehat{V}$ è equivalente ad una $\hat{I}$ di valore $g_m \widehat{V}$
- Un giratore con la seconda porta chiusa su una $\hat{I}$ è equivalente ad una $\widehat{V}$ di valore $\frac{\hat{I}}{g_m}$
- Un giratore con la seconda porta chiusa su un C è equivalente ad un $L_{eq} = C / g_m^2$
- Un giratore con la seconda porta chiusa su un L è equivalente ad un $C_{eq} = L_{eq} g_m^2$
- Un giratore con la seconda porta chiusa su un c.c. è equivalente ad un c.a.
- Un giratore con la seconda porta chiusa su un c.a. è equivalente ad un c.c.
- Se il giratore non è chiuso su una semplice resistenza, allora occorre usare l'impedenza associata all'elemento non lineare.

Cascata di doppi bipoli

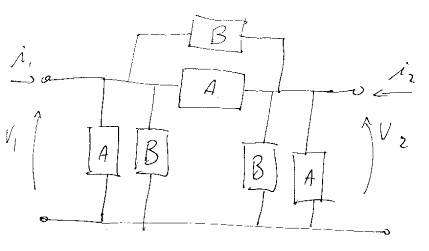
1. se le matrici di trasmissione diretta dei due doppi bipoli sono definite, la corrispondente matrice (totale) viene ottenuta mediante il loro prodotto
2. se le matrici di trasmissione inversa sono definite, la corrispondente matrice totale viene ottenuta mediante il loro prodotto.
3. se uno dei doppi bipoli connessi è unidirezionale, anche il doppio bipolo composito è unidirezionale.
4. la cascata di due tr.id. è equivalente ad un tr.id. il cui rapporto di trasformazione coincide col prodotto dei rapporti.
5. un resistore in serie alla seconda porta di un tr.id. è equivalente ad un resistore in serie alla prima porta con resistenza $\begin{bmatrix} n^a & 0 \\ 0 & 1/n^a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & r^b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \left(n^a\right)^2 r^b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n^a & 0 \\ 0 & 1/n^a \end{bmatrix}$
6. un resistore in parallelo alla seconda porta di un tr.id. è equivalente ad un resistore in parallelo alla prima porta con resistenza $\begin{bmatrix} n^a & 0 \\ 0 & 1/n^a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g^b & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g^b/\left(n^a\right)^2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n^a & 0 \\ 0 & 1/n^a \end{bmatrix}$
7. la cascata di due giratori è equivalente ad un tr.id. il cui rapporto di trasformazione coincide col rapporto delle due transconduttanze di girazione $\left(g_m^b / g_m^a\right)$.
8. la cascata di un tr.id. e un giratore è equivalente ad un giratore il cui rapporto di giraizone coincide col rapporto di girazione del giratore rispetto alla costante di trasformazione del tr.id. $\left(g_m^b / n^a\right)$.
9. Un resistore in parallelo alla seconda porta di un giratore è equivalente ad un resistore in serie alla prima $\begin{bmatrix} 0 & 1/g_m^a \\ g_m^a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/r^b & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1/\left[\left(g_m^a\right)^2 r^b\right] \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/g_m^a \\ g_m^a & 0 \end{bmatrix}$
10. un resistore in serie alla seconda porta di un giratore è equivalente ad uno in parallelo alla prima $\begin{bmatrix} 0 & 1/g_m^a \\ g_m^a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & r^b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \left(g_m^a\right)^2 r^b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/g_m^a \\ g_m^a & 0 \end{bmatrix}$
11. la cascata di due V_V è equivalente ad una V_V il cui guadagno in tensione coincide col prodotto dei guadagni $[\alpha_1 \cdot \alpha_2]$.
12. la cascata di due I_I è equivalente ad una I_I il cui guadagno in corrente coincide col prodotto dei guadagni $\left[\dfrac{1}{\beta_1 \cdot \beta_2}\right]$.
13. la cascata di una I_I ed una V_V è equivalente ad un nullore. (idem il contrario)
14. se in una cascata di doppi bipoli è presente un nullore, il doppio bipolo composito sarà un nullore.
15. doppi bipoli in cascata danno origine ad un diverso tipo di doppio bipolo se l'ordine in cui sono connessi viene invertito.
16. un DB è zero direzionale alle pulsazioni degli zeri dei bipoli connessi in parallelo e alle pulsazioni degli zeri dei bipoli connessi trasversalmente.

