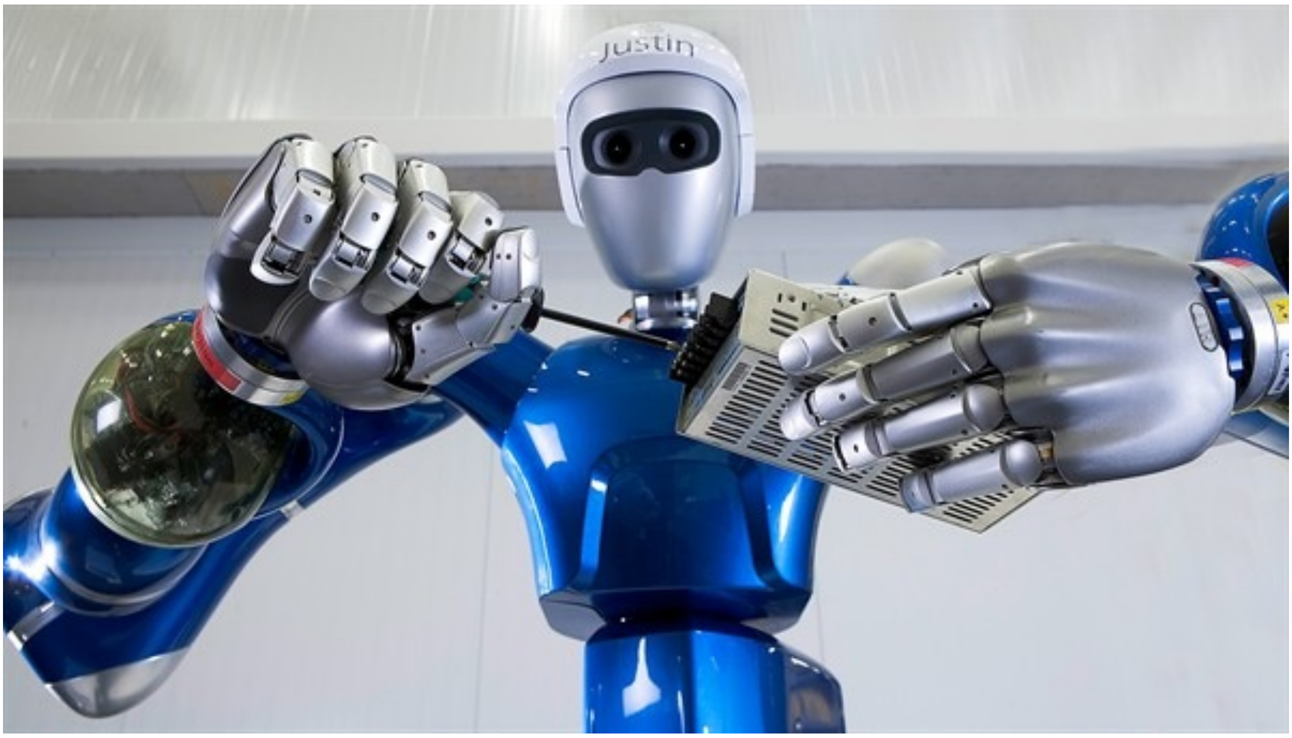
AUTOMATICA



MODELLI

Nei **sistemi dinamici** si distinguono due variabili, entrambe funzioni del tempo:

- la variabile causa *u*;
- la variabile effetto *y*.

La caratteristica principale di un sistema dinamico è che il valore assunto dalla variabile effetto all'istante *t* dipende dalla storia passata della variabile causa, oltre che dal suo valore al tempo stesso *t* (**si tiene conto della derivata**). Questo legame dinamico è descritto quindi da una variabile detta variabile di memoria *x*. Le variabili causa hanno diversa natura, sia per la loro natura sia per il fatto che possono essere comandabili (*variabile di controllo*) oppure no (*variabili di disturbo*). Il disturbo è infatti qualcosa contro cui lotta il sistema per mantenere il risultato desiderato, solitamente grazie alla variabile di controllo.
L'equazione di evoluzione della variabile di memoria prende il nome di equazione di stato, e la variabile di memoria viene chiamata variabile di stato.
La trasformazione di uscita consente di passare dal valore della variabile di stato *x* a quello della variabile effetto *y*. Queste ultime due equazioni vanno a descrivere il sistema dinamico.
I sistemi dinamici possono essere classificati nel seguente modo:

- *sistemi scalari e sistemi a stato vettoriale*: in un sistema dinamico possono esserci *n* variabili di stato, se *n=1* si parla di sistema a stato scalare; invece se *n>1* si parla di sistemi a stato vettoriale. Il numero della variabili di stato è detto **ordine**.
- *sistemi lineari e sistemi non lineari*: a seconda della struttura della variabile di stato.
- *sistemi propri e sistemi impropri*: i sistemi in cui l'uscita è determinata dalla sola variabile di stato prendono il nome di sistemi propri; se anche la variabile ingresso ha influenza sull'uscita allora il sistema è improprio.

