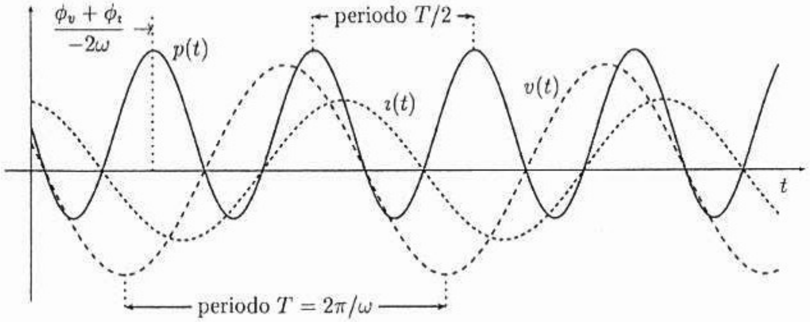
7 POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE

Questo capitolo è dedicato all'analisi della potenza nei circuiti operanti in regime sinusoidale. La valutazione della potenza e/o lavoro elettrico che si sviluppano in un circuito dinamico e lineare in regime sinusoidale deve tenere conto della specificità del regime stesso : tutte le tensioni e correnti in gioco sono sinusoidali : la loro periodicità consente di definire diversi tipi di potenze, tutte necessarie per analizzare il comportamento energetico dei circuiti operanti in regime sinusoidale.

7.1 POTENZA ISTANTANEA E POTENZA ATTIVA

7.1.1 Potenza istantanea nei bipoli e in singole porte di doppi bipoli

Siano $v(t) = v\ \cos(\omega t + \phi_v)$ e $\imath(t) = \imath\ \cos(\omega t + \phi_\imath)$ la tensione e la corrente ai capi di un generico bipolo (sia semplice sia composito) o della porta di un doppio bipolo operante in regime sinusoidale. In accordo al Cap. 2, il prodotto $p(t) = v(t)\ \imath(t)$ definisce la *potenza (effettiva) istantanea*, dove "*istantanea*" ricorda la sua dipendenza dal tempo.



Commento : La potenza istántanea $p(t)$ si annulla ogni qualvolta sia nulla la tensione $v(t)$ o la corrente $\imath(t)$. ■

Proprietà : la potenza istantanea $p(t)$ assorbita da un bipolo (ovvero porta di un doppio bipolo) è una sinusoide con pulsazione 2ω sovrapposta a una costante :

$$p(t) = v(t)\ \imath(t) = v\ \cos(\omega t + \phi_v)\ \imath\ \cos(\omega t + \phi_\imath) = \underbrace{\frac{v\imath}{2}\cos(\phi_v - \phi_\imath)}_{P^{\text{cost}}} + \underbrace{\frac{v\imath}{2}\cos(2\omega t + \phi_v + \phi_\imath)}_{p^{\text{flu}}(t)}$$

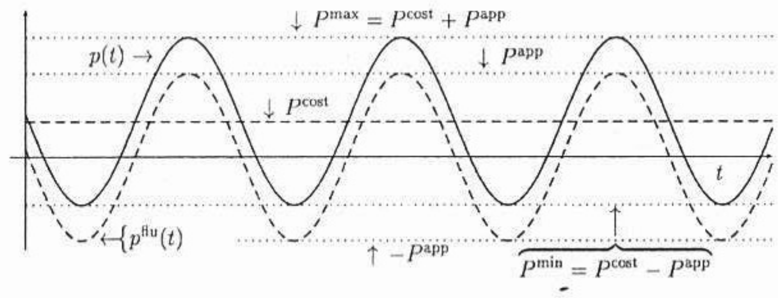
Definizioni : In seguito vedremo che il contributo costante P^{cost} coincide con la *potenza attiva*, mentre il contributo sinusoidale $p^{\text{flu}}(t)$ è chiamato *potenza fluttuante* : la sua ampiezza $P^{\text{app}} = v\ \imath/2$ è chiamata *potenza apparente*. Il contributo $P^{\text{cost}} = v\ \imath\ \cos(\phi_v - \phi_\imath)/2$ è minore o uguale in valore assoluto all'ampiezza P^{app} : $|P^{\text{cost}}| \le P^{\text{app}}$.

Proprietà : La potenza istantanea $p(t)$ oscilla periodicamente tra i minimi di valore P^{min} e i massimi di valore P^{max} :

Minimi di $p(t)$	***Massimi di*** $p(t)$
$P^{\text{min}} = P^{\text{cost}} - P^{\text{app}}$ dove $P^{\text{min}} \le 0$	$P^{\text{max}} = P^{\text{cost}} + P^{\text{app}}$ dove $P^{\text{max}} \ge 0$
per $\cos(2\omega t + \phi_v + \phi_\imath) = -1$	per $\cos(2\omega t + \phi_v + \phi_\imath) = 1$

Siccome $P^{\text{app}} \ge |P^{\text{cost}}|$, in nessun caso, la potenza minima P^{min} può essere positiva e la potenza massima P^{max} può essere negativa. Valgono anche le formule inverse :

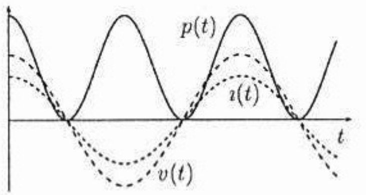
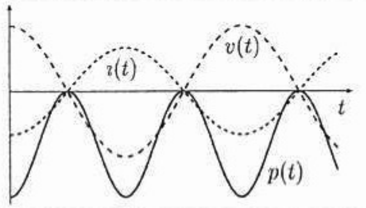
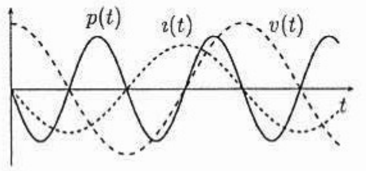
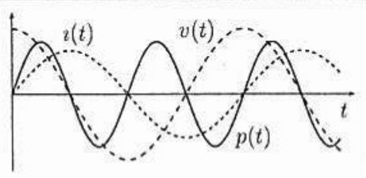
$$P^{\text{cost}} = (P^{\text{max}} + P^{\text{min}})/2 \qquad , \qquad P^{\text{app}} = (P^{\text{max}} - P^{\text{min}})/2$$



Prof PREMOLI aa 2002-2003
6° GRUPPO
21 05 2003
€ 0,50

Esaminiamo la potenza istantanea assorbita da specifici bipoli omogenei :

Quadro della potenza istantanea assorbita dai $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{L}$

formula di $p(t)$	diagrammi di $v(t)$, $\imath(t)$ e $p(t)$	valori specifici
$\mathcal{R}\langle r\rangle$ con $r>0$ (dissipativo) $\frac{r\imath^2}{2}[1+\cos(2\omega t+2\phi_v)]$ sinusoide rialzata		$P^{\rm min}=0$ $P^{\rm max}=r\,\imath^2$ $P^{\rm cost}=r\,\imath^2/2$ $P^{\rm app}=r\,\imath^2/2$
$\mathcal{R}\langle r\rangle$ con $r<0$ (strettamente attivo) $\frac{r\imath^2}{2}[1+\cos(2\omega t+2\phi_v)]$ sinusoide ribassata		$P^{\rm min}=r\,\imath^2$ $P^{\rm max}=0$ $P^{\rm cost}=r\,\imath^2/2$ $P^{\rm app}=\lvert r\rvert\,\imath^2/2$
$\mathcal{C}\langle C\rangle$ con $C>0$ (conservativo) $\frac{\omega Cv^2}{2}\cos(2\omega t+2\phi_v+\pi/2)$ sinusoide pura		$P^{\rm min}=-\omega\,C\,v^2/2$ $P^{\rm max}=\omega\,C\,v^2/2$ $P^{\rm cost}=0$ $P^{\rm app}=\omega\,C\,v^2/2$
$\mathcal{L}\langle L\rangle$ con $L>0$ (conservativo) $\frac{\omega\,L\,\imath^2}{2}\cos(2\omega t+2\phi_v-\pi/2)$ sinusoide pura		$P^{\rm min}=-\omega\,L\,\imath^2/2$ $P^{\rm max}=\omega\,L\,\imath^2/2$ $P^{\rm cost}=0$ $P^{\rm app}=\omega\,L\,\imath^2/2$

Commento : Per il $\mathcal{C}$ ed il $\mathcal{L}$, la componente costante $P^{\rm cost}$ è assente, mentre, per il $\mathcal{R}$, essa coincide con l'ampiezza della sinusoide $P^{\rm app}$, indipendentemente dalla positività/negatività della resistenza. Le quattro figure del suddetto quadro sono tracciate assumendo nulla la fase ϕ_v della $v(t)$.

Commenti : Il fatto che la potenza istantanea in un resistore (con $r>0$) sia sempre nonnegativa è una conseguenza diretta del fatto che il resistore è adinamico e dissipativo.
Il fatto che la potenza istantanea in un induttore e in un condensatore sia una sinusoide pura è una conseguenza diretta del fatto che entrambi sono dinamici e conservativi. Infatti la "conservatività" implica che la potenza media calcolata su un intervallo che tende a infinito tenda a essere nulla. ■

Proprietà : Richiamiamo dal Cap. 1 il Teorema della potenza effettiva : la somma delle potenze istantanee estesa a tutti i K componenti di un circuito è nulla

$$\sum_{k=1}^{K} p_k(t)=0$$

■

7.1.2 Potenza attiva

La potenza istantanea è piuttosto scomoda e non molto significativa nell'analisi usuale di un circuito in regime sinusoidale : nell'uso comune, altri parametri derivati da essa sono preferiti :

Definizione : la *potenza attiva* P è definita come la media della potenza istantanea $p(t)$ su un intervallo di tempo $[t_1,t_2]$ sufficientemente lungo rispetto alla dinamica di $p(t)$:

$$P=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}p(t)\,{\rm d}t \quad \text{dove} \quad (t_2-t_1)\longrightarrow\infty$$

Avvertenza : La suddetta definizione della potenza attiva non vale solamente per il regime sinusoidale : per esempio vale in qualsiasi altro regime periodico (vedere Cap. 8). Presso ogni utenza sia domestica sia industriale è installato un contatore, che è lo strumento che misurare la potenza attiva, o meglio il suo integrale (energia). ■

Proprietà : La potenza attiva P assorbita da un bipolo operante in regime sinusoidale coincide proprio col termine costante $P^{\rm cost}$ che sommato alla potenza fluttuante $p^{\rm flu}(t)$ costituisce la potenza istantanea (Par. 7.1.1) :

$$P=P^{\rm cost}=\frac{v\,\imath}{2}\cos(\phi_v-\phi_\imath)$$

Prova Per un dato intervallo di tempo t_1—t_2 introduciamo il valor medio della potenza istantanea :

$$P_{\rm m}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}p(\tau)\,{\rm d}\tau$$

In genere, il valor medio di una generica efunzione varia al variare dell'intervallo di tempo su di cui è calcolato. La potenza media $P_{\rm m}$ risulta uguale al termine costante $P^{\rm cost}$ sommato al valor medio della potenza fluttuante :

$$P_{\rm m}=P^{\rm cost}+\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}P^{\rm app}\,\cos(2\,\omega\,\tau+\phi_v+\phi_\imath)\,{\rm d}\tau$$

Nella totalità dei casi di interesse pratico, si ha che $(t_2-t_1)\gg T=2\,\pi/\omega$ e conseguentemente la media della potenza fluttuante $p^{\rm flu}(t)$ è praticamente zero. Infatti una sinusoide è costituita da una successione alternata di semioscillazioni positive e negative : gli integrali relative alle semioscillazioni positive sono cancellati esattamente da quelli relativi alle semioscillazioni negative. L'effetto degli estremi dell'intervallo genera un residuo che tende a zero, qualora l'ampiezza dell'intervallo tenda a ∞ . Nei casi che $(t_2-t_1)=k\,\pi/\omega$ (con k intero), il residuo dell'integrale della potenza fluttuante è esattamente nullo.