Dobbi bipoli a ponte

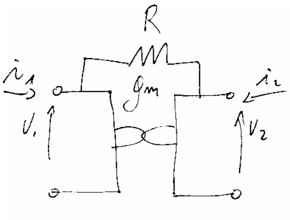
Doppi bipoli a ponte sono equilibrati se il prodotto delle resistenze (impedenze) dei rami opposti è lo stesso. In questo caso è possibile sostituire il bipolo di ponte con un c.a. poiché ai suoi capi non c'è differenza di tensione.

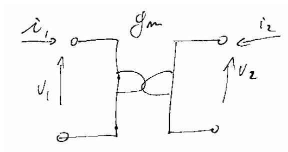
Particolari configurazioni di DB

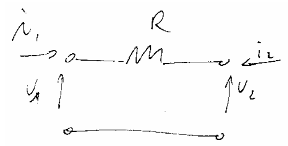
Si sommano le matrici G



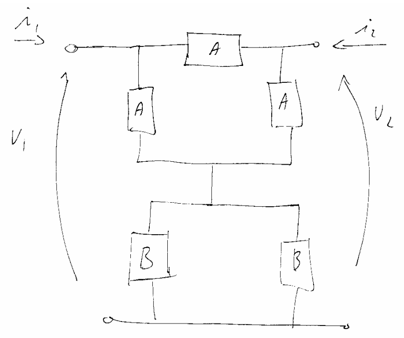
Se il giratore ha una impedenza a ponte, allora occorre calcolare la matrice $G_{tot} = G_{gir} + G_{imp}$ e vedere in che modo si riesce a scomporre.







Si sommano le matrici Z



DB in parallelo e serie

<u>Parallelo di DB</u>

Se entrambe le matrici conduttanza $\mathbf{G}^a$ e $\mathbf{G}^b$ esistono, anche la matrice conduttanza totale esiste e viene ottenuta mediante la loro somma:

$$\begin{bmatrix} g_{11}^c & g_{12}^c \\ g_{21}^c & g_{22}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^a + g_{11}^b & g_{12}^a + g_{12}^b \\ g_{21}^a + g_{21}^b & g_{22}^a + g_{22}^b \end{bmatrix}$$

<u>Parallelo di un generico DBT ed un nullore tribolare</u>

Il parallelo di un nullore tribolare ed un generico DBT con matrice $\mathbf{G}^a$ è equivalente ad una V_I tribolare con transresistenza $r_m = \frac{1}{g_{12}^a}$ (vedi nullore)

<u>Serie di DB</u>

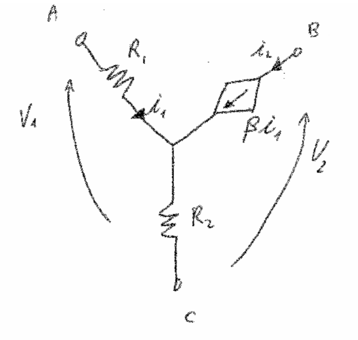
Se le matrici resistenza $\mathbf{R}^a$ e $\mathbf{R}^b$ esistono, anche la matrice resistenza totale esiste e viene ottenuta mediante la loro somma:

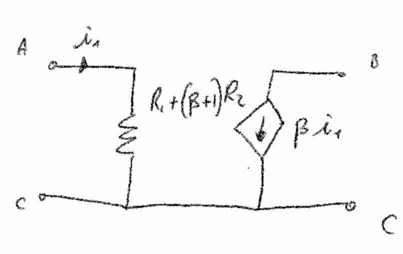
$$\begin{bmatrix} r_{11}^c & r_{12}^c \\ r_{21}^c & r_{22}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^a + r_{11}^b & r_{12}^a + r_{12}^b \\ r_{21}^a + r_{21}^b & r_{22}^a + r_{22}^b \end{bmatrix}$$

Informazioni varie su bipoli e doppi bipoli

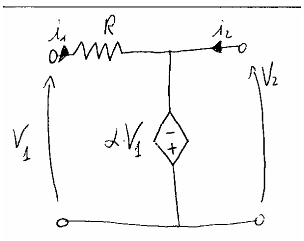
Un qualsiasi bipolo in serie ad una $\hat{I}$ diventa un c.c. Pure una $\hat{V}$.

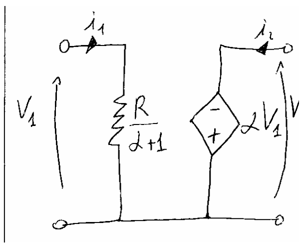
Stella di Miller





Triangolo di Miller





Nel caso non si abbiano resistenze ma condensatori e induttori valgono le stesse regole, occorre solo utilizzare l'impedenza associata invece che la resistenza.