I sistemi dinamici lineari possono essere scritti agevolmente in forma matriciale. Questa forma ha il vantaggio di essere particolarmente compatta e, grazie alla sua generalità, consente di studiare meglio le proprietà più significative. Si vanno a definire:

vettore di stato x= $\begin{bmatrix} x1 \\ \dots \\ xn \end{bmatrix}$ e il **vettore delle derivate x'=** $\begin{bmatrix} x'1 \\ \dots \\ x'n \end{bmatrix}$

Così il sistema può poi essere riassunto nella seguente forma:

$$\begin{cases} x' = A\,x + B\,u \\ y = C\,x + D\,u \end{cases}$$

—> descrive in modo implicito l'evoluzione dello stato *x* nel tempo: **equazione di stato**
—> **equazione** o **trasformazione di uscita**, consente di passare dal valore della variabile di stato a quella della variabile effetto

dove la matrice A è detta *matrice dinamica del sistema*, la matrice B invece è la *matrice degli ingressi* e infine la matrice C è la *matrice delle uscite*.
Dato un sistema dinamico, per **punto di equilibrio del sistema** si intende una condizione in corrispondenza della quale tutte le variabili assumono valori costanti nel tempo. Per un sistema lineare in forma standard l'equilibrio si trova imponendo *x'=0* e così si ottiene *Ax+Bu=0*, si noti che con compaiono derivate. Quando u è costante $\underline{u}$ per trovare il punto occorre risolvere l'equazione rispetto a *x* ottenendo:

$\underline{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\underline{\mathbf{u}}$ —> questo è possibile solo se A è una matrice invertibile (se non ha autovalori nulli). Un sistema lineare privo di autovalori nulli ammette uno e un solo punto di equilibrio

Il legame tra il valore $\underline{u}$ dell'ingresso (costante) di un sistema in condizioni di equilibrio e il corrispondente valore $\underline{y}$ dell'uscita è una funzione $\underline{y}=s(\underline{u})$ che prende il nome di **caratteristica statica** del sistema, essa consente di determinare il valore dell'uscita di un sistema quando sia in condizioni di equilibrio in corrispondenza di un dato ingresso anch'esso costante.

✦ Linearizzazione

Per la descrizione del comportamento di un sistema non lineare in una piccola regione dello spaziose di stato, si può ricorrere a descrizioni approssimate lineari. Considerando il sistema dinamico non lineare con variabile di stato scalare, sia $\underline{x}$ lo stato di equilibrio associato all'ingresso $\underline{u}$ e $\underline{y}$ la corrispondente uscita, ciò significa che:

$$\begin{cases} x' = f\ (x,u) \\ y = g\ (x,u) \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} f(\underline{x},\underline{u}) = 0 \\ \underline{y} = g(x,u) \end{matrix}$$

infatti x' è nullo perché x è costante!

Si sviluppi ora la f(x,u) in serie intorno al punto $\underline{x},\underline{y}$:

$$f(x,u) = f(\underline{x},\underline{u}) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-\underline{x}) + \frac{\partial f}{\partial u}(u-\underline{u}) + \dots$$

—> *considero (x-$\underline{x}$) molto piccolo così posso trascurare gli ordini superiori*

Abbiamo così linearizzato l'equazione di stato; si può fare un procedimento analogo alla trasformazione di uscita.

✦ Movimento libero e movimento forzato

Il valore assunto dallo stato (e dall'uscita) di un sistema al tempo *t* dipende sia dall'ingresso applicato al sistema sia dallo stato iniziale:

$$x(t) = f\,[\,x(t_0)\,,\,u\,(t-t_0)]$$

Risulta utile distinguere gli effetti prodotti da queste due cause definendo:

- **movimento libero** (detto **effetto dello stato iniziale**) l'andamento dello stati (e dell'uscita) quando l'ingresso applicato è nullo ad ogni istante $u(t) = 0$ per ogni *t*. Se si impone quindi che il segnale in ingresso sia nullo, un sistema lineare si scrive nella forma:

$\begin{cases} x' = Ax \\ y = Cx \end{cases}$ —> se lo stato *x* è uno scalare la soluzione[1] è nota: $\mathbf{x_L(t) = e^{A(t-to)}\,x(t_0)}$

- **movimento forzato** (detto **effetto** dell'ingresso) l'andamento dello stato (e dell'uscita) quando la condizione iniziale è nulla, ovvero l'ingresso è un dato segnale $x(t_0) = 0$
  La cui soluzione in caso che $x(t)$ sia scalare risulta:

$$\mathbf{x_F\,(t)} = \int_{to}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

✦ Principio di sovrapposizione degli effetti e Formula di Lagrange

Consideriamo ora un sistema lineare soggetto a un generico ingresso *u* e con una certa condizione iniziale $x(t_0)$; quando lo stato è scalare, la soluzione del sistema è data da:

$$x(t) = x_L(t) + x_F\,(t)$$

cioè il movimento è la somma del movimento libero e di quello forzato. Questo porta al cosiddetto *principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti.* Se ci si riferisce ad un sistema con stato e dimensioni qualsiasi, si applica la *formula di Lagrange*:

$x' = Ax + Bu$ —> $$x(t) = e^{A(t-to)}\,x(t_0) + \int_{to}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

✦ Concetto e definizione di stabilità

Si consideri un sistema dinamico nella forma generica $x'=f(x,u)$ e si consideri anche un punto di equilibrio del sistema $\underline{x}$ corrispondente a un certo ingresso $\underline{u}$. Viene definito **moto perturbato** la soluzione del sistema corrispondente all'ingresso $\underline{u}$ e alla condizione iniziale $\underline{x}+dx_0$. Se il sistema si trova nella situazione iniziale di equilibrio, non perturbata, identificata dalla coppia $(\underline{x},\underline{u})$, la soluzione del sistema si mantiene ovviamente costante per ogni valore di *t*. Nel caso in cui, invece, venga applicata al sistema la condizione iniziale $\underline{x}+dx_0$ questo può evolversi in modi diversi:

- lo stato di equilibrio $\underline{x}$ si dice *asintoticamente stabile* se il moto perturbato tende asintoticamente a tornare nello stato iniziale $\underline{x}$ per ogni perturbazione dx_0 dello stato iniziale stesso purché la perturbazione sia abbastanza piccola
- lo stato si dice *instabile* se il moto perturbato tende a scostarsi sempre di più da $\underline{x}$

Lo stato $\underline{x}$ si dice **stabile** se, comunque fissato un $\varepsilon>0$, esiste un $\delta>0$ tale che, a partire da ogni condizione iniziale appartenente alla sfera di raggio δ centrata in $\underline{x}$, si sviluppa un movimento che resta confinato per ogni istante di tempo nella sfera di raggio ε centrata in $\underline{x}$. inoltre se lo stato $x(t)$ tende asintoticamente a $\underline{x}$ allora il punto di equilibrio è asintoticamente stabile. Si noti che la sfera di raggio ε centrata in $\underline{x}$ è l'insieme degli *x* tale che $\|x-\underline{x}\|<\varepsilon$ per ogni istante di tempo.

Lo stato di equilibrio $\underline{x}$ si dice **convergente** (o *quasi asintoticamente stabile*) se per:

$\|\,x(t_0) - \underline{x}\,\| < \delta$ —> $\lim_{t \to \text{infinito}} x(t) = \underline{x}$

Lo stato di equilibrio si dice asintoticamente stabile se è convergente e stabile.

---

[1] <u>Costante di tempo</u>: T=1/A l'intervallo di tempo è indipendente dall'istante iniziale t_0. Ciò significa che l'istante di tempo T che intercorre tra il punto in cui si manda la tangente alla curva esponenziale e il punto in cui la tangente taglia l'asintoto dell'esponenziale è sempre il medesimo qualsiasi sia il punto considerato sulla curva. Un esponenziale ha la proprietà di scendere a meno dell'1% del valore iniziale in 5 costanti di tempo.

✦ Stabilità dei sistemi lineari

Poiché il movimento forzato dipende solo dall'ingresso applicato al sistema, ai fini dell'equilibrio basta controllare il movimento libero ed è immediato capire che la stabilità di un qualunque movimento dipende solo dalla matrice A e questo dipende dalla posizione dei suoi autovalori nel piano complesso. Un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale negativa. Negli anni si è arrivati ad avere alcuni *test di stabilità* utili e a volte più semplici. Partendo dal polinomio caratteristico degli autovalori $\alpha_0 s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\alpha_2 s^{n-2}+\ldots+\alpha_n$

- condizione necessaria ma non sufficiente è che non ci siano salti di grado;
- condizione necessaria ma non sufficiente è che tutti i coefficienti devono essere non nulli e tutti dello stesso segno;
- condizione necessaria e sufficiente è il **criterio di Routh-Hurwitz**

Tale criterio è parte dal polinomio caratteristico ed è una matrice così strutturata:

α_0	α_2	α_4	α_6	α_8	…
α_1	α_3	α_5	α_7	α_9	…
h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	…
k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	…

n+1 righe

—> con

$$h1 = -\frac{1}{\alpha 1}\begin{bmatrix}\alpha 0 & \alpha 2\\ \alpha 1 & \alpha 3\end{bmatrix} \qquad k1 = -\frac{1}{h1}\begin{bmatrix}\alpha 1 & \alpha 3\\ h1 & h2\end{bmatrix}$$

$$h2 = -\frac{1}{\alpha 1}\begin{bmatrix}\alpha 0 & \alpha 4\\ \alpha 1 & \alpha 5\end{bmatrix} \qquad k2 = -\frac{1}{h1}\begin{bmatrix}\alpha 1 & \alpha 5\\ h1 & h3\end{bmatrix}$$

I valori che non si possono ricavare si sostituiscono con degli zeri. Il sistema è stabile se e solo se gli elementi della prima colonna sono tutti non nulli e dello stesso segno.