Terminologia : Il termine potenza attiva è ormai consolidato da lungo tempo, da quando i circuiti in regime sinusoidale sono diventati i preferiti per trasmettere l'energia elettrica a distanza. Attualmente l'aggettivo attivo è pure usato per definire i componenti circuitali che possono erogare energia, come visto nei CCap. 2. 3 e 4. Questi due usi del termine attivo non hanno niente a che fare uno con l'altro. A parere di chi scrive, sarebbe meglio parlare di potenza efficace, ma l'uso del termine "potenza attiva" è troppo consolidato per poterlo cambiare. ■

Teorema della potenza attiva : Dal teorema della potenza effettiva (Cap. 1), integrando i due membri dell'equazione che annulla la somma delle potenze istantanee, si ha che la somma delle potenze attive di tutti i K componenti del circuito è nulla :

$$\sum_{k=1}^{K} P_k = 0$$

Corollario della potenza attiva : Dal corollario della potenza effettiva (Cap. 1), integrando i due membri dell'equazione che eguaglia la potenza istantanea assorbita da un componente composito alla somma delle potenze istantanee assorbite dai K componenti aggregati, si ha che la potenza attiva di un componente composito coincide con la somma delle potenze attive dei K componenti :

$$P = \sum_{k=1}^{K} P_k$$

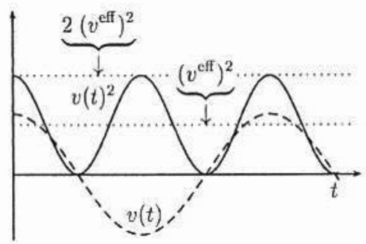
Proprietà : anche la potenza fluttuante soddisfa al rispettivo teorema e corollario. Infatti essa è la differenza tra la potenza istantanea e quella attiva, che soddisfano per proprio conto allo stesso teorema e corollario. ∎

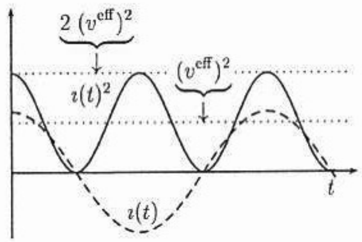
7.1.3 Valore efficace, fattore di potenza

Richiamiamo qui di seguito la definizione di valore efficace di una qualsiasi tensione $v(t)$ ovvero corrente $i(t)$:

Definizione : il *valore efficace* della tensione e della corrente sono definiti dalla radice quadrata del valore medio del quadrato della funzione stessa. L'intervallo d'integrazione $[t_1, t_2]$ deve essere molto lungo, cioè $(t_2 - t_1) \longrightarrow \infty$:

$$v^{\text{eff}} = \lim_{(t_2-t_1)\to\infty} \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} [v(t)]^2 \, dt} \quad , \quad i^{\text{eff}} = \lim_{(t_2-t_1)\to\infty} \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} [i(t)]^2 \, dt}$$





Proprietà : Come già detto nel Cap. 5, nel caso di tensioni e correnti sinusoidali la tensione e corrente efficace assumono un'espressione compatta e ben nota :

$$v^{\text{eff}} = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad , \quad i^{\text{eff}} = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

∎

Commento : Come nel caso della potenza attiva il risultato non cambia se l'ampiezza $t_2 - t_1$ dell'intervallo d'integrazione $[t_1, t_2]$ coincide con un multiplo intero di mezzo periodo. ∎

Definizione : Per un dato bipolo, il fattore $\cos(\phi) = \cos(\phi_v - \phi_i)$, presente nell'espressione della potenza attiva in regime sinusoidale, è chiamato *fattore di potenza*, dove $\phi = \phi_v - \phi_i$

coincide con la fase dell'impedenza del bipolo. ∎

Proprietà : Con le precedenti definizioni la potenza attiva è uguale al prodotto dei valori efficaci della tensione e della corrente e del fattore di potenza :

$$P = v^{\text{eff}} i^{\text{eff}} \cos(\phi)$$

∎

Altre espressioni della potenza attiva in regime sinusoidale sono molto spesso usate : la prima è uguale al prodotto del valore efficace della tensione v^{eff} per la componente $i_c = i^{\text{eff}} \cos(\phi)$ della corrente in fase con la tensione; analogamente la seconda è uguale al prodotto del valore efficace della corrente i^{eff} per la componente $v_c = v^{\text{eff}} \cos(\phi)$ della tensione in fase con la corrente :

$$P = v^{\text{eff}}\, i_c \quad , \quad P = i^{\text{eff}}\, v_c$$

Commento : In pratica la potenza attiva è una misura del consumo di energia elettrica in un intervallo di tempo, purchè questo intervallo sia molto più lungo del periodo della sinusoide. Il costo dell'energia consumata da un utente viene determinato dall'integrale della potenza attiva esteso a tutto l'arco di tempo preso in considerazione. ∎

Commento : Nelle reti elettriche per la trasmissione e distribuzione di energia elettrica fino agli impianti domestici, che operano in genere in regime sinusoidale, si preferisce parlare di tensioni e correnti efficaci e non delle loro ampiezze. Quindi gli Enti pubblici e privati fornitori di energia elettrica fanno sempre riferimento ai valori efficaci della tensione e della corrente. Analogamente, i dati di targa (tensione e corrente) riportati su un qualsiasi apparecchio elettrico di uso industriale o domestico, che non sia alimentato con batterie, si riferiscono ai valori efficaci della tensione e della corrente. ∎

7.2 POTENZA COMPLESSA NEI BIPOLI

Viene introdotta la *potenza complessa* congiuntamente alla sua parte immaginaria che prende il nome di *potenza reattiva*. Sebbene la loro introduzione appaia per il momento poco motivata, essa è ampiamente giustificata dalle loro proprietà che le rendono indispensabili anche nell'uso professionale.

7.2.1 Potenza complessa

Introduciamo una definizione, che sarà motivata successivamente, legata al prodotto del fasore della tensione per il coniugato di quello della corrente. A priori, questo prodotto non ha un preciso significato, nel senso che esso non è un'operazione prevista nella teoria dei fasori introdotta nel Cap. 6, ma solo nel dominio dei numeri complessi.

Definizione : In un bipolo o porta la *potenza complessa* $\bar{P}$ è definita come la metà del prodotto del fasore della tensione $\bar{v}$ e del coniugato del fasore della corrente $\bar{i}^*$:

$$\bar{P} = \frac{\bar{v}\,\bar{i}^*}{2} = \underbrace{\frac{v\,i}{2}\cos(\phi_v - \phi_i)}_{P^{\text{cost}}} + j\,\underbrace{\frac{v\,i}{2}\sin(\phi_v - \phi_i)}_{\text{senza nome}}$$

Proprietà : la parte reale della potenza complessa coincide con la potenza attiva : $P = \Re(\bar{P})$ come risulta dal confronto con la formula riportata nel Par. 7.1.2 . ∎

Introducendo l'impedenza z o l'ammettenza y del bipolo si ottengono due espressioni alternative della potenza complessa di larghissimo uso :

$$\bar{P} = \frac{z(\jmath\omega)\,\bar{\imath}\,\bar{\imath}^*}{2} = P + \jmath\Im[\bar{P}] = \frac{r(\omega)\,i^2}{2} + \jmath\,\frac{x(\omega)\,i^2}{2}$$

$$\bar{P} = \frac{y^*(\jmath\,\omega)\,\bar{v}\,\bar{v}^*}{2} = P + \jmath\,\Im[\bar{P}] = \frac{g(\omega)\,v^2}{2} - \jmath\,\frac{b(\omega)\,v^2}{2}$$

Avvertenza : Nell'esprimere la potenza complessa in funzione della tensione, occorre rammentare che l'ammettenza compare come "coniugata". ■

L'introduzione della potenza complessa appare per il momento come un giochetto matematico senza alcun aggancio con la realtà fisica : le seguenti proprietà giustificano la sua introduzione :

Teorema della potenza complessa (Boucherot) : La somma delle potenze complesse estesa a tutti i K componenti di un circuito è nulla :
$$\sum_{k=1}^{K} \bar{P}_k = 0$$ ■

In particolare si ha che anche la somma delle parti reali ed immaginarie della potenza complessa estesa a tutti i componenti del circuito è nulla.

Prova : La prova è basata sul fatto che il vettore dei fasori delle tensioni di ramo $\bar{\boldsymbol{v}}$ e quello delle correnti di ramo $\bar{\boldsymbol{\imath}}$ soddisfano alle rispettive Leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori, che qui ricopiamo dal Par. 6.3.1 :

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{nod}} \qquad ; \qquad \mathbf{A}\,\bar{\boldsymbol{\imath}} = \mathbf{0}_{n-1}$$

in cui $\mathbf{A}$ è la matrice incidenza. Avendo orientato i fasori delle tensioni e delle correnti di ramo con la convenxione normale per ciascun ramo noi abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{K} \bar{P}_k = \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{\imath}} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{nod}}\right]^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{\imath}} = \frac{1}{2}\left[[\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{nod}}]^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right]\,\bar{\boldsymbol{\imath}} = \frac{1}{2}[\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{nod}}]^{\mathrm{T}}\,[\mathbf{A}\,\bar{\boldsymbol{\imath}}] = 0$$

Questa prova è una ripetizione, nel dominio dei fasori, di quella del Teorema delle potenze effettive nella Sez. 4.3 . ■

Corollario della potenza complessa (Boucherot) : La potenza complessa assorbita da un componente composto da K componenti è uguale alla somma delle K potenze complesse assorbite da ciascuno dei componenti.
$$\bar{P} = \sum_{k=1}^{K} \bar{P}_k$$ ■

Prova : Alimentiamo il componente composito con una sorgente impressiva sinusoidale [nel caso di un bipolo] o con una coppia di sorgenti impressive sinusoidali [una per ciascuna porta nel caso di un doppio bipolo]. Il teorema di Boucherot afferma che la somma delle potenze complesse assorbite dai componenti interni al componente composito è uguale alla potenza complessa erogata dalla sorgente impressiva [dalle due sorgenti impressive], che a sua volta coincide con la potenza complessa assorbita dal componente composito. ■

Proprietà : Il modulo della potenza complessa coincide con la potenza apparente P^{app} (vedere Par. 7.1.1) :
$$|\bar{P}| = \frac{v\,i}{2} = P^{\mathrm{app}}$$ ■

Avvertenza : La somma di tutte le potenze apparenti non è in genere nulla : infatti ciascuna di esse è positiva o al più nulla. Inoltre la potenza apparente in un componente composito non coincide con la somma delle potenze apparenti nei componenti aggregati. Infatti la somma dei moduli di numeri complessi non coincide in genere con il modulo della loro somma. ■

7.2.2 Potenza reattiva

Vediamo di dare un nome e un significato fisico anche alla parte immaginaria della potenza complessa introdotta nel precedente paragrafo :

Definizione : la parte immaginaria della potenza complessa $\bar{P}$, che indichiamo col simbolo Q, è chiamata *potenza reattiva* :
$$Q = \Im(\bar{P}) = \frac{vi}{2}\sin(\phi_v - \phi_i)$$ ■