Ricorda: $\frac{1}{sC} \rightarrow \frac{1}{sC}\frac{1}{\alpha+1} \qquad \equiv \qquad C \rightarrow C(\alpha+1)$

Modello equivalente di Thevenin e Norton

La R_{eq} la si trova disattivando tutti i generatori indipendenti.

Se ci sono generatori pilotati allora si usa $\widehat{V}_{test}$ in parallelo (per trovare Y), $\hat{I}_{test}$ in serie (per trovare Z).

Se ci sono solo generatori pilotati, $\widehat{V}_{eq}, \hat{I}_{eq} = 0$

Rappresentazione integrale

condensatore $\underbrace{v(t)=\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau}_{C\text{ scarico in }t_0}+v_0$ se $i(\tau)=I_{cost}$ $V(t)=\frac{A\cdot t}{C}$

$$v(t)=v_0+\left(\frac{\hat{i}_{\text{cost}}}{C}\right)(t-t_0)$$

Induttore $\underbrace{i(t)=\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}_{L\text{ scarico in }t_0}+i_0$ se $v(\tau)=V_{cost}$ $I(t)=\frac{A\cdot t}{L}$

$$i(t)=i_0+\left(\frac{\hat{v}_{\text{cost}}}{L}\right)(t-t_0)$$

Rappresentazione differenziale

Condensatore $i(t)=C\cdot\dot{v}(t)$

Induttore $v(t)=L\cdot\dot{i}(t)$

Conservativo: il condensatore e l'induttore sono detti componenti conservativi nel senso che sono in grado di accumulare il lavoro elettrico assorbito sotto forma di energia, che può essere integralmente restituita in tempi successivi.

Energia immagazzinata: $\frac{1}{2}C\left[v_c(t)\right]^2$ $\frac{1}{2}L\left[i_l(t)\right]^2$

Potenza effettiva

condensatore $p(t)=C\cdot v(t)\cdot\dot{v}(t)$

Induttore $p(t)=L\cdot i(t)\cdot\dot{i}(t)$

Lavoro effettivo

Condensatore $w(t)=\frac{C\cdot v(t)^2}{2}-\frac{C\cdot v(t_0)^2}{2}$

Induttore $w(t)=\frac{L\cdot i(t)^2}{2}-\frac{L\cdot i(t_0)^2}{2}$

<u>C chiuso su un R</u>

$$\dot{v}(t)=-\frac{v(t)}{\tau}=-\frac{v(t)}{RC}$$

<u>L chiuso su un R</u>

$$\dot{i}(t)=-\frac{i(t)}{\tau}=-\frac{i(t)R}{L}$$

costante di tempo

$$\tau=rC=gL=\frac{L}{r}=\frac{C}{g}$$

Vale la relazione

$$i_c(t_0)e^{-\frac{t_0}{\tau}}=i_c(t_1)e^{-\frac{t_1}{\tau}}$$

Candidate di stato

Le grandezze $v_c(t)$ ed $i_l(t)$ sono candidate di stato del circuito in cui il rispettivo componente è inserito. Ci sono i circuiti degeneri in cui la grandezza non diventa variabile di stato.

Soluzione generale dell'equazione generale nonomogenea per circuiti di prim'ordine con sorgenti costanti

$$x(t) = \underbrace{\left(x_0 - x^{\text{cost}}\right)\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)}_{\text{soluzione transitoria}} + \underbrace{x^{\text{cost}}}_{\text{soluzione a regime}}$$

$$v_C(t) = \left(v_C(0) - v_C^{\text{cost}}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_C^{\text{cost}} \qquad i_L(t) = \left(i_L(0) - i_L^{\text{cost}}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + i_L^{\text{cost}}$$

Soluzione libera

la soluzione libera $x^{lib}(t) = e^{a(t-t_0)x_0}$ dipende esclusivamente dal valore iniziale x_0 della candidata di stato $x(t)$ e non dipende dalle grandezze impresse. Essa coincide con la soluzione particolare del circuito omogeneo associato, determinata dal medesimo valore di x_0. Essa coincide con la soluzione generale del circuito omogeneo associato, qualora x_0 sia considerato indeterminato.