✦ Stabilità dei sistemi non lineari

Prima di tutto bisogna linearizzare intorno a $\underline{x}$ ed $\underline{u}$ che è il punto di equilibrio (stabile) a questo punto il **criterio di Lyapunov** che è detto *metodo di linearizzazione* ed è una condizione sufficiente con validità locale afferma che: dato lo stato di equilibrio $\underline{x}$ di un sistema dinamico (a tempo continuo, non lineare e stazionario), condizione sufficiente affinché risulti localmente asintoticamente stabile è che la parte reale sia negativa per ogni valore. Quindi se il sistema linearizzato attorno a $\underline{x}$ è stabile allora il punto di equilibrio $\underline{x},\underline{u}$ è uno stato stabile.

SEGNALI E TRASFORMATE

La **trasformata di Laplace** è un procedimento che consente di passare da una generica funzione reale dal tempo, *f(t)*, ad una funzione complessa *F(s)* della variabile complessa *s*. Questa trasformazione è definita dalla seguente formula:

$$F(s) = \int_{0}^{infinito} e^{-st} f(t)dt$$

funzione	f(t)	F(s)
impulso	imp(t) = 0 altrove 1/k 0 < t < k	L = 1
scalino	sca(t) = 0 t < 0 1 t > 0	L = 1/s
esponenziale	exp(t) = e	L = 1/(s-a)
coseno	f(t) = cos(at)	L = s/(s
seno	f(t) = sen(at)	L = (a)/(s
rampa	ramp(t) = t t > 0 0 t < 0	L = 1/s
parabola	par(t) = t 0 t < 0	L = 1/s

La trasformata di Laplace gode di alcune importanti proprietà:

- **linearità**: *$f(t) = a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$ —> $L(s) = a_1L[f_1(t)] + a_2L[f_2(t)]$*
- **traslazione del dominio**: *$L[e^{at}f(t)] = F(s\text{-}a)$*
- **derivazione nel dominio s**: *tf(t) —> - dF(s)/ds*
- **derivazione nel dominio del tempo**: *df(t)/dt —> sF(s) - $f(0^+)$*
- **operatore 1/s**: *è detto integratore, infatti nel dominio di Laplace questo operatore porta, nel dominio del tempo alla funzione di integrazione*

✦ Poli e zeri di un segnale: la *firma* del segnale

Una generica di queste trasformate può essere scritta anche:

$$F(s) = \frac{(a0s^{m}+a1s^{m-1}+a2s^{m-2}+...+a)}{(b0s^{n}+b1s^{n-1}+b2s^{n-2}+...+b)}$$

Si definiscono **poli** del segnale le singolarità del denominatore della corrispondente trasformata *F(s)*, mentre gli **zeri** sono le singolarità del numeratore. Il numero dei poli viene definito come l'**ordine** del segnale.
Vi sono quindi *n* soluzioni, reali o complesse; inoltre se una soluzione è complessa anche il suo complesso coniugato deve essere soluzione. Raccogliendo gli zeri e i poli è possibile riscrivere la funzione nella seguente forma:

$$F(s) = \varrho \frac{[(s\text{-}z1)(s\text{-}z2)(s\text{-}z3)...]}{[(s\text{-}p1)(s\text{-}p2)(s\text{-}p3)...]}$$

✦ Antitrasformata

Il passaggio inverso, ovvero da una funzione *F(s)* al segnale nel dominio del tempo *f(t)* viene definita **antitrasformazione L^{-1}[F(s)]**. Se ho una trasformata che non per forza è un rapporto tra polinomi, la sua antitrasformata può essere calcolata tramite un'integrale di linea nel piano complesso:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{L}^{|} F(s)\, e^{st}\, ds$$

Questa formula è molto significativa perché mostra che data una trasformata si può risalire al segnale originario, più in particolare vi è una *corrispondenza biunivoca*.
La tecnica più comune per l'antitrasformazione è lo *sviluppo di Heaviside* e può essere utilizzato sia per funzioni generiche sia per funzioni con poli coincidenti:

- **sviluppo di Heaviside**

da una funzione del tipo appena visto si possono fare i seguenti passaggi

$$F(s) = \varrho \frac{[(s-z1)(s-z2)(s-z3)...]}{[(s-p1)(s-p2)(s-p3)...]} \longrightarrow F(s) = \varrho \left[\frac{k1}{s-p1} + \frac{k2}{s-p2} + \frac{k3}{s-p3} + ...\right] \longrightarrow$$

funzione antitrasformata è una somma di esponenziali del tipo ke^{pt}

- **sviluppo di Heaviside rivisto per poli coincidenti**

nel caso di funzioni con poli coincidenti la scomposizione deve avvenire in modo differente

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} \longrightarrow F(s) = \frac{k1}{s+1} + \frac{k2}{s+2} + \frac{k3}{(s+2)^2} \longrightarrow$$