Commento : Dall'esame del fattore $\sin(\phi_v - \phi_i)$ si conclude che la potenza reattiva Q è positiva, qualora la tensione sia in anticipo rispetto alla corrente (bipolo resistivo-induttivo), mentre è negativa, qualora la tensione sia in ritardo rispetto alla corrente (bipolo resistivo-capacitivo). Il segno usato per Q è una pura convenzione, universalmente accettata e rispettata, conseguente alla definizione della potenza complessa nel Par. 7.2.1 . Se la potenza complessa fosse definita come $(1/2)\ \bar{v}^*\,\bar{\imath}$, definizione che sarebbe, in linea di principio, altrettanto legittima che la precedente, la sua parte immaginaria, cioè la potenza reattiva, cambierebbe di segno. ■

Proprietà : Dalla definizione di potenza complessa, attiva, reattiva e apparente deriva immediatamente le relazioni :
$$|\bar{P}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = P^{\mathrm{app}}$$ ■

Possiamo dare un significato fisico alla potenza reattiva Q assorbita da un condensatore ovvero un induttore : essa è strettamente legata al valore massimo raggiunto dall'energia immagazzinata istantanea (essa è una sinusoide rialzata di pulsazione 2ω) durante un intero periodo. ■

Proprietà : Tra la potenza reattiva Q e l'energia massima immagazzinata $W^{\max}$ esiste la relazione :

condensatore	***induttore***
$Q = -\frac{1}{2}\,b\,v^2 = -\frac{1}{2}\,\omega\,C\,v^2$	$Q = \frac{1}{2}\,x\,i^2 = \frac{1}{2}\,\omega\,L\,i^2$
$W^{\max} = \max\limits_{\langle t\rangle}[w^{\mathrm{ene}}(t)] = \frac{1}{2}\,C\,v^2$	$W^{\max} = \max\limits_{\langle t\rangle}[w^{\mathrm{ene}}(t)] = \frac{1}{2}\,L\,i^2$
$Q = -\omega\,W^{\max}$	$Q = \omega\,W^{\max}$

Essendo l'energia massima immagazzinata il doppio dell'energia media immagazzinata, possiamo affermare che la potenza reattiva coincide col doppio delle energia media sia per l'induttore sia per il condensatore : in questo caso la potenza reattiva ha un segno meno.

Avvertenza : La precedente interpretazione non vale per altri componenti. Per esempio, la potenza reattiva in un resistore è sempre nulla, mentre in una $\hat{\boldsymbol{\mathcal{V}}}$ ovvero $\hat{\boldsymbol{\mathcal{I}}}$ può essere nonnulla, nonostante che anch'essi siano componenti adinamici. Questo risultato è spiegato dal fatto che una delle grandezze è nonvincolata. ■

Teorema della potenza reattiva : La somma delle potenze reattive estesa a tutti i K componenti di un circuito operante in regime sinusoidale è nulla :
$$\sum_{k=1}^{K} Q_k = 0$$ ■

Prova : La somma di tutte le potenze reattive coincide con la parte immaginaria della somma di tutte le potenze complesse, che è nulla (vedere Par. 7.2.1). ■

Corollario della potenza reattiva : La potenza reattiva assorbita da un componente composito è uguale alla somma delle potenze reattive assorbite dai K componenti che fanno parte del bipolo composito.

$$Q = \sum_{k=1}^{K} Q_k$$

■

Prova : Segue immediatamente dal corollario della potenza complessa nel Par. 7.2.1 . ■

7.2.3 Potenza attiva e reattiva nei bipoli compositi generici

Potenza complessa nei bipoli Se conosciamo la impedenza ovvero l'ammettenza di un bipolo, la potenza complessa può venir determinata con le seguenti formule :

$$\bar{P} = z(\jmath\,\omega)\ |\bar{\imath}|^2/2 \implies P + \jmath\, Q = r(\omega)\ |\bar{\imath}|^2/2 + \jmath\, x(\omega)\ |\bar{\imath}|^2/2$$

$$\bar{P} = y(\jmath\,\omega)^*\ |\bar{v}|^2/2 \implies P + \jmath\, Q = g(\omega)\ |\bar{v}|^2/2 - \jmath\, b(\omega)\ |\bar{v}|^2/2$$

vediamo in dettaglio la potenza complessa nei bipoli niotevoli :

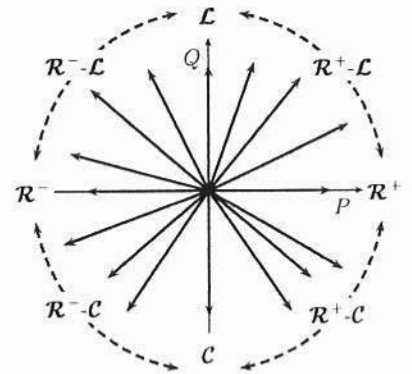
$\mathcal{R}$	$\bar{P} = P + \jmath\, 0 = r\ |\bar{\imath}|^2/2 = g\ |\bar{v}|^2/2$
$\mathcal{C}$	$\bar{P} = 0 + \jmath\, Q = -\jmath\,\omega\, C\ |\bar{v}|^2/2$
$\mathcal{L}$	$\bar{P} = 0 + \jmath\, Q = \jmath\,\omega\, L\ |\bar{\imath}|^2/2$

Potenza reattiva nei bipoli conservativi La potenza reattiva assorbita da un $\mathcal{C}$ è non-positiva in qualsiasi situazione, mentre quella assorbita da un $\mathcal{L}$ è non-negativa in qualsiasi situazione. Se $W^{\max}$ indica il massimo valore dell'energia immagazzinata in un $\mathcal{C}$ ovvero $\mathcal{L}$ operante in regime sinusoidale, la potenza reattiva risulta $Q = -\omega\, W^{\max}$ per il $\mathcal{C}$ e $Q = \omega\, W^{\max}$ per l'$\mathcal{L}$.

I corollari sulla potenza attiva e reattiva assorbite da un componente composito ci permettono di raggiungere, per alcune sottoclassi di bipoli compositi, le seguenti conclusioni :

Quadro della potenza attiva e reattiva assorbita dai bipoli compositi

bipolo composto da	potenza attiva	resistenza	potenza reattiva	reattanza	fase dell'impedenza
induttori	$P = 0$	$r(\omega) = 0$	$Q > 0$	$x(\omega) \geq 0$	$\phi_z = \pi/2$
induttori e resistori positivi	$P \geq 0$	$r(\omega) \geq 0$	$Q \geq 0$	$x(\omega) \geq 0$	$0 \leq \phi_z \leq \pi/2$
induttori e resistori negativi	$P \leq 0$	$r(\omega) \leq 0$	$Q \geq 0$	$x(\omega) \geq 0$	$\pi/2 \leq \phi_z \leq \pi$
resistori positivi	$P \geq 0$	$r(\omega) \geq 0$	$Q = 0$	$x(\omega) = 0$	$\phi_z = 0$
resistori negativi	$P \leq 0$	$r(\omega) \leq 0$	$Q = 0$	$x(\omega) = 0$	$\phi_z = -\pi$
condensatori e resistori positivi	$P \geq 0$	$r(\omega) \geq 0$	$Q \leq 0$	$x(\omega) \leq 0$	$-\pi/2 \leq \phi_z \leq 0$
condensatori e resistori negativi	$P \leq 0$	$r(\omega) \leq 0$	$Q \leq 0$	$x(\omega) \leq 0$	$-\pi \leq \phi_z \leq -\pi/2$
condensatori	$P = 0$	$r(\omega) = 0$	$Q \leq 0$	$x(\omega) \leq 0$	$\phi_z = -\pi/2$



Il piano della potenza complessa è riportato nella Fig.←.

Commento : Le suddette condizioni riguardanti la positività ovvero la negatività della potenza attiva, reattiva, la parte reale e immaginaria e la fase dell'impedenza valgono per qualsiasi valore di ω . Condizioni analoghe esistono anche per l'ammettenza. ■

I precedenti risultati possono essere reinterpretati nel modo seguente :

Proprietà : La fase dell'impedenza di un bipolo composto da un numero qualsiasi di condensatori e resistori con resistenza positiva è compresa nell'intervallo $[-\pi/2, 0]$ e quindi si comporta come un bipolo resistivo-capacitivo per qualsiasi ω (vedere Par. 6.4.2). ■

Proprietà : La fase dell'impedenza di un bipolo composto da un numero qualsiasi di induttori e resistori con resistenza positiva è compresa nell'intervallo $[0, \pi/2]$ e quindi si comporta come un bipolo resistivo-induttivo per qualsiasi ω (vedere Par. 6.4.2). ■

Commento : Per i bipoli composti da resistori positivi, condensatori e induttori, si può solo affermare che $P \geq 0$, mentre Q può essere sia positiva sia negativa al variare di ω .
In presenza di resistori negativi, anche la potenza attiva P potrebbe essere negativa. ■

Commento : La formula della potenza istantanea ci dice che il segno negativo di Q significa che l'andamento della potenza reattiva istantanea $p^{\text{rea}}(t)$ ha uno sfasamento di $\pm\pi$ rispetto a quando il segno di Q è positivo. ■

Potenza reattiva, massima e minima : Nel Par. 7.1.1 avevamo constatato che la potenza massima $P^{\max}$ e la potenza minima $P^{\min}$ dipendono dalla potenza attiva P e quella apparente P^{app} in accordo alle : $P^{\max} = P + P^{\text{app}}$, $P^{\min} = P - P^{\text{app}}$.
Queste formule ci consentono di ottenere una semplice espressione della potenza reattiva

$$Q = \pm\sqrt{(P^{\text{app}})^2 - P^2} = \pm\sqrt{(P^{\text{app}} + P)(P^{\text{app}} - P)} = \pm\sqrt{-P^{\min}\, P^{\max}}$$

L'incertezza sul segno può essere risolta qualora fossimo a conoscenza che il bipolo è resistivo-capacitivo ovvero resistivo-induttivo.

7.3 ESERCIZI SULLA POTENZA ISTANTANEA E COMPLESSA

7.3.1 Esercizio A : Energia massima in un condensatore

Il bipolo composito in Fig.→ opera in regime sinusoidale di frequenza f = 50 Hz ed è costituito dalla serie di un $\mathcal{R}$ e di un $\mathcal{C}$: i fasori della tensione e corrente sono noti : $\bar{v} = 5 - \jmath\, 1$ V e $\bar{\imath} = 3 + \jmath\, 2$ A .

Quesito : Calcolare il valore massimo $w_{\max}$ raggiunto dall'energia (elettrostatica) immagazzinata nel $\mathcal{C}$.

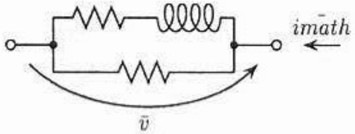
• Dalla teoria (vedere Sez. 7.2.2) sappiamo che il valore massimo dell'energia $w_{\max}$ immagazzinata in un $\mathcal{C}$ in regime sinusoidale dipende dalla potenza reattiva Q_c : $w_{\max} = -Q_c/\omega = |Q_c|/(2\,\pi\, f)$.

Risultato : Siccome Q_c è la parte immaginaria è di quella complessa, otteniamo :

$$Q_c \;=\; \frac{1}{2}\,\Im[\bar{v}\,\bar{\imath}^*] \;=\; \frac{1}{2}\,\Im[(5-\jmath\,1)\,(3-\jmath\,2)] \;=\; -\frac{13}{2}\,\text{VAR} \implies w_{\max} = \frac{13}{\pi\,200}\,\text{J}$$

7.3.2 Esercizio B : Energia massima in un induttore

Il bipolo composito in Fig.→ opera in regime sinusoidale con frequenza nota f = 50 Hz . Il bipolo è costituito da due $\mathcal{R}$ di resistenza ignota e da un $\mathcal{L}$ di induttanza ignota. I fasori della tensione e della corrente del bipolo composito sono noti $\bar{v} = 4 + \jmath\, 1$ V e $\bar{\imath} = 2 - \jmath\, 2$ A .