<u>Modo naturale</u>

l'esponenziale $e^{\left[a(t-t_0)\right]x_0}$ che costituisce la soluzione libera, viene chiamato modo naturale del circuito di prim'ordine e a viene viene detta pulsazione naturale del circuito dinamico. Indipendentemente dal valore di x_0 ,la soluzione libera

a<0 decresce
a=0 è costante
a>0 cresce

"naturale" perché questa funzione del tempo non dipende dalle grandezze impresse ma nasce spontaneamente del circuito dinamico.

$\tau = -1/a$ è chiamata costante di tempo. Rappresenta l'intersezione tra l'asse dei tempi e la tangente all'esponenziale nel punto iniziale.

Soluzione forzata

la soluzione forzata $x^{for}(t)$ dipende dalle grandezze impresse e non dipende da x_0. Coincide con la soluzione effettiva del circuito originario, qualora il valore iniziale della candidata sia nullo.

- la soluzione forzata composta risulta uguale alla somma delle soluzioni forzate a ciascuna sorgente impressiva.

<u>Matrice di stato</u>: viene definita matrice di stato $\mathbf{A}$ la matrice del circuito omogeneo associato. Le pulsazioni della matrice di stato sono gli autovalori della matrice di stato. Queste pulsazioni sono chiamate pulsazioni naturali.

Regime sinusoidale

$u(t) = u \cdot \cos(\omega t + \phi)$ ampiezza u, pulsazione ω, fase ϕ

frequenza $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$

periodo $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$

anticipo\ritardo $\Delta t = \dfrac{\phi}{\omega}$

$u(t) = u\cos(\omega t + \phi) = \Re\{u \cdot \exp(j\phi) \cdot \exp(j\omega t)\}$

$u \cdot \exp(j\phi)$ indipendente dal tempo e specifico di ciascuna sinusoide

$\exp(j\omega t)$ dipendente dal tempo e comune all'insieme delle sinusoidi isofrequenziali

Cisoidi

Le cisoidi costituiscono una classe di funzioni reali di variabile reale. Ciascuna cisoide è caratterizzata da una specifica coppia di parametri scalari complessi, chiamati fasore e pulsazione complessa.

fasore il fattore complesso $\overline{u} = u \cdot \exp(j\phi)$

$|\overline{u}|$ (modulo del favore)=ampiezza u della sinusoide

$\angle\overline{u}$ (fase del favore)=argomento della sinusoide in t=0, ϕ.

$\Rightarrow u(t) = |\overline{u}|\cos\left(\omega t + \angle\overline{u}\right)$

soluzione

$$x(t) = \underbrace{\left(x_0 - |\overline{x}|\cos\left(\omega t_0 + \angle\overline{x}\right)\right)e^{\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)}}_{\text{soluzione transitoria}} + \underbrace{|\overline{x}|\cos\left(\omega t + \angle\overline{x}\right)}_{\text{soluzione sinusoidale a regime}}$$

$$v_c(t) = \left[v_c(0) - v_c^{sim}(0)\right]e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} + v_c^{sim}(t)$$

$$i_l(t) = \left[i_l(0) - i_l^{sim}(0)\right]e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} + i_l^{sim}(t)$$

Fasori

quadro delle relazioni costitutive dei componenti dinamici omogenei

componente	dominio tempo	dominio fasori	impedenza
C	$i(t) = C \cdot \dot{v}(t)$	$\bar{i} = j\omega C \bar{v}$	$z(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega C} = -\dfrac{j}{\omega C}$
L	$v(t) = L \cdot \dot{i}(t)$	$\bar{v} = j\omega L \bar{i}$	$z(j\omega) = j\omega L$
LL	$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \cdot \dot{i}_1(t) + M \cdot \dot{i}_2(t) \\ v_2(t) = M \cdot \dot{i}_1(t) + L_2 \cdot \dot{i}_2(t) \end{cases}$	$\begin{cases} \bar{v}_1 = j\omega L_1 \bar{i}_1 + j\omega M \bar{i}_2 \\ \bar{v}_2 = j\omega M \bar{i}_1 + j\omega L_2 \bar{i}_2 \end{cases}$	