$f(t) = k_1e^{-t} + k_2e^{-2t} + k_3t\ e^{-2t}$

✦ Teoremi del valore iniziale e del valore finale

Il **teorema del valore iniziale** permette di calcolare facilmente il valore assunto dal segnale al tempo t=0. Si noti che se il segnale è discontinuo in tale istante, questo teorema fornisce il limite destro.

$$f(0^+) = \lim_{s \to infinito} sF(s)$$

Il **teorema del valore finale** afferma invece che, se un segnale *f(t)* ha un valore limite asintotico, se cioè esiste $f(infinito)=\lim_{t \to infinito} f(t)$, allora tale valore può essere così denominato:

$$f(infinito) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Tale limite esiste (finito o infinito) se e solo se tutti i poli di *F(s)* hanno parte reale negativa oppure sono collocati nell'origine del piano complesso.

SISTEMI & TRASFORMATE: LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

La funzione di trasferimento è il rapporto tra la trasformata di Laplace Y(s) del segnale d'uscita y(t) e la trasformata di Laplace U(s) del segnale d'ingresso u(t) quando la condizione iniziale del sistema è nulla (x(0)=0). Si potrebbe pensare che G(s) dipenda dal particolare ingresso applicato al sistema, ma da tale ingresso dipende anche il segnale d'uscita. Quindi risulta che la funziona di trasferimento è indipendente dal particolare ingresso applicato, ma dipende solo dai sistema. Partendo dal sistema classico, si può trovare l'equazione d'uscita e da questa la funzione di trasferimento:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \text{—>} \quad Y(s) = G(s)\,U(s) \quad \text{—>} \quad G(s) = C\,(s\,I_n - A)^{-1}\,B + D$$

Il legame tra U(s) e Y(s) dipende infatti solamente dalla quaterna (A,B,C,D) di matrici del sistema, G(s) è quindi una **caratteristica universale del sistema**.

✦il guadagno

Per guadagno di un sistema si intende il rapporto tra il valore che prende l'uscita e il valore assunto dall'ingresso in condizioni di equilibrio. Risolvendo all'equilibrio il sistema di equazioni si ottiene: $\mu = -CA^{-1}B + D$
Si conclude che il guadagno di un sistema coincide con il valore assunto dalla funzione di trasferimento G(s) per s=0.

✦numeratore & denominatore della funzione di trasferimento

Le radici del denominatore della funzione di trasferimento sono gli autovalori del sistema e si ricavano dalla seguente equazione D(s)=det(sI-A) —> è il polinomio caratteristico di A ed è il polinomio di grado n pari all'ordine del sistema. Bisogna però fare attenzione alle possibili semplificazioni con il numeratore, ciò causerebbe la presenza di un **autovalore nascosto** che determina comunque il comportamento della funzione di trasferimento.
Il numeratore è di grado strettamente minore del denominatore. Di conseguenza, il grado del numeratore di $C(sI-A)^{-1}B$ è minore di n. Se il sistema è *proprio* (D=0), allora si conclude che la funzione di trasferimento $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ ha denominatore di grado n e numeratore di grado al più n-1. Se invece il sistema è *improprio* (D != 0) il numeratore e il denominatore di G(s) avranno identico grado n.
Polo di un sistema dinamico è una radice del denominatore della funzione di trasferimento del sistema. **Zero** di un sistema dinamico è una radice del numeratore della funzione di trasferimento del sistema. Un polo è un autovalore della matrice dinamica A di un sistema, e che, a meno di semplificazioni polo/zero, l'insieme dei poli coincide con l'insieme degli autovalori.

✦funzione di trasferimento da un modello ingresso-uscita

tipo di ingresso	ingresso	trasformata dell'ingresso	trasformata generale del sistema	trasformata finale
risposta impulsiva	u(t) = imp (t)	U(s) = 1	Y(s) = G(s) U(s)	Y(s) = G(s) *la funzione di trasferimento può essere vista come la trasformata di Laplace della risposta impulsiva del sistema*
risposta scalino	u(t) = sca (t)	U(s) = 1/s	Y(s) = G(s) U(s)	Y(s) = G(s) 1/s *la risposta allo scalino può essere determinata antitrasformando:* *y(t)=L*

✦risposta a sistemi di primo ordine

$$\begin{cases} x' = u \\ y = x \end{cases} \quad -> \quad \begin{cases} x(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau \\ y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau \end{cases}$$

—> funzione di trasformazione

$$\begin{cases} sX(s) = U(s) \\ X(s) = \frac{1}{s}U(s) \end{cases}$$

integratore!!

✦risposta a sistemi di secondo ordine

Un sistema del secondo ordine ha una funzione di trasferimento del tipo $G(s)=\mu/[(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)]$. Quindi vi sono due poli che possono essere:

- **poli reali**

  vuol dire che le due costanti di tempo τ sono entrambe maggiori di zero e grazie allo sviluppo di Heaviside posso ricavare due esponenziali e grazie al teorema del valore iniziale posso tracciare la curva approssimativa e poi farne la sovrapposizione degli effetti.