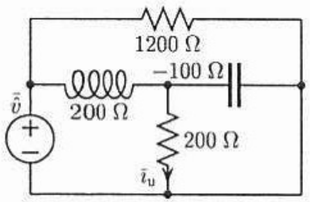


Quesito : Calcolare il valore massimo raggiunto dall'energia immagazzinata nell'$\mathcal{L}$ al variare del tempo t .

• Dal Corollario di Boucherot, la potenza reattiva Q assorbita dal bipolo composito coincide con quella Q_ℓ assorbita dall'$\mathcal{L}$: $Q_\ell = Q = \Im[(1/2)\,\bar{v}\,\bar{\imath}^*] = 5$ VAR

Risultato : Siccome il valore massimo $w_{\max}$ dell'energia immagazzinata nell'$\mathcal{L}$ è legato a Q_ℓ , otteniamo : $w_{\max} = \dfrac{Q_\ell}{\omega} = \dfrac{5}{2\,\pi\,50} = \dfrac{1}{\pi\,20}$ J

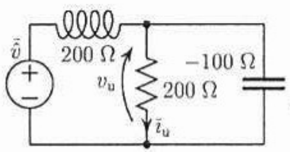
7.3.3 Esercizio C : Potenza istantanea



Il circuito in Fig.← opera in regime sinusoidale con f = 50 Hz . Esso è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$. La tensione impressa vale $\bar{v} = 100 + \jmath\, 100$ V .

Quesito : Calcolare la corrente $\bar{\imath}_u$ e la potenza complessa $\bar{P}_u$ assorbita dal $\mathcal{R}\langle 200\ \Omega\rangle$. Inoltre calcolare la corrente istantanea $i_u(t)$ e la potenza istantanea $p_u(t)$ (nel dominio del tempo).

• Il $\mathcal{R}\langle 1200\ \Omega\rangle$, in parallelo alla $\hat{\mathcal{V}}\langle\bar{v}\rangle$, è sostituito da un c.a. , poiché non ha alcun effetto sulla corrente $\bar{\imath}_u$.



• Dalla regola del partitore di tensione calcoliamo la tensione $\bar{v}_u$:

$$\bar{v}_u \;=\; \frac{(100+\jmath\,100)/(\jmath\,200)}{1/(\jmath\,200) + 1/200 + 1/(-\jmath\,100)} \;=\; \frac{100\,(1+\jmath)}{1+\jmath-2} \;=\; -\jmath\,100\ \text{V}$$

Risultato 1 : La corrente $\bar{\imath}_u$ risulta : $\bar{\imath}_u \;=\; \bar{v}_u/200 \;=\; -\jmath\,0,5$ A .

Risultato 2 : La potenza complessa $\bar{P}_u$ assorbita dal $\mathcal{R}\langle 200\ \Omega\rangle$ è puramente reale (potenza attiva) e vale : $\bar{P}_u = 0,5 \times 200\ |\bar{\imath}_u|^2 \;=\; 25$ W .

Risultato 3 : La corrente istantanea $i_u(t)$ viene calcolata dal fasore $\bar{\imath}_u \;=\; -\jmath\; 0,5$ A , che ci dice che l'ampiezza è 0,5 A e la fase $-\pi/2$: $i_u(t) \;=\; 0,5\ \cos(2\,\pi\,50\,t - \pi/2)$ A .

Risultato 4 : La potenza istantanea $p_u(t)$ assorbita dal $\mathcal{R}\langle 200\ \Omega\rangle$ è una sinusoide rialzata poiché la tensione e la corrente sono in fase : $p_u(t) = 25 + 25\ \cos(\pi\,200\,t - \pi)$ W .

Commento : La potenza fluttuante, componente sinusoidale della potenza istantanea, ha una pulsazione doppia di quella della corrente $i_u(t)$, mentre la sua fase è tale che $p_u(t)$ è nulla in $t = 0$.

7.3.4 Esercizio D : Potenza attiva e reattiva da quella istant.

Consideriamo un bipolo operante in regime sinusoidale : La potenza istantanea $p(t)$ assorbita dal bipolo oscilla tra il valore massimo $P^{\max} = 25$ W e il valore minimo $P^{\min} = -1$ W .

Quesito : Calcolare la potenza attiva (media) P e la potenza reattiva Q assorbita dal bipolo.

• Poichè la potenza istantanea $p(t)$ consiste nella sovrapposizione di una componente costante (potenza attiva) e una sinusoidale (potenza fluttuante), la potenza attiva P coincide con la media aritmetica tra il valore massimo e il valore minimo : $P = [P^{\max} + P^{\min}]/2 \;=\; 12$ W .

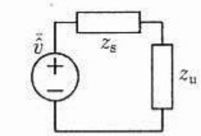
• Siccome l'ampiezza della potenza fluttuante coincide con la potenza apparente

$$P^{\text{app}} \;=\; \sqrt{P^2+Q^2} \;=\; [P^{\max} - P^{\min}]/2 \;\implies\; Q \;=\; \pm\sqrt{-P^{\max}\,P^{\min}} = \pm 5\ \text{VAR} \ .$$

Commento : Questo metodo non consente di calcolare il segno della potenza reattiva : comunque in molti casi noi sappiamo a priori se il bipolo, di cui conosciamo il valore minimo e massimo della potenza istantanea, è resistivo-induttivo oppure resistivo-capacitivo. Questa informazione ulteriore ci consente di dirimere il segno di Q .

7.3.5 Esercizio E : Massimo e minimo della potenza istantanea

Il circuito in Fig.→ opera in regime sinusoidale. Esso è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle\bar{v} = 8\ \text{V}\rangle$ in serie a un bipolo con impedenza (interna) $z_s = 100 - \jmath\, 100\ \Omega$ e da un carico con impedenza $z_u = 200 + \jmath 400\ \Omega$.



Quesito : Calcolare il valore massimo $P_u^{\max}$ e minimo $P_u^{\min}$ della potenza istantanea $p_u(t)$ assorbita dal carico.

• La teoria esposta nel Cap. 22-FCE afferma che la potenza istantanea è uguale alla somma di un termine costante coincidente con la potenza attiva P_u e a un termine sinusoidale la cui ampiezza coincide col modulo della potenza complessa : $|\bar{P}_u| = \sqrt{P_u^2 + Q_u^2}$.

• Esprimiamo $P_u^{\max}$ e $P_u^{\min}$ in funzione di P_u e Q_u (vedere Cap. 23-FCE) :

$$P_u^{\max} = P_u + \sqrt{P_u^2 + Q_u^2} \qquad , \qquad P_u^{\min} = P_u - \sqrt{P_u^2 + Q_u^2}$$

• Per calcolare P_u e Q_u occorre conoscere il fasore della corrente $\imath_u(t)$ che fluisce nel carico

$$\bar{\imath}_u = \frac{\bar{\hat{v}}}{z_s + z_u} = \frac{8}{100 - \jmath\,100 + 200 + \jmath\,400} = \frac{8}{300 + \jmath\,300} = (\sqrt{2} \times 40/3)\exp(-\jmath\pi/4)\ \text{mA}$$

• La potenza attiva e reattiva assorbite dal carico risultano

$$P_u = (1/2)\ r_u\ |\bar{\imath}_u|^2 = (1/2)\ 200\ (\sqrt{2} \times 40/3000)^2 = 0,32/9\ \text{W}$$

$$Q_u = (1/2)\ x_u\ |\bar{\imath}_u|^2 = (1/2)\ 400\ (\sqrt{2} \times 40/3000)^2 = 0,64/9\ \text{W}$$

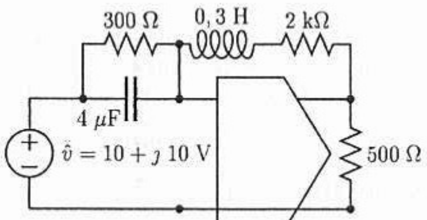
Risultato : Seguono immediatamente il valore massimo e minimo della potenza istantanea

$$P_u^{\max} = 0,32/9 + \sqrt{(0,32/9)^2 + (0,64/9)^2} = 0,32/9\ (1 + \sqrt{5})\ \text{W}$$

$$P_u^{\min} = 0,32/9 - \sqrt{(0,32/9)^2 + (0,64/9)^2} = 0,32/9\ (1 - \sqrt{5})\ \text{W}$$

7.4 ESERCIZI SULLA POTENZA ATTIVA, REATTIVA E COMPLESSA

7.4.1 Esercizio A : Potenza complessa in un circuito con nullore



Il circuito in Fig.← opera in regime sinusoidale con $f = 50$ Hz ed è costituito da un nullore, una $\hat{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la potenza attiva P e reattiva Q erogate dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle 10 + \jmath\,10\ \text{V}\rangle$.

• Il bipolo $\mathcal{R}\langle r_1 = 300\ \Omega\rangle \parallel \mathcal{C}\langle C_1 = 4\ \mu\text{F}\rangle$ è connesso alla porta pilotante di una $\mathcal{V}_\mathcal{I}$ dinamica (c.c.) che non assorbe potenza.

Risultato : La potenza attiva P e reattiva Q erogate dalla $\hat{\mathcal{V}}$ coincidono con le rispettive potenze assorbite dal $\mathcal{R}\langle 300\ \Omega\rangle$ e dal $\mathcal{C}\langle 4\ \mu\text{F}\rangle$:

$$P \;=\; \frac{1}{2\,r_1}\,|\bar{\hat{v}}|^2 \;=\; \frac{10^2 + 10^2}{2 \times 300} \;=\; 1/3\ \text{W}$$

$$Q \;=\; 2\,\pi\,f\,C_1\,|\bar{\hat{v}}|^2/2 \;=\; \pi\ 100\ 4\ 10^{-6}\ 100 \;=\; \pi\ 4\ 10^{-2}\ \text{VAR}$$

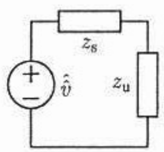
7.4.2 Esercizio B : Potenza attiva e reattiva assorbite da un bipolo

Il circuito in Fig.→ opera in regime sinusoidale con ω fissata ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle\bar{\hat{v}} = 200\ \text{V}\rangle$ (sinusoidale, $|\bar{\hat{v}}|$ è il valore efficace) con in serie l'impedenza interna $z_s = 2 - \jmath 1\ \Omega$ e un carico di impedenza $z_u = 3 + \jmath 6\ \Omega$.

Quesito : Calcolare la potenza attiva P_u e la potenza reattiva Q_u assorbite dal carico.

• Nello svolgimento dei calcoli noi consideriamo come modulo di un fasore l'ampiezza delle rispettiva sinusoide.

• Il fasore $\bar{\imath}_u$ della corrente fluente nell'unica maglia risulta :



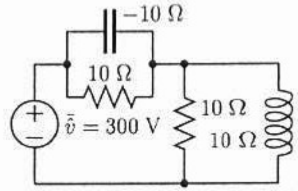
$$\bar{\imath}_u = \frac{\bar{\hat{v}}}{z_s + z_u} = \frac{\sqrt{2} \times 200}{(2 - \jmath\,1) + (3 + \jmath\,6)} = \frac{\sqrt{2}\ 200}{5 + \jmath\,5} = 40\ \exp(-\jmath\,\pi/4)\ \text{A}$$

Nella suddetta espressione numerica la fase $\angle\bar{\hat{v}}$ della tensione $\bar{\hat{v}}$ è stata assunta nulla. Questo fatto non guasta la generalità della soluzione. Infatti le fasi di tutti i fasori di un circuito sono definite a meno di una costante additiva arbitraria. Comunque per calcolare le potenze ci basta conoscere l'ampiezza di $\bar{\imath}_u$.