$g = 1/r$ $\quad\quad$ $b = 1/x$

bipoli compositi $\quad$ impedenza $\quad z(j\omega) = \dfrac{\bar{v}}{\bar{i}}$

ammettenza $\quad y(j\omega) = \dfrac{\bar{i}}{\bar{v}}$

	impedenza	ammettenza
rapporto fasori	$z(j\omega) = r(\omega) + jx(\omega) = \dfrac{\bar{v}}{\bar{i}}$	$y(j\omega) = g(\omega) + jb(\omega) = \dfrac{\bar{i}}{\bar{v}}$
parte reale	$r(\omega)$ resistenza	$g(\omega)$ conduttanza
parte immaginaria	$x(\omega)$ reattanza	$b(\omega)$ suscettanza
parte reale	$r(\omega) = \dfrac{g(\omega)}{g(\omega)^2 + b(\omega)^2}$	$g(\omega) = \dfrac{r(\omega)}{r(\omega)^2 + x(\omega)^2}$
parte immaginaria	$x(\omega) = -\dfrac{b(\omega)}{g(\omega)^2 + b(\omega)^2}$	$b(\omega) = -\dfrac{x(\omega)}{r(\omega)^2 + x(\omega)^2}$

fase dell'impedenza $\quad \phi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = \arctan\left(\dfrac{x(\omega)}{r(\omega)}\right)$

Induttori accoppiati

matrice impedenza $\quad z_{11}(j\omega) = j\omega L_1 \quad\quad z_{12}(j\omega) = z_{21}(j\omega) = j\omega M \quad\quad z_{22}(j\omega) = j\omega L_2$

- Si può indicare il C solo con la sua reattanza $x_c = -x[\Omega]$
- Si può indicare il L solo con la sua reattanza $x_l = x[\Omega]$

Quando facciamo i conti con Fourier occorre usare:

$- C \to -x \cdot j$

$- L \to x \cdot j$

Nei circuiti in cui ω risulta incognito occorre usare le leggi di Ohm e di Kirchoff per calcolare l'equazione di stato:

$$\begin{cases} v_l(t) = L \cdot \dot{i}_l(t) \\ i_c(t) = C \cdot \dot{v}_c(t) \\ v(t) = R \cdot i(t) \end{cases}$$

Funzioni di rete

Una funzione di rete è il rapporto tra il fasore di una grandezza di ramo $y(t)$ scelta come uscita ed il fasore di una grandezza impressa $\hat{u}(t)$ che ha il ruolo di ingresso.

La cisoide d'uscita è nulla qualora la pulsazione della cisoide d'ingresso coincida con uno zero della funzione di rete.
Zero all'infinito impedisce la presenza di cisoidi con pulsazione s=∞ nella grandezza d'uscita.
Zero nell'origine impedisce la presenza di termini costanti nella grandezza d'uscita.
Coppia di zeri immaginari puri impedisce la presenza di sinusoidi con pulsazione $s = \pm i\omega_1$
Coppia di zeri complessi impedisce la presenza di cisoidi con pulsazione $s = \sigma_1 \pm j\omega_1$

Per calcolare l'impedenza di un circuito si inserisce una sorgente di corrente al posto di un opportuno c.a. latente in parallelo e si calcola la tensione generata.
Per calcolare l'ammettenza di un circuito si inserisce una sorgente di tensione al posto di un opportuno c.c. latente in serie e si calcola la corrente generata.

POTENZA

Potenza istantanea e potenza attiva

Potenza effettiva istantanea: $P = v(t) \cdot i(t)$

<u>potenza istantanea:</u> la potenza istantanea assorbita da un bipolo (o porta di un bipolo) è una sinusoide con pulsazione 2ω sovrapposta ad una costante

$$p(t) = \underbrace{\frac{vi}{2}\cos(\phi_v - \phi_i)}_{P\,\text{costante}} + \underbrace{\frac{vi}{2}(2\omega t + \phi_v + \phi_i)}_{P\,\text{fluttuante}}$$

il contributo costante P^{cost} coincide con la *potenza attiva*; mentre il contributo sinusoidale P^{flu} è chiamato *potenza fluttuante;* la sua ampiezza $P^{\text{app}} = \frac{vi}{2}$ è chiamata *potenza apparente*.

La potenza istantanea oscilla tra il valore massimo e minimo:

$P_{\min} < 0 \qquad P_{\max} > 0$

$P_{\text{cost}} = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} \qquad P_{app} = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2}$

La <u>potenza attiva</u> è definita come la media della potenza istantanea $p(t)$ su un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ sufficientemente lungo rispetto alla dinamica di $p(t)$:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt$$

La potenza attiva P assorbita da un bipolo operante in regime sinusoidale coincide con la componente costante della potenza istantanea

<u>valori efficaci</u> $\qquad v^{eff} = \frac{|\bar{v}|}{\sqrt{2}} \qquad i^{eff} = \frac{|\bar{i}|}{\sqrt{2}}$

Potenza complessa

Potenza complessa: $P = \frac{\bar{v} \cdot \bar{i}^*}{2} = \underbrace{\frac{v \cdot i}{2}\cos(\phi_v - \phi_i)}_{potenza\ attiva} + j\underbrace{\frac{v \cdot i}{2}\sin(\phi_v - \phi_i)}_{potenza\ reattiva}$

$$P = \frac{z \cdot \bar{i} \cdot \bar{i}^*}{2} = \frac{y^* \cdot \bar{v} \cdot \bar{v}^*}{2} = \frac{r \cdot i^2}{2} + j\frac{x \cdot i^2}{2} = \frac{g \cdot v^2}{2} - j\frac{b \cdot v^2}{2}$$

$\overline{P_i} = P_i + jQ_i$

La parte reale della potenza complessa coincide con la potenza attiva.