- **poli immaginari**

  se i poli si trovano sull'asse immaginaria l'antitrasformata sarà una sinusoide di pulsazione ω derivante dalla risposta impulsiva $Y(s)= \ldots/(s^2+\omega^2)$

- **poli immaginari traslati**

  è l'equivalente a una sinusoide moltiplicata per un'esponenziale. La G(s) può essere riscritta nel segante modo:

$$G(s)=\frac{\cdots}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2} \qquad \text{dove}^{2} \qquad \begin{cases} \xi=\cos(\phi) & \textit{smorzamento} \\ b=\sqrt{1-\xi^2}\ \omega & \textit{pulsazione} \\ T=\frac{2\pi}{b} & \textit{periodo} \end{cases}$$

Se lo **smorzamento** varia, ovvero l'angolo che forma il polo con l'asse immaginario, l'effetto sul sistema cambia. Infatti quando lo smorzamento è nullo i poli sono sull'asse immaginaria e in uscita ottengo una sinusoide normale; all'aumentare dello smorzamento aumenta l'effetto dell'esponenziale (più negativo e la sinusoide è convergente a zero, se i poli sono invece spostati nell'asse positiva avrò una sinusoide divergente).

✦pendenza & funzione pendenza: y(t)—>h(t)=y'(t)

Incomincio applicando la regola della derivata ottenendo H(s)=sY(s)-Y(0) e per trovare il valore iniziale applico appunto il teorema del valore iniziale.

✦polo dominante

I poli più vicini all'asse immaginario, e quindi all'origine, determinano esponenziali più lenti, ciò fa sì che il polo più vicino all'asse immaginario venga detto **polo dominante** in quanto l'effetto di questo ha una durata maggiore mentre tutti gli altri terminano il loro effetto prima smettendo di influire sul sistema.

[2] ricorda che φ è l'angolo che forma il polo con l'asse reale

RISPOSTA IN FREQUENZA

Un segnale sinusoidale può essere associato ad un vettore nel piano complesso di lunghezza pari all'ampiezza della sinusoide e che forma un angolo con l'asse reale pari alla fase della sinusoide.
Il **teorema della risposta in frequenza** afferma che, considerando un sistema lineare con funzione di trasferimento G(s) soggetto a l'ingresso u(t)=U ($\underline{\omega}$t+α), e supponendo che nessun autovalore della matrice dinamica A del sistema coincida con il punto j$\underline{\omega}$ dell'asse immaginario allora per una scelta opportuna (e unica) dello stato iniziale x(0), l'uscita del sistema è una sinusoide della medesima pulsazione $\underline{\omega}$ dell'ingresso: y(t)=Y sen($\underline{\omega}$t+ß). Dove l'ampiezza e la fase sono date da Y=|G(j$\underline{\omega}$)|U e ß=α+ϕ con ϕ=argG(j$\underline{\omega}$). Se il sistema è stabile, allora qualunque sia lo stato iniziale del sistema, l'uscita y(t) tende al segnale sinusoidale precisato. L'uscita potrà essere amplificata oppure attenuata rispetto all'ingresso a seconda che |G(j$\underline{\omega}$)|>1 oppure minore. L'andamento sinusoidale che si manifesta a transitorio esaurito prende il nome di *risposta sinusoidale*.

✦filtro passa-basso: amplificazione & attenuamento

Indicando con ω_c la pulsazione per cui |G(j$\underline{\omega}$)|=1 per $\omega<\omega_c$ l'uscita ha modulo superiore a quello dell'ingresso poiché |G(j$\underline{\omega}$)|>1 mentre per $\omega<<\omega_c$ si osserva che il modulo è molto amplificato. Infine se $\omega>\omega_c$ l'uscita è una sinusoide di ampiezza minore di quella dell'ingresso e se l'ingresso è ad altra frequenza ($\omega>>\omega_c$) l'ampiezza dell'uscita è molto piccola, prossima allo zero.

✦risonanza

L'effetto di esaltazione di un ristretto campo di frequenza prende il nome di **risonanza**. La funzione di trasferimento più semplice che può rappresentare questa caratteristica è quella del secondo ordine:

$$G(s) = \frac{\varrho}{s^2 + \alpha s + \beta}$$

Il diagramma risultante ha un picco in corrispondenza della pulsazione $\underline{\omega}$. Dunque, se l'ingresso è una sinusoide di pulsazione prossima a questo valore, l'uscita risulta essere amplificata. Se invece la sinusoide di ingresso ha pulsazione bassa, allora l'uscita ha ampiezza circa invariata rispetto a quella dell'ingresso, Infine quando la pulsazione del segnale è elevata, l'uscita è attenuata rispetto all'ingresso. Per ω—> ∞ l'ampiezza dell'uscita tende a zero.