Risultato : Calcoliamo la potenza complessa assorbita dal carico e quindi la potenza attiva e quella reattiva risultano :

$$\bar{P}_u = P_u + \jmath\,Q_u = \frac{1}{2} z_u\,|\bar{\imath}_u|^2 = \frac{1}{2}(3 + \jmath\,6)\ |40|^2 = 2400 + \jmath\,4800\ \text{VA} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} P_u = 2400\ \text{W} \\ Q_u = 4800\ \text{VAR} \end{cases}$$

7.4.3 Esercizio C : Potenza attiva assorbita dal carico



Il circuito in Fig.→ opera in regime sinusoidale con ω fissata ed è costituito da una sorgente nonideale di tensione sinusoidale $\hat{v}(t)$ con ampiezza 300 V e ammettenza interna $y_s = 1/10 + \jmath 1/10$ S e un carico di ammettenza $y_u = 1/10 - \jmath 1/10$ S .

Quesito : Calcolare la potenza attiva P_u assorbita dal carico.

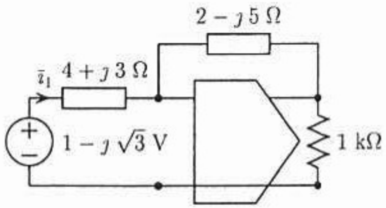
• Il fasore $\bar{v}_u$ della tensione ai capi del carico viene ottenuto mediante la regola del partitore di tensione :

$$\bar{v}_u = \frac{\bar{\hat{v}}\ y_s}{y_s + y_u} = \frac{300 \times (1/10 + \jmath 1/10)}{(1/10 + \jmath 1/10) + (1/10 - \jmath 1/10)} = \frac{300 \times (1 + \jmath)}{2} = 150\ \sqrt{2}\ \exp(\pi/4)\ \text{V}$$

Risultato : La potenza attiva assorbita dal carico viene calcolata mediante la nota formula :

$$\bar{P}_u = \frac{1}{2}\ g_u\ |\bar{v}_u|^2 = \frac{1}{2}\ \frac{|150\ \sqrt{2}|^2}{10} = 2250\ \text{W}$$

7.4.4 Esercizio D : Potenza complessa in circuito con nullore



Il circuito in Fig.→ opera in regime sinusoidale con ω incognita ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle\bar{\hat{v}} = 1 - \sqrt{3}\ \text{V}\rangle$ (sinusoidale), un nullore, due bipoli di impedenza $z_1 = 4 + \jmath\,3\ \Omega$ e $z_2 = 2 - \jmath\,5\ \Omega$ e un $\mathcal{R}\langle 1\ \text{k}\Omega\rangle$.

Quesito : Calcolare le potenze complesse $P_1 + \jmath\,Q_1$ e $P_2 + \jmath\,Q_2$ assorbite dai bipoli di impedenza z_1 e z_2 .

• Siccome la porta d'ingresso del nullore è un nullatore, i due bipoli dinamici di impedenza z_1 e z_2 sono percorsi dalla stessa corrente $\bar{\imath}_1$, di cui ci interessa l'ampiezza :

$$|\bar{\imath}_1| = \frac{|\bar{\hat{v}}|}{|z_1|} = \frac{|1 - \jmath\,\sqrt{3}|}{|4 + \jmath\,3|} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}\ \text{A}$$

• La potenza complessa assorbita dal bipolo di impedenza z_1 risulta

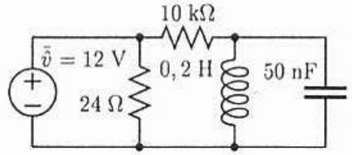
$$P_1 + \jmath\,Q_1 = \frac{1}{2}\,z_1\,|\bar{\imath}_1|^2 = \frac{1}{2}\,(4 + \jmath\,3)\,\frac{4}{25} = \frac{8}{25} + \jmath\,\frac{6}{25}\ \text{VA}$$

• La potenza complessa assorbita dal bipolo di impedenza z_2 risulta

$$P_2 + \jmath\,Q_2 = \frac{1}{2}\,z_2\,|\bar{\imath}_1|^2 = \frac{1}{2}\,(2 - \jmath\,5)\,\frac{4}{25} = \frac{4}{25} - \jmath\,\frac{2}{5}\ \text{VA}$$

7.4.5 Esercizio E : Potenza complessa erogata da una sVi

Il circuito in Fig.→, costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle \bar{v} = 12 \text{ V}\rangle$, un $\mathcal{L}\langle 0,2 \text{ H}\rangle$, un $\mathcal{C}\langle 50 \text{ nF}\rangle$, un $\mathcal{R}\langle 24\ \Omega\rangle$ e un $\mathcal{R}\langle 10\ \text{k}\Omega\rangle$, opera in regime sinusoidale con $\omega = 10000$ rad/s .



Quesito : Calcolare la potenza complessa $\bar{P} = P + \jmath\, Q$ erogata dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle \bar{v} = 12 \text{ V}\rangle$.

• L' $\mathcal{L}\langle 0,2 \text{ H}\rangle$ e il $\mathcal{C}\langle 50 \text{ nF}\rangle$ costituiscono un risonatore conservativo parallelo, la cui pulsazione di risonanza vale :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C\,L}} = \frac{1}{\sqrt{50\ 10^{-9}\ 0,2}} = 10000 \text{ rad/s}$$

• Siccome la pulsazione ω_0 coincide con quella del regime sinusoidale, il risonatore ideale è equivalente a un c.a. e il $\mathcal{R}\langle 10\ \text{k}\Omega\rangle$ diventa superfluo : la $\hat{\mathcal{V}}\langle \bar{v} = 12 \text{ V}\rangle$ risulta connessa al solo $\mathcal{R}\langle 24\ \Omega\rangle$.

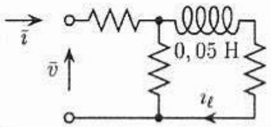
Risultato : La potenza complessa $\bar{P}$ è uguale a :

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{\bar{v}^2}{z^*} = \frac{1}{2}\frac{12^2}{24} = 3 + \jmath\, 0 \text{ VA}$$

7.5 ESERCIZI SUL COROLLARIO DI BOUCHEROT

7.5.1 Esercizio A :

Il bipolo composito in Fig.→ opera in regime sinusoidale con $\omega_0 = 1000$ rad/s ed è costituito da un $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$.



Quesito : Calcolare l'ampiezza della corrente $\bar{\imath}_\ell$, conoscendo la tensione $\bar{v} = 10$ V e la corrente $\bar{\imath} = 2 - \jmath\, 1$ A del bipolo.

• La potenza reattiva Q assorbita dal bipolo composito coincide con la potenza reattiva Q_ℓ assorbita dall' $\mathcal{L}\langle 0, 05 \text{ H}\rangle$ in accordo al corollario di Boucherot. La potenza reattiva Q è uguale a $\Im\{1/2\ \bar{v}\ \bar{\imath}^*\} = 1/2\ \Im\{20 + \jmath\ 10\} = 5$ VAR , mentre la potenza reattiva Q_ℓ è uguale a $1/2\ \omega_0\ L\ |\bar{\imath}_\ell|^2$.

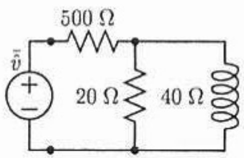
Risultato : Uguagliando la espressione di Q e quella di Q_ℓ, si ottiene l'ampiezza di $\bar{\imath}_\ell$:

$$|\bar{\imath}_\ell| = \sqrt{\frac{2\,Q}{\omega_0\, L}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{1000 \times 0,05}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ A}$$

Commento : Il valore efficace risulta uguale a : $\quad i_\ell^{\text{eff}} = 1/\sqrt{10}$ A .

7.5.2 Esercizio B :

Il circuito in Fig.→ opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale e da un bipolo composito dinamico costituito a sua volta da un $\mathcal{L}$ e due $\mathcal{R}$.



Quesito : Calcolare la potenza reattiva Q assorbita dal bipolo composito, conoscendo che il $\mathcal{R}\langle 20\ \Omega\rangle$ assorbe la potenza attiva $P_1 = 70$ W .

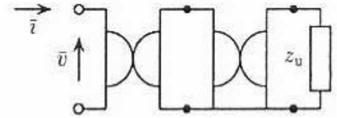
• La potenza reattiva Q assorbita dal bipolo composito coincide con la potenza reattiva Q_ℓ assorbita dall' $\mathcal{L}\langle 40\ \Omega\rangle$, in accordo al corollario di Boucherot. L' $\mathcal{L}\langle 40\ \Omega\rangle$ risulta in parallelo al $\mathcal{R}\langle 20\ \Omega\rangle$. Indichiamo con $\bar{v}_1$ il fasore delle tensione comune a entrambi.

• La potenza attiva P_1 assorbita dal $\mathcal{R}\langle 20\ \Omega\rangle$ risulta $P_1 = 70 = 1/2|\bar{v}_1|^2/20$, da cui si ricava $|\bar{v}_1|^2 = (2 \times 70) \times 20\ \text{V}^2$. La potenza reattiva assorbita dall' $\mathcal{L}\langle 40\ \Omega\rangle$ risulta $Q_\ell = 1/2|\bar{v}_1|^2/40$.

Risultato : Dal confronto di P_1 e Q_ℓ risulta : $\quad Q = Q_\ell = P_1/2 = 35$ VAR .

7.5.3 Esercizio C : Potenza complessa assorbita da un carico, giratore

Il bipolo composito in Fig.→ opera in regime sinusoidale ed è costituito da due $\mathcal{G}$ in cascata chiusi su un carico di impedenza z_u. Le transconduttanze di girazione dei $\mathcal{G}$ e l'impedenza z_u non sono note. I fasori della tensione e della corrente del bipolo valgono : $\bar{v}_1 = 2 + \jmath\, 2$ V e $\bar{\imath}_1 = 3 + \jmath\, 1$ A .



Quesito : Calcolare la potenza complessa $\bar{P}_u$ assorbita dal carico.

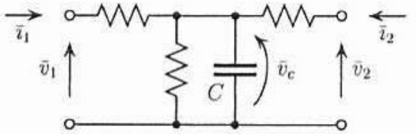
• Dalla teoria è noto che la cascata di due $\mathcal{G}$ è equivalente a un unico $\mathcal{T}$. La potenza complessa assorbita da un $\mathcal{T}$ è nulla.

Risultato : Dal corollario della potenza complessa (Sez. 7.2.1), si ha che la potenza complessa assorbita dal carico coincide con quella assorbita dal bipolo composito :

$$\bar{P}_u = \frac{1}{2}\bar{v}\ \bar{\imath}^* = \frac{1}{2}\ (2 + \jmath\, 2)\ (3 - \jmath\, 1) = 4 + \jmath\, 2 \text{ VA}$$

7.5.4 Esercizio D :

Il DBT in Fig.↙ opera in regime sinusoidale con $f = 300$ Hz ed è costituito da un $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$.



Quesito : Calcolare l'ampiezza della tensione $\bar{v}_c$ ai capi del $\mathcal{C}$, sapendo che che le tensioni e le correnti alle porte del DBT sono $\bar{\imath}_1 = \bar{\imath}_2 = 2 + \jmath\, 2$ mA e $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 10$ V e che la capacità C vale $0,5\ \mu$F .