La parte immaginaria della potenza complessa è chiamata potenza reattiva.

Il modulo della potenza complessa coincide con la potenza apparente.

$\left|\overline{P_u}\right| = \sqrt{P_u^2 + Q_u^2}$

<u>Relazione tra potenza reattiva ed energia massima immagazzinata</u>

$Q = -\omega W^{\max}$ per il condensatore

$Q = \omega W^{\max}$ per l'induttore

<u>Corollario della potenza reattiva</u>: la potenza reattiva assorbita da un componente composito è uguale alla somma delle potenze reattive assorbite dai K componenti che fanno parte del bipolo composito.

Relazione tra la potenza attiva, reattiva e istantanea

$$p(t) = \underbrace{P[1 + \cos(2\omega t + 2\phi_v - 2\phi_i)]}_{\text{potenza attiva istantanea}} + \underbrace{Q\sin(2\omega t + 2\phi_v - 2\phi_i)}_{\text{potenza reattiva istantanea}}$$

$P = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2}$ $\quad P^{app} = \frac{P^{\max} - P^{\min}}{2}$ $\quad Q = \pm\sqrt{\left(P^{app}\right)^2 - P^2}$ $\quad Q = \pm\sqrt{-P_{\min} \cdot P_{\max}}$

$P_{\max} = P_u + \sqrt{P_u^2 + Q_u^2}$ $\quad P_{\min} = P_u - \sqrt{P_u^2 + Q_u^2}$

$P = \frac{1}{2} z\left|i\right|^2 = \frac{1}{2}\frac{\left|v\right|^2}{z^*}$ $\quad P_u = \frac{1}{2} r_u \left|\bar{i}_u\right|^2 = \frac{1}{2} g_u \left|i\right|^2 = \frac{1}{2}\frac{\left|v\right|^2}{r_u}$ $\quad Q_u = \frac{1}{2} x_u \left|\bar{i}_u\right|^2$

Potenza attiva disponibile di una sorgente sinusoidale:

$P_{disp} = \frac{\left|\bar{\hat{v}}\right|^2}{8 r_s}$ $\quad$ se $z_u = z_s^*$

<u>Quadro della potenza istantanea assorbita dai bipoli comuni</u>

$R\langle r\rangle$	$\frac{ri^2}{2}\left[1 + \cos(2\omega t + 2\phi_v)\right]$	$\begin{cases} P^{\min} = 0 \\ P^{\text{cost}} = \frac{ri^2}{2} \end{cases}$	$P^{\max} = ri^2$ $P^{\text{app}} = \frac{ri^2}{2}$
$C\langle c\rangle$	$\frac{\omega C v^2}{2}\cos(2\omega t + 2\phi_v + \pi/2)$	$\begin{cases} P^{\min} = -\frac{\omega C v^2}{2} \\ P^{\text{cost}} = 0 \end{cases}$	$P^{\max} = \frac{\omega C v^2}{2}$ $P^{\text{app}} = \frac{\omega C v^2}{2}$
$L\langle l\rangle$	$\frac{\omega L i^2}{2}(2\omega t + 2\phi_v - \pi/2)$	$\begin{cases} P^{\min} = -\frac{\omega L i^2}{2} \\ P^{\text{cost}} = 0 \end{cases}$	$P^{\max} = \frac{\omega L i^2}{2}$ $P^{\text{app}} = \frac{\omega L i^2}{2}$

corollario di Boucherot

- ✓ Quando un DB è chiuso su un condensatore, la potenza reattiva assorbita da tutto il bipolo composito è la potenza reattiva assorbita dal condensatore moltiplicata per il determinante della matrice di trasmissione diretta del DB.
- ✓ In un DB contenente un solo componente con parte immaginaria, la parte reattiva della potenza assorbita dal DB coincide necessariamente con la potenza reattiva assorbita dalla parte immaginaria del componente.