✦risposta armonica e risposta periodica

La **risposta armonica** è quando l'ingresso è composto da una somma di sinusoidi $u(t)=U_1 sen(\omega_1 t+\alpha_1)+U_2 sen(\omega_2 t+\alpha_2)$…
Le sinusoidi che compongono questo segnale vengono dette *armoniche* del segnale. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, si conclude che se il sistema è stabile l'uscita converge, qualsiasi sia la condizione iniziale, a:

$$y(t)=Y_1 sen(\omega_1 t+\beta_1)+Y_2 sen(\omega_2 t+\beta_2)\ldots$$

La **risposta periodica** è riferita ad un ingresso generico periodico che, secondo la trasformata di Fourier, può essere visto come la somma di più sinusoidi.

Rappresentazione Della Risposta In Frequenza

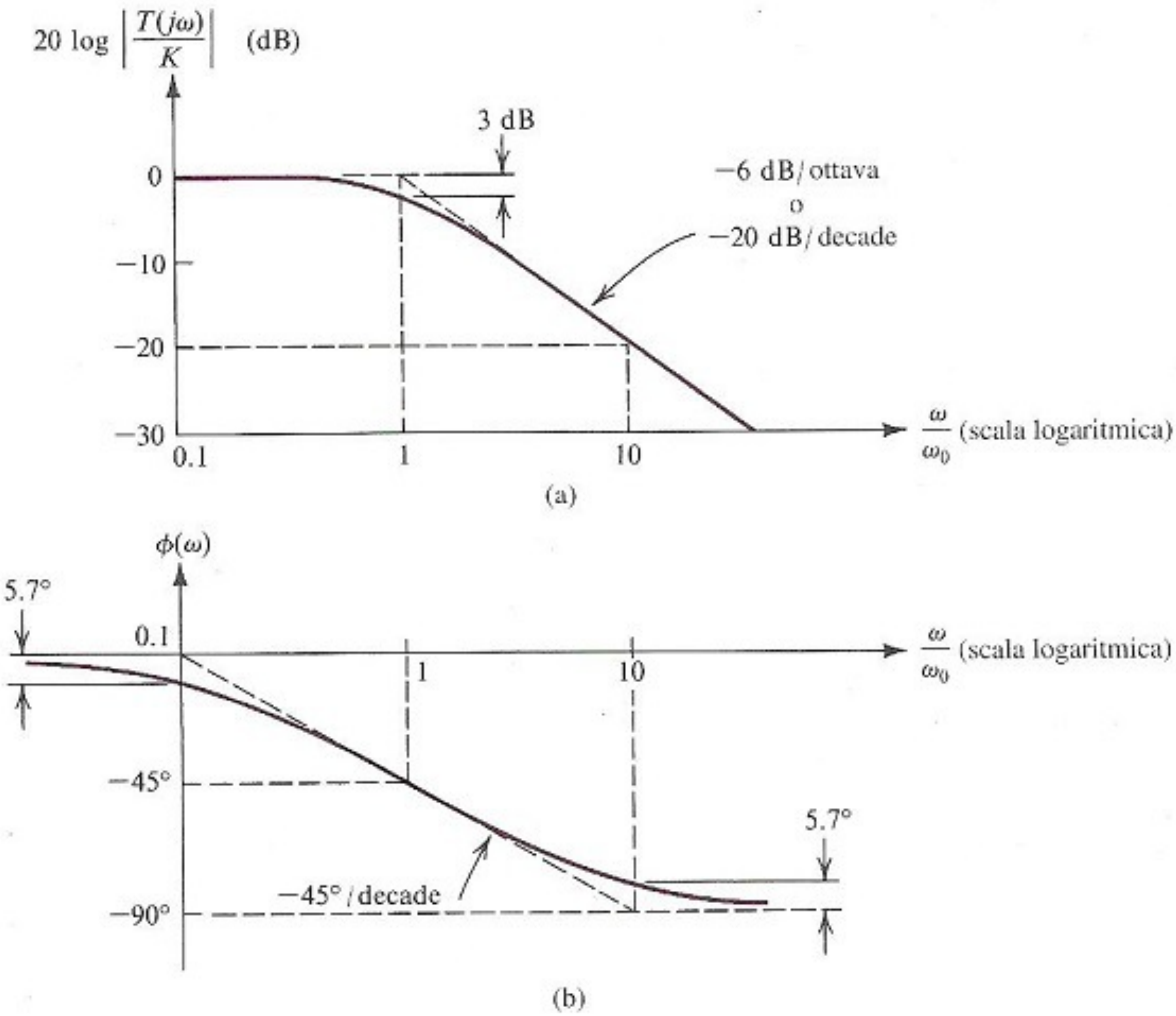
1. **diagrammi polari & diagrammi di Nyquist**
   Un diagramma polare rappresenta G(jω) come luogo dei punti nel piano complesso al variare di ω da 0 a + ∞.
   Il diagramma di Nyquist è analogo a quello polare solo che rappresenta la funzione di trasferimento come luogo dei punti nel piano complesso al variare di ω da - ∞ a + ∞.

2. **diagrammi cartesiani o di Bode del modulo**
   La risposta in frequenza può essere rappresentata attraverso i grafici degli andamenti di |G(jω)| e argG(jω) in funzione della pulsazione ω. Questi diagrammi vengono rappresentati in modo particolare:
   - come ascissa vengono riportate le pulsazioni ω in scala logaritmica ($x=\Delta \log_{10}\omega$). Si noti che a pulsazioni che stanno in uguale rapporto corrisponde la medesima distanza; l'intervallo di frequenze a cui corrisponde un tratto di lunghezza Δ prende il nome di *decade*. Agli estremi di una decade vi sono due pulsazioni che stanno tra loro in un rapporto di 1 a 10.
   - in ordinata si riporta |G(jω)| in *decibel* (dB) —> $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$

   Nel diagramma di Bode del modulo, quando cambia l'inclinazione (da 0dB a -20dB per la comparsa di un polo) il diagramma effettivo differisce dal diagramma approssimati, il massimo errore si ha nella pulsazione relativa al polo e corrisponde ad un errore di -3dB.
   Per la comparsa di un polo la pendenza varia di -20dB/Δ mentre per la comparsa di uno zero la pendenza varia di +20dB/Δ.

3. diagramma di Bode della fase

Il diagramma di Bode della fase riporta in ascissa la pulsazione ω nella medesima scala logaritmica per il diagramma di Bode del modulo, ed in ordinata la fase di G(jω) al variare di ω da 0 (che corrisponde all'ascissa -∞. Nella scala logaritmica delle ascisse) a ∞. Sulle ordinate la fase viene rappresentata in una normale scala lineare. La pendenza varia di +90° per poli instabili o zeri stabili, mentre varia di -90° per poli stabili e zeri instabili.



SCHEMI A BLOCCHI E SISTEMI INTERCONNESSI

Ogni sistema ha la sua funzione di trasferimento, ma si possono legare più sistemi insieme ottenendo una più vasta gamma di effetti. Possono essere interconnessi con due metodi principali:

- **nodo sommatore**: punto dove si sommano (algebricamente) due o più segnali;
- **punto di diramazione**: punto dove un segnale si distribuisce su più linee sempre uguale a sè stesso.

I sistemi possono essere connessi in due strutture differenti:

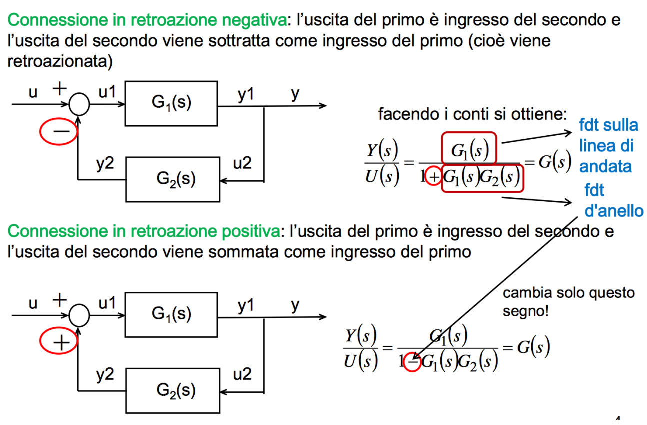
A. **cascata o in serie —> $G_{tot}(s)=G_1(s)G_2(s)\dots G_n(s)$** *—> stabilità data dai vari denominatori*
   Due sistemi sono in cascata se l'uscita del primo sistema agisce come ingresso per il secondo, per questi sistemi la funzione di trasferimento che caratterizza il sistema finale è data dal prodotto delle funzioni di trasferimento dei singoli sottoinsiemi in cascata.

B. **parallelo —> $G_{tot}(s)=G_1(s)+G_2(s)+\dots+G_n(s)$** *—> stabilità data dai vari denominatori*
   Si parla di sistemi interconnessi in parallelo quando due sistemi sono sofferti al medesimo ingresso e l'uscita è la somma delle due uscite, per questi sistemi la funzione di trasferimento complessiva è data dalla somma delle sottofunzioni di trasferimento.

Sistemi disposti in cascata, come quelli disposti in parallelo, danno luogo a un sistema complessivo stabile[3] se e solo se tutti i sottoinsiemi sono stabili (per la stabilità importano tutti gli autovalori, anche quelli che vengono semplificati)

CONNESSIONE IN RETROAZIONE

Due sistemi si dicono in retroazione quando l'uscita di uno dei due istituisce l'ingresso dell'altro, la variabile di ingresso di un sistema dipende, in ultima analisi, dal valore dell'uscita del sistema stesso. Si definisce **linea d'andata** la linea che collega $u_1(t)$ con $y_1(t)$ attraverso il sistema e **linea di retroazione** la linea che riporta il segnale d'uscita all'ingresso del sistema. L'insieme delle due linee prende il nome di **anello** (**anello chiuso**). Se si immagina di aprire l'anello di retroazione si ottiene il cosiddetto **anello aperto L(s)**. La funzione di trasferimento in anello chiuso G(s) è data dal rapporto tra il prodotto delle funzioni di trasferimento della linea d'andata e la somma