• La potenza reattiva entrante nel doppio bipolo risulta : $\quad Q = 1/2\ \Im[\bar{v}_1\ \bar{\imath}_1^* + \bar{v}_2\ \bar{\imath}_2^*]$.

• Dai calcoli si ha : $\quad Q = -20$ VAR .

Risultato : Il corollario delle potenza reattiva ci dice che la potenza reattiva Q assorbita dal doppio bipolo coincide con la potenza reattiva Q_c assorbita dal $\mathcal{C}$, poiché gli altri bipoli interni al DBT sono $\mathcal{R}$. Quindi abbiamo :

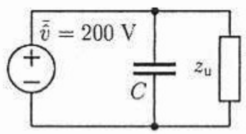
$$Q_c = -1/2\ \omega\ C\ |\bar{v}_c|^2 = Q = -20 \text{ VAR}$$

Da cui possiano derivare il valore dell'ampiezza della tensione ai capi del $\mathcal{C}$:

$$|\bar{v}_c| = \sqrt{\frac{20}{1/2\ 2\ \pi\ 300\ 0,5\ 10^{-6}}} = 100\ \sqrt{40/(\pi\ 3)} \text{ V}$$

7.5.5 Esercizio E : Problema inverso riguardante le potenze

Il circuito in Fig.→ opera in regime sinusoidale con $\omega = \omega_0 = 300$ rad/s : esso è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale, un $\mathcal{C}$ e un carico di impedenza z_u . La capacità C e l'impedenza z_u non sono noti.



Quesito : Calcolare la capacità C conoscendo la potenza attiva assorbita dal carico $P_u = 600$ W e quella reattiva $Q_u = 400$ VAR e la potenza reattiva erogata dalla $\hat{\mathcal{V}}$ $Q = 0$ VAR .

• Indicando con Q_c la potenza reattiva assorbita dal $\mathcal{C}$, il corollario di Boucherot ci dice che :

$$Q = Q_c + Q_u \quad \Longrightarrow \quad Q_c = Q - Q_u = 0 - 400 = -400 \text{ VAR} \ .$$

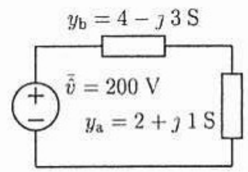
Risultato : D'altra parte la potenza reattiva Q_c dipende dall'ampiezza della tensione $\bar{\hat{v}}$ ai capi del $\mathcal{C}$ stesso :

$$Q_c = -\frac{1}{2}\omega_0 \, C \, |\bar{\hat{v}}|^2 \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{2\,Q_c}{\omega_0\,|\bar{\hat{v}}|^2} = -\frac{2 \times (-400)}{300 \times 200^2} = \frac{200}{3} \ \mu\text{F}$$

Il fattore $1/2$ è dovuto al fatto che il modulo di $\bar{\hat{v}}$ coincide con l'ampiezza della sinusoide e non col valore efficace della stessa.

7.6 ESERCIZI SUI RAPPORTI TRA POTENZE

7.6.1 Esercizio A : Rapporto tra potenze reattive e attive



Il circuito in Fig.→ opera in regime sinusoidale ed è costituito dai bipoli dinamici di ammettenza $y_a = 2 + \jmath\,1$ S e $\mathcal{C}_b$ di ammettenza $y_b = 4 - \jmath\,3$ S e da una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale.
Quesito : Calcolare il rapporto tra la potenza attiva P_a assorbita dal bipolo $\mathcal{C}_a$ e la potenza attiva P erogata dalla $\hat{\mathcal{V}}$. Calcolare lo stesso rapporto per le corrispondenti potenze reattive Q_a e Q .

• La potenza attiva P e la potenza reattiva Q erogate dalla $\hat{\mathcal{V}}$ coincidono con le somme delle rispettive potenze assorbite dai bipoli $\mathcal{C}_a$ e $\mathcal{C}_b$. Cioè $P = P_a + P_b$ e $Q = Q_a + Q_b$, per il corollario della potenza complessa (Boucherot).

• Siccome i due bipoli $\mathcal{C}_a$ e $\mathcal{C}_b$ sono connessi in serie, le loro potenze attive P_a e P_b e le loro potenze reattive Q_a e Q_b sono proporzionali, rispettivamente, alle parti reali $r_a = \Re\{z_a\}$ e $r_b = \Re\{z_b\}$ (resistenze) e alle parti immaginarie $x_a = \Im\{z_a\}$ e $x_b = \Im\{z_b\}$ (reattanze) delle loro impedenze :

$$P_a \propto r_a \quad , \quad P_b \propto r_b \quad , \quad Q_a \propto x_a \quad , \quad Q_b \propto x_b$$

• Calcoliamo le parti reali e immaginarie delle impedenze dei bipoli $\mathcal{C}_a$ e $\mathcal{C}_b$:

$$r_a = \frac{g_a}{g_a^2 + b_a^2} = \frac{2}{5}\ \Omega \quad , \quad x_a = \frac{-b_a}{g_a^2 + b_a^2} = -\frac{1}{5}\ \Omega \quad \text{dove} \quad g_a = \Re\{y_a\} \ , \ b_a = \Im\{y_a\}$$

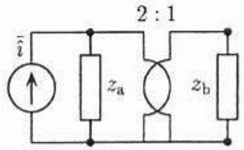
$$r_b = \frac{g_b}{g_b^2 + b_b^2} = \frac{4}{25}\ \Omega \quad , \quad x_b = \frac{-b_b}{g_b^2 + b_b^2} = \frac{3}{25}\ \Omega \quad \text{dove} \quad g_b = \Re\{y_b\} \ , \ b_b = \Im\{y_b\}$$

Risultato : Considerando i valori di r_a , r_b , x_a e x_b , possiamo calcolare i rapporti richiesti

$$\frac{P_a}{P} = \frac{P_a}{P_a + P_b} = \frac{r_a}{r_a + r_b} = \frac{5}{7} \qquad , \qquad \frac{Q_a}{Q} = \frac{Q_a}{Q_a + Q_b} = \frac{x_a}{x_a + x_b} = \frac{5}{2}$$

Commento : Notare che la tensione impressa della $\hat{\mathcal{V}}$ non interviene affatto nel calcolo dei suddetti rapporti. Infatti il quesito riguarda rapporti di potenze e non le potenze stesse.

7.6.2 Esercizio B : Rapporto tra potenze attive e reattive



Il circuito in Fig.→ opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$ sinusoidale, un $\mathcal{T}$ e i bipoli dinamici $\mathcal{C}_a$ di impedenza $z_a = 3 + \jmath\,4\ \Omega$ e $\mathcal{C}_b$ di impedenza $z_b = 2 + \jmath\,1\ \Omega$.
Quesito : Calcolare il rapporto P_a/P_b tra la potenza attiva P_a assorbita dal bipolo $\mathcal{C}_a$ e la potenza attiva P_b assorbita dal bipolo $\mathcal{C}_b$.

• Siccome i bipoli $\mathcal{C}_a$ e $\mathcal{C}_a$ sono in parallelo alle porte del medesimo $\mathcal{T}$, il rapporto tra le loro tensioni $\bar{v}_a$ e $\bar{v}_b$ coincide col rapporto di trasformazione del $\mathcal{T}$: $\quad \bar{v}_a = 2\ \bar{v}_b$.

• Le potenze attive assorbite da $\mathcal{C}_a$ e $\mathcal{C}_b$ sono : $\quad P_a = 1/2\ g_a\ |\bar{v}_a|^2 \quad$ e $\quad P_b = 1/2\ g_b\ |\bar{v}_b|^2$.

• Le conduttanze dei due bipoli vengono calcolate dalle rispettive impedenze :

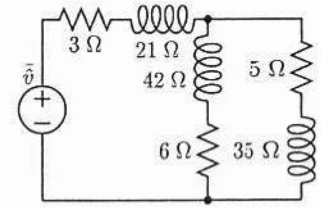
$$g_a = \frac{r_a}{r_a^2 + x_a^2} = \frac{3}{25}\ \text{S} \quad , \quad g_b = \frac{r_b}{r_b^2 + x_b^2} = \frac{2}{5}\ \text{S} \ .$$

Risultato : Usando le precedenti espressioni, il rapporto delle potenze attive risulta :

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{1/2\ g_a\ |\bar{v}_a|^2}{1/2\ g_b\ |\bar{v}_b|^2} = \frac{g_a}{g_b} \times \frac{|\bar{v}_a|^2}{|\bar{v}_b|^2} = \frac{3/25}{2/5} \times \frac{2^2}{1^2} = \frac{6}{5}$$

7.6.3 Esercizio C : Rapporto tra potenza reattiva e attiva

Il circuito in Fig.↘, costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale, tre $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$, opera in regime sinusoidale.



Quesito : Calcolare il rapporto Q/P tra la potenza reattiva Q e la potenza attiva P erogate dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle\bar{v}\rangle$.

• La $\hat{\mathcal{V}}$ alimenta un bipolo costituito da tre bipoli resistivi-induttivi. Quindi le potenze P e Q erogate coincidono con le somme delle rispettive potenze assorbite dei tre bipoli $P = P_1 + P_2 + P_3$ e $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ per il corollario (Boucherot) della potenza complessa.

• Il rapporto tra la potenza reattiva e quella attiva assorbite da ciascuno dei tre bipoli resistivi-induttivi è uguale al rapporto tra la reattanza e resistenza. I rapporti tra la reattanza e la resistenza di ciascuno dei tre bipoli resistivi-induttivi sono coincidenti :

$$\frac{Q_1}{P_1} = \frac{x_1}{r_1} = 7 \qquad , \qquad \frac{Q_2}{P_2} = \frac{x_2}{r_2} = 7 \qquad , \qquad \frac{Q_3}{P_3} = \frac{x_3}{r_3} = 7$$

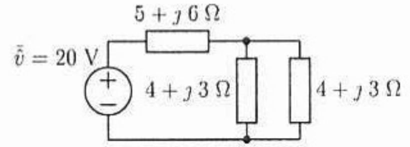
Risultato : Confrontando i risultati precedenti, si ha :

$$\frac{Q}{P} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{7\,P_1 + 7\,P_2 + 7\,P_3}{P_1 + P_2 + P_3} = 7$$

Commento : Siccome il rapporto Q/P del bipolo composito coincide con quello dei tre bipoli resistivi-induttivi, si può anche affermare che la fase ϕ del bipolo composito coincide con quella comune ai tre bipoli interni ad esso, dal momento che $\tan(\phi) = Q/P$.

7.6.4 Esercizio D : Rapporti tra potenza reattiva e attiva in un circuito

Il circuito in Fig.→ opera in regime sinusoidale con ω fissata. Esso è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale con $|\bar{v}| = 20$ V la quale alimenta un bipolo composito costituito dalla serie del bipolo di impedenza $z_3 = 5 + \jmath\, 6\ \Omega$ e del parallelo dei bipoli di impedenze $z_1 = z_2 = 4 + \jmath\, 3\ \Omega$.



Quesito : Calcolare il rapporto tra la potenza attiva P_1 e la potenza reattiva Q_1 assorbite dal bipolo di impedenza z_1 e le corrispondenti potenze P e Q erogate dalla $\hat{\mathcal{V}}$.