Risonatori ideali

Risonatore serie ideale

Impedenza $z_s(j\omega) = \frac{\bar{v}}{\bar{i}} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]$

Risonatore parallelo ideale

Impedenza $y_p(j\omega) = \frac{\bar{i}}{\bar{v}} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j\left[\omega C - \frac{1}{\omega L}\right]$

Pulsazione di risonanza $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Frequenza di risonanza $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

Se $\omega_0 = \omega$ il risonatore ideale in serie viene sostituito da un corto circuito

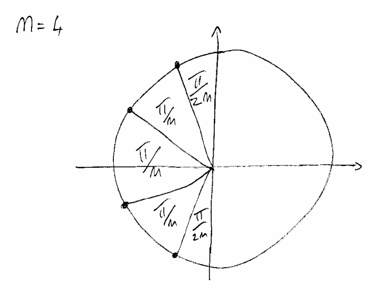
il risonatore ideale in parallelo viene sostituito da un circuito aperto

relazione tra frequenza centrale e frequenze laterali $f_1 \cdot f_2 = f_0^2$

FILTRI
Funzioni di butterworth

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} = \frac{1}{1+\left[\frac{\varepsilon^2}{(\omega_0)^{2n}}\right]\omega^{2n}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2\left(\frac{-s^2}{\omega_0}\right)^{n}}$$

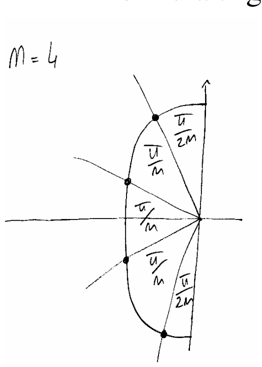
- massima piattezza in banda passante e monoticità in banda attenuata.
- Il fattore tra parentesi quadre agisce come un unico fattore, i parametri ω_0, n, ε agiscono come 2 soli.
- I poli coincidono con le radici dell'equazione $s^2 = \omega_0 (-1)^{n-1}\left(\frac{\omega_0^2}{\varepsilon^2}\right)$
- Distribuzione dei poli delle funzioni di Butterworth lungo un semicerchio nel semipiano sinistro di Gauss



Funzioni di Chebyshev

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n\left(\frac{-s}{\omega_0}\right)^{2}}$$

- ondulazione costante in banda passante e monoticità in banda attenuata
- ω_0 determina la larghezza della banda passante, ε determina l'ampiezza dell'oscillazione in banda passante,al crescere di n a parità dei valori precedenti cresce la pendenza in banda di transizione quindi la selettività del filtro.
- Distribuzione dei poli lungo una semiellisse nel semipiano sinistro.
- Ciascun polinomio di Chebyshev $C_n(x)$ risulta caratterizzato dal numero massimo possibile di semioscillazioni coincidente con il grado del polinomio stesso.
- Formula trigonometrica dei polinomi di C. $C_n(x) = \cos\left[n \cdot \arccos(x)\right]$

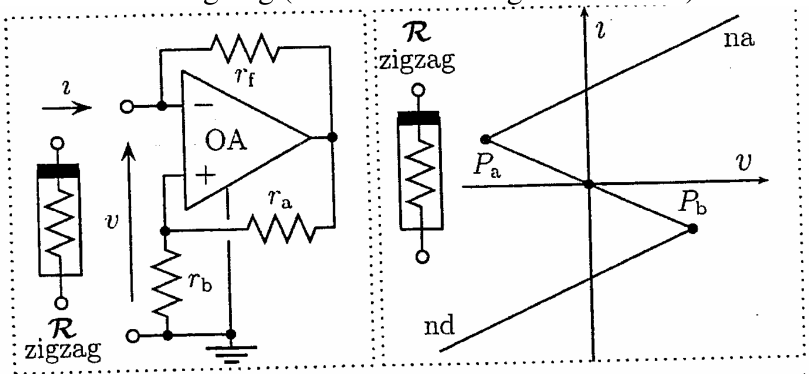


Funzioni di Cauer

- Andamento a ondulazione costante in banda passante ed in banda attenuata con comportamento monotonico in fase di transizione.
- Fase di transizione molto corta.

Analisi dinamica di un flip-flop

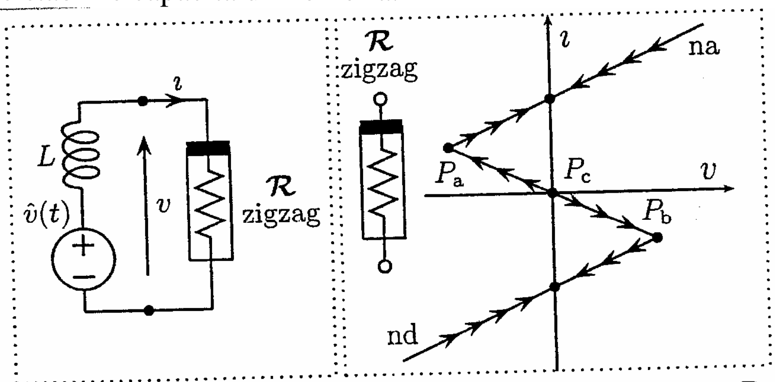
Caratteristica adinamica a zig-zag (costituita da 3 segmenti lineari).



Bipolo composito, con caratteristica a zigzag, costituito da un op-amp e tre resistori

Punti d'impasse: è il fenomeno del "salto" (discontinuità analitica) tra due punti distanti di una caratteristica adinamica (impasse point).

Connettendo un induttore in serie alla sorgente di tensione otteniamo un circuito con punti di equilibrio stabili e capacità di memoria.



Circuito costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ tempo-variante un $\mathcal{L}$ in serie e un $\mathcal{R}$ a zigzag

Rimozione di un polo all'infinito
Serie di una induttanza: si parte da $Z(s)$ e si deve eliminare il fattore più alto di grado al numeratore.
Parallelo di un condensatore: si parte da $Y(s)$ e si deve eliminare il fattore più alto di grado del numeratore.
Rimozione di un polo nell'origine
Serie di un condensatore: si parte da $Z(s)$ e si deve eliminare il termine noto del numeratore.
Parallelo di una induttanza: si parte da $Y(s)$ e si deve eliminare il termine noto del numeratore.
Rimozione di una costante
Occorre vedere che tipo di rete occorre (Cauer primo tipo o Cauer secondo tipo) e poi occorre valutare il fattore $Z(\infty)$ o $Z(0)$.

Regole pratiche
Se il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore è più utile eliminare un polo all'infinito dell'impedenza piuttosto che un polo nell'origine dell'ammettenza.
Si può eliminare un polo nell'origine solo se la differenza tra i gradi del numeratore e del denominatore è minore o uguale a 1.
Se il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore è più utile rimuovere un polo all'infinito dell'ammettenza.

Zero nell'origine = polo all'infinito

Impedenze ed ammettenze
$Z(s) = \dfrac{1}{Y_1(s) + Y_2(s)}$ parallelo di 2 componenti

Matrici
Un amatrice quadrata è detta simmetrica se gli elementi di ogni coppia simmetrica rispetto alla diagonale principale sono uguali. Altrimenti la matrice è detta asimmetrica.
Una matrice quadrata è detta antisimmetrica se ogni elemento della diagonale principale è nullo e gli elementi di ogni coppia simmetrica rispetto alla diagonale stessa sono opposti.
Matrice inversa

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det M}$$

Autovalori matrice

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}$$

Se le matrici cardinali di un doppio bipolo sono antisimmetriche, il doppio bipolo è inerte.

La matrice singolare è una matrice che ha determinante nullo.

La matrice di stato è la matrice del circuito omogeneo associato.

Le pulsazioni naturali sono date dai poli del circuito:

1. se ho un $\widehat{V}$ le pulsazioni naturali sono date dal polo dell'ammettenza poichè $I = \widehat{V} \cdot \mathbf{A}$, l'inverso vale per $\hat{I}$ $\left(V = \hat{I} \cdot \mathbf{Z}\right)$
2. altrimenti la pulsazione naturale è data dalla $\tau = C \cdot R_{eq} = \frac{L}{R_{eq}}$ del circuito
3. se il circuito non ha generatori occorre inserire un generatore di prova per calcolare la sua impedenza/ammettenza. (generatore tensione in serie, generatore corrente in parallelo).
4. la pulsazione reale è negativa.

<u>Varie</u>

Trasformazioni di Eulero

$1-j=1\cdot\sqrt{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$2je^{j\frac{\pi}{4}}=2\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$

$3+2j=3\cos(\omega t)-2\sin(\omega t)$

Formule trigonometriche

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x).$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(x)$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=$

per trovare la tensione o la corrente in un resistore nel tempo t=0 dopo l'apertura (o chiusura) di un interruttore, occorre trasformare il C in una V e il L in una I, a questo punto calcolare la tensione o corrente che ci interessa. Ciò vale solo per il tempo t=0.