• Se $\bar{\imath}_1$ denota la corrente fluente nel bipolo di impedenza z_3 , la potenza attiva P_3 e la potenza reattiva Q_3 assorbite dal bipolo sono

$$P_3 = \frac{1}{2}\,\Re[z_3]\,|\bar{\imath}_1|^2 = \frac{5}{2}\,|\bar{\imath}_1|^2 \qquad , \qquad Q_3 = \frac{1}{2}\,\Im[z_3]\,|\bar{\imath}_1|^2 = 3\,|\bar{\imath}_1|^2$$

• Ciascuno dei bipoli di impedenza z_1 e z_2 è percorso da una corrente $\bar{\imath}_1/2$ in seguito alla regola del partitore di corrente applicata ai due bipoli di impedenza z_1 e z_2 . Le potenze attive P_1 e P_2 e reattive Q_1 e Q_2 assorbite sono rispettivamente

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2}\,\Re[z_1]\,\frac{|\bar{\imath}_1|^2}{4} = \frac{1}{2}\,4\,\frac{|\bar{\imath}_1|^2}{4} = \frac{1}{2}\,|\bar{\imath}_1|^2 \quad , \quad Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2}\,\Im[z_1]\,\frac{|\bar{\imath}_1|^2}{4} = \frac{1}{2}\,3\,\frac{|\bar{\imath}_1|^2}{4} = \frac{3}{8}\,|\bar{\imath}_1|^2$$

• Le potenze attiva P e reattiva Q erogate dalla $\hat{\mathcal{V}}$, per il corollario della potenza complessa sono

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 7/2\,|\bar{\imath}_1|^2 \qquad , \qquad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{15}{4}\,|\bar{\imath}_1|^2$$

Risultato : Dalle suddette formule, i rapporti delle potenze risultano uguali a $\dfrac{P_1}{P} = \dfrac{1/2\,|\bar{\imath}_1|^2}{7/2\,|\bar{\imath}_1|^2} = \dfrac{1}{7}$, $\dfrac{Q_1}{Q} = \dfrac{3/8\,|\bar{\imath}_1|^2}{15/4\,|\bar{\imath}_1|^2} = \dfrac{1}{10}$

Commento : La tensione impressa $\bar{v}$ non ha alcuna influenza sui valori di P_1/P e Q_1/Q .

7.7 POTENZA COMPLESSA NEI DOPPI BIPOLI

La potenza complessa e la sua parte immaginaria (potenza reattiva) hanno comportamenti non-intuitivi nei doppi bipoli, che sono qui discussi.
Qui estendiamo la definizione della potenza complessa ai doppi bipoli

Estensione ai doppi bipoli: la definizione di potenza complessa viene estesa anche ai doppi bipoli in modo analogo alla definizione della potenza instantanea :

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{k} \bar{v}_\mu \bar{\imath}^*_\mu$$

■

7.7.1 Potenza attiva, reattiva e complessa in un doppio bipolo

L'analisi della potenza attiva e reattiva nei doppi bipoli, e in genere nei multiporte, può dare origine a risultati, che in un primo momento possono sembrare sorprendenti. Essi sono dovuti al fatto che la potenza istantanea in un doppio bipolo è definita dall'espressione $p(t) = v_1(t)\; i_1(t) + v_2(t)\; i_2(t)$.

Supponiamo che il doppio bipolo sia omogeneo e che sia definita una o entrambe le matrici $\boldsymbol{Z}$ e $\boldsymbol{Y}$, in genere complesse.

Quesiti : Se la matrice $\boldsymbol{Z}$ e/o $\boldsymbol{Y}$ sono immaginarie, la potenza attiva del doppio bipolo è nulla ?

Se la matrice $\boldsymbol{Z}$ e/o $\boldsymbol{Y}$ sono reali, la potenza reattiva del doppio bipolo è nulla ?

Risposta : La risposta è contenuta nelle due seguenti proprietà : ■

Proprietà : Un doppio bipolo nonreciproco può assorbire o erogare potenza attiva anche se $\boldsymbol{Z}$ e/o $\boldsymbol{Y}$ sono immaginarie. ■

Proprietà : Un doppio bipolo nonreciproco può assorbire o erogare potenza reattiva anche se $\boldsymbol{Z}$ e/o $\boldsymbol{Y}$ sono reali. ■

Prova : La prova è limitata al caso in cui la matrice cardinale sia la matrice impedenza $\boldsymbol{Z}$. La potenza complessa $\bar{P}$ assorbita dal doppio bipolo assume la forma quadratica nel dominio dei numeri complessi :

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\bar{\imath}^*_1\\ \bar{\imath}^*_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\bar{v}_1\\ \bar{v}_2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\bar{\imath}^*_1\\ \bar{\imath}^*_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}z_{11} & z_{12}\\ z_{21} & z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\imath}_1\\ \bar{\imath}_2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[\bar{\imath}^*_1\bar{\imath}_1 z_{11} + \bar{\imath}^*_1\bar{\imath}_2 z_{12} + \bar{\imath}^*_2\bar{\imath}_1 z_{21} + \bar{\imath}^*_2\bar{\imath}_2 z_{22}\right]$$

Uguagliando le parti reali e immaginarie dei due membri della suddetta formula, otteniamo la potenza attiva e quella reattiva :

$$P = \frac{1}{2}\left[r_{11}\bar{\imath}_1^2 + r_{22}\bar{\imath}_2^2 + (r_{12}+r_{21})\Re[\bar{\imath}^*_1\bar{\imath}_2] + (x_{21}-x_{12})\Im[\bar{\imath}^*_1\bar{\imath}_2]\right]$$

$$Q = \frac{1}{2}\left[x_{11}\bar{\imath}_1^2 + x_{22}\bar{\imath}_2^2 + (r_{12}-r_{21})\Im[\bar{\imath}^*_1\bar{\imath}_2] + (x_{21}+x_{12})\Re[\bar{\imath}^*_1\bar{\imath}_2]\right]$$

La presenza del termine $(x_{21} - x_{12})\Im[\bar{\imath}^*_1\bar{\imath}_2]$ nella potenza attiva P prova che un doppio bipolo nonreciproco può assorbire o erogare potenza attiva anche se la sua matrice è immaginaria. ■

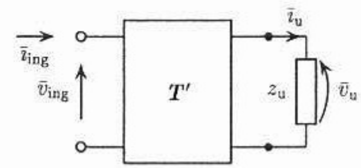
La presenza del termine $(r_{12}-r_{21})\Im[\bar{\imath}^*_1\bar{\imath}_2]$ nella potenza reattiva Q prova che un doppio bipolo nonreciproco può assorbire o erogare potenza reattiva anche se la sua matrice è reale. ■

Applicazioni : Sia la potenza attiva P sia la potenza reattiva Q delle quattro sorgenti pilotate e del nullore (doppi bipoli tipicamente nonreciproci) possono assumere qualsiasi valore in $(-\infty, +\infty)$. D'altra parte, questi doppi bipoli sono caratterizzati dal fatto che la loro potenza istantanea $p(t)$ coincide con quella della porta d'uscita e che la tensione e/o la corrente di questa porta è nonvincolata. ■

Commento : In un trasformatore ideale la potenza attiva e quella reattiva sono nulle indipendentemente dal resto del circuito. Infatti la potenza istantanea di un tr.id. è nulla ($P = 0$) ed esso è reciproco ($Q = 0$). ■

7.7.2 Potenza reattiva nei doppi bipoli adinamici

Sia dato un bipolo composito, operante in regime sinusoidale : esso è costituito da un doppio bipolo adinamico, di cui è nota la matrice di trasmissione diretta $\boldsymbol{T}'$ (puramente reale), chiuso su un bipolo di impedenza z_u.



• Confrontiamo la potenza complessa assorbita dal bipolo composito con quella assorbita dal bipolo di impedenza z_u. Tramite la matrice $\boldsymbol{T}'$, noi conosciamo le relazioni esistenti tra le grandezze alla porta d'ingresso del DB e quelle alla porta d'uscita :

$$\bar v_{ing} = t'_{11}\,\bar v_u + t'_{12}\,\bar\imath_u \qquad , \qquad \bar\imath_{ing} = t'_{21}\,\bar v_u + t'_{22}\,\bar\imath_u$$

La potenza complessa assorbita dalla prima porta $\bar P_{ing}$:

$$\bar P_{ing} = 1/2\bar v_{ing}\,\bar\imath^*_{ing} \;=\; 1/2\,t'_{11}\,t'_{21}\,|\bar v_u|^2 + 1/2\,t'_{12}\,t'_{22}\,|\bar\imath_u|^2 + 1/2\,t'_{12}\,t'_{21}\,\bar v^*_u\,\bar\imath_u + 1/2\,t'_{11}\,t'_{22}\,\bar v_u\,\bar\imath^*_u$$

Consideriamo la parte immaginaria della suddetta espressione

$$\Im[\bar P_{ing}] = \Im\left[\underbrace{1/2\,t'_{11}\,t'_{21}\,|\bar v_u|^2}+\underbrace{1/2\,t'_{12}\,t'_{22}\,|\bar\imath_u|^2}+1/2\,t'_{12}\,t'_{21}\,\bar v^*_u\,\bar\imath_u + 1/2\,t'_{11}\,t'_{22}\,\bar v_u\,\bar\imath^*_u\right]$$

I due termini sottograffati sono reali e $\Im[\bar P_{ing}]$ è proprio la potenza reattiva Q_{ing}, mentre il termine $1/2\,\bar v_u\,\bar\imath^*_u$ è proprio la potenza reattiva Q_u assorbita dal carico z_u : otteniamo

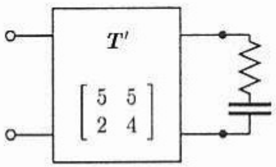
$$Q_{ing} = -1/2\,t'_{12}\,t'_{21}\,\Im\,[\bar v_u\,\bar\imath^*_u] + 1/2\,t'_{11}\,t'_{22}\,\Im\,[1/2\,t'_{11}\,t'_{22}\,\bar v_u\,\bar\imath^*_u] = |\boldsymbol{T}'|\,Q_u$$

Commento Questa semplice formula ci dice che la potenza reattiva assorbita dalla porta d'ingresso di un doppio bipolo adinamico coincide con quella erogata dalla porta d'uscita se e solo se il determinante della matrice di trasmissione del doppio bipolo è uguale a 1 .
Dal corollario di Boucherot sappiamo che $Q_{ing} = Q_{DB} + Q_u$, cioè

$$Q_{DB} = Q_{ing} - Q_u = [|\boldsymbol{T}'| - 1]\,Q_u$$

Possiamo concludere che il doppio bipolo può assorbire ovvero erogare potenza reattiva, benchè sia adinamico, purchè $|\boldsymbol{T}'|$ sia diverso da $\neq 1$.

7.7.3 Esercizio A



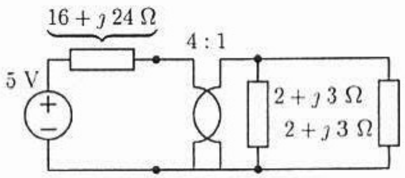
Il bipolo composito in Fig.→ opera in regime sinusoidale ed è costituito da un doppio bipolo adinamico, di cui è nota la matrice $\boldsymbol{T}'$, chiuso su un bipolo RC.
Quesito : Calcolare la potenza reattiva Q_{ing} assorbita dal bipolo composito, conoscendo che il $\boldsymbol{C}$ assorbe la potenza reattiva $Q_c = -20$ VAR .

• La teoria esposta nel Par. 7.2.1 afferma che la potenza reattiva Q_{ing} assorbita dal bipolo composito coincide con la potenza reattiva Q_c assorbita dal $\boldsymbol{C}$ moltiplicata per il determinante della matrice di trasmissione diretta $\boldsymbol{T}'$.
Risultato : Quindi abbiamo il risultato

$$Q_{ing} = \det(\boldsymbol{T}')\,Q_c = (5\times 4 - 5\times 2)\,(-20) = (5\times 4 - 5\times 2)\,(-20) = -200 \text{ VAR}$$

Commento : Nell'esaminare il comportamento di un doppio bipolo chiuso su un bipolo, non è necessario conoscere se il doppio bipolo stesso sia proprio, tripolare o improprio. In ogni caso, il risultato rimane invariato.

7.7.4 Esercizio B : Potenze complesse, con tr.id.



Il circuito in Fig.→ opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle 5\text{ V}\rangle$ sinusoidale, un $\mathcal{T}\langle 4:1\rangle$ e tre bipoli.
Quesito : Calcolare la potenza complessa $\bar P_l = P_l + \jmath\,Q_l$ entrante nella porta di sinistra del $\mathcal{T}$ e la potenza complessa $P_u + \jmath\,Q_u$ assorbita dal bipolo di impedenza $2 + \jmath\,3\ \Omega$ sulla destra.

• I due bipoli di impedenza $2 + \jmath\,3\ \Omega$ sono in parallelo e sono equivalenti a un unico bipolo di impedenza $1 + \jmath\,1.5\ \Omega$. La potenza complessa uscente dalla porta di destra del $\mathcal{T}$ è uguale a quella entrante nella porta di sinistra $\bar P_l$ e quindi abbiamo $\bar P_l = 2\,\bar P_u$.
• La porta di sinistra del $\mathcal{T}$ è equivalente ad un bipolo di impedenza $4^2\,(1+\jmath\,1.5) = 16+\jmath\,24\ \Omega$. Quindi la $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale è chiusa su un bipolo costituito dalla serie di due bipoli della stessa impedenza $16 + \jmath\,24\ \Omega$. L'impedenza complessiva vista dalla $\hat{\mathcal{V}}$ è $z_0 = 32 + \jmath\,48\ \Omega$ e la metà della potenza complessa $\bar P_0$ erogata dalla $\hat{\mathcal{V}}$ entra nella porta di sinistra del $\mathcal{T}$: $\bar P_0 = 2\,\bar P_l = 4\,\bar P_u$.
• La potenza complessa $\bar P_0$ risulta uguale a :

$$\bar P_0 = \frac{|\bar v|^2}{2\,z^*_0} = \frac{25}{2\times(32 - \jmath\,48)} = \frac{25}{32\times(2-\jmath\,3)} = \frac{25(2+\jmath\,3)}{32\times(4+9)} = \frac{25}{16\times 13} + \jmath\,\frac{75}{32\times 13}\ \text{VA}$$

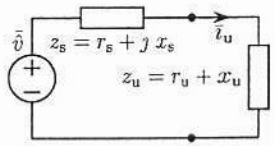
Risultato : Le potenze complesse $\bar P_l$ e $\bar P_u$ risultano uguali a :

$$\bar P_l = \frac{\bar P_0}{2} = \frac{25}{32\times 13} + \jmath\,\frac{75}{64\times 13}\ \text{VA} \qquad , \qquad \bar P_u = \frac{\bar P_0}{4} = \frac{25}{64\times 13} + \jmath\,\frac{75}{128\times 13}\ \text{VA}$$

7.8 POTENZA ATTIVA DISPONIBILE DI UNA SORGENTE SINUSOIDALE

Questa sezione discute una proprietà di natura energetica che si ha quando una sorgente sinusoidale nonideale di tensione ovvero di corrente è chiusa su un carico. Essa costituisce la naturale estensione al regime sinusoidale di un proprietà delle sorgenti costanti nonideali già vista nel Cap. 2 .

Sia data una sorgente sinusoidale nonideale con tensione impressa $\bar v$ e con impedenza interna $z_s = r_s + \jmath\,x_s$ (dove $r_s > 0$) chiusa su un carico di impedenza $z_u = r_u + \jmath\,x_u$ (dove $r_u > 0$).
La potenza attiva P_u erogata dalla sorgente e assorbita dal carico dipende dal valore dell'impedenza z_u :



$$P_u(z_u) = \frac{r_u|\bar\imath_u|^2}{2} = \frac{r_u\,|\bar v|^2/2}{(r_s + r_u)^2 + (x_s + x_u)^2}$$

Definizione : la potenza attiva massima che una sorgente nonideale è in grado di erogare viene detta *potenza disponibile* e indicata da P_{disp} ■
Il seguente teorema è molto importante :

Teorema : Una sorgente nonideale eroga la potenza disponibile P_{disp} se e solo se $z_u = z^*_s$: essa risulta uguale a $P_{disp} = |\bar v|^2/(8r_s)$. ■

Prova : Consideriamo la potenza attiva $P_u(z_u)$ erogata e cerchiamo i valori di r_u e x_u per cui essa diventa massima :

$$P_{\text{disp}} = \max_{\langle z_u \rangle}[P_u(z_u)] \;=\; \max_{\langle z_u \rangle}\left[\frac{|\bar{v}|^2/2}{(r_s+r_u)^2/r_u + (x_s+x_u)^2/r_u}\right]$$

Siccome le variabili r_u e x_u compaiono esclusivamente entro il denominatore, il problema è equivalente alla minimizzazione del denominatore stesso :

$$\min_{\langle z_u \rangle}\left[(r_s+r_u)^2/r_u + (x_s+x_u)^2/r_u\right]$$

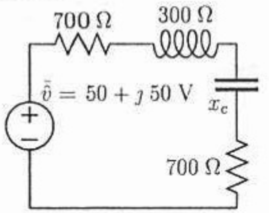
Gli addendi presenti nel denominatore $(r_s+r_u)^2/r_u$ e $(x_s+x_u)^2/r_u$ non possono essere negativi : il primo dipende solamente da r_u e il secondo da x_u e r_u. Il minimo di $(x_s+x_u)^2/r_u$ è uguale a 0 e viene raggiunto per $x_u = -x_s$ indipendentemente dal valore di r_u e quello di $(r_s+r_u)^2/r_u$ viene raggiunto per $r_u = r_s$. Infine, sostituendo $r_u \longrightarrow r_s$ e $x_u \longrightarrow -x_s$ nell'espressione di P_u si ottiene il valore di P_{disp} . ■

Commento : Una dimostrazione alternativa alla precedente può essere ottenuta risolvendo un sistema di due equazioni in due incognite : il sistema viene costruito annullando le derivate parziali di $P_u(r_u + \jmath\, x_u)$ rispetto alle due incognite r_u e x_u . ■

ES Considerare un bipolo composito, operante in regime sinusoidale, costituito da sorgenti impressive sinusoidali, $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{L}$, sorgenti pilotate, ... Connettiamo questo bipolo a un carico di impedenza incognita $z_u = r_u + \jmath\, x_u$. Determinare il valore di z_u tale che la potenza attiva assorbita dal carico sia massima : z_u è uguale al coniugato dell'impedenza del bipolo composito omogeneo associato.

7.8.1 Esercizio A : Potenza disponibile

Il circuito in Fig.↙, costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$, opera in regime sinusoidale.



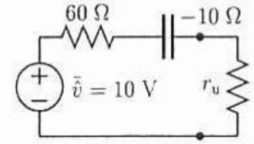
Quesito : Calcolare la reattanza x_c del $\mathcal{C}$, tale che la potenza attiva assorbita dal $\mathcal{R}\langle r_u = 700\ \Omega\rangle$ sulla destra sia massima.

• La potenza attiva P_u assorbita dal suddetto $\mathcal{R}$ è proporzionale al quadrato dell'ampiezza della corrente $\bar{\imath}_u$ uscente dalla $\hat{\mathcal{V}}$: $P_u = 0,5\, r_u\, |\bar{\imath}_u|^2$.

• L'ampiezza $|\bar{\imath}_u|$ raggiunge il valore massimo in corrispondenza del valore minimo dell'ampiezza dell'impedenza $z(\jmath\,\omega) = 1400 + \jmath(300 + x_c)$ del bipolo composito alimentato dalla $\hat{\mathcal{V}}$.

Risultato : La parte reale (resistenza) di $z(\jmath\,\omega)$ è costante mentre la parte immaginaria (reattanza) risulta $300 + x_c$. La potenza P_u raggiunge il massimo quando la reattanza di $z(\jmath\,\omega)$ è nulla : $x_c = -300\ \Omega$.

7.8.2 Esercizio B : problema inverso sulla potenza disponibile



Il circuito in Fig.→ opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{C}$, e due $\mathcal{R}$, tra cui il carico di resistenza r_u ignota.

Quesito : Calcolare il valore di r_u per cui la potenza attiva P_u assorbita dal carico sia massima.

• Siccome $P_u = 0,5\, r_u\, |\bar{\imath}_u|^2$ in cui $\bar{\imath}_u$ è la corrente che fluisce nell'unica maglia del circuito e nel carico stesso. Calcoliamo il quadrato dell'ampiezza di questa corrente :

$$|\bar{\imath}_u|^2 = \frac{|\bar{v}|^2}{(60+r_u)^2 + (-10)^2}$$

Da cui si ha l'espressione della potenza, in cui r_u è presente solo nel denominatore

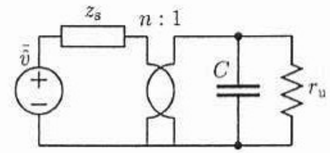
$$P_u = \frac{0,5\, r_u\, |\bar{v}|^2}{(60+r_u)^2 + 100} = \frac{0,5\, |\bar{v}|^2}{(3600+100)/r_u + 120 + r_u}$$

Risultato : Il massimo di P_u corrisponde al minimo del denominatore : $r_u = \sqrt{3700}\ \Omega$.

Commento : Notare che r_u coincide con l'ampiezza dell'impedenza del bipolo $\mathcal{R}\langle 60\ \Omega\rangle \ddagger \mathcal{C}\langle -10\ \Omega\rangle$. Questo risultato è simile ma diverso da quello del classico teorema sulla massima potenza attiva erogabile da una sorgente sinusoidale non ideale.

7.8.3 Esercizio C : adattamento per ottenere la potenza disponibile

Consideriamo il circuito in Fig.→ operante in regime sinusoidale : esso è composto da una sorgente di tensione nonideale, un $\mathcal{T}$, un $\mathcal{R}$ e un $\mathcal{C}$. Noi assumiamo che i valori di $\bar{v}$, z_s (bipolo resistivo-induttivo) e r_u siano noti, mentre i valori di n e C siano da determinare.



Quesito Determinare il rapporto di trasformazione n del $\mathcal{T}$ e la capacità C del $\mathcal{C}$ tali che la potenza attiva assorbita dal $\mathcal{R}$ sia la massima possibile.

• L'impedenza z_s della sorgente nonideale di tensione e l'impedenza $n^2/[1/r_u + \jmath\,\omega\, C]$ della prima porta del $\mathcal{T}$ chiuso sul bipolo $\mathcal{R}\langle r_u\rangle \parallel \mathcal{C}\langle C\rangle$ devono essere coniugate. Conviene imporre questa condizione tra le rispettive ammettenze

$$y_s = g_s + \jmath\, b_s = [1/r_u + \jmath\,\omega\, C]^* / n^2$$

Quest'unica equazione scalare nel dominio dei numeri complessi corrisponde a due equazioni scalari nel dominio dei numeri reali

$$g_s = 1/(r_u\, n^2)\ \text{ parte reale} \qquad , \qquad b_s = -\omega\, C/n^2\ \text{ parte immaginaria}$$

da cui deriviamo le formule che esprimono i due parametri da progettare

$$n = \pm\frac{1}{\sqrt{g_s\, r_u}} \qquad , \qquad C = \frac{-n^2\, b_s}{\omega}$$

Questi valori assicurano il massimo trasferimento possibile di potenza attiva dalla sorgente nonideale al carico.

Premoli, Elettrotecnica A, fine del capitolo 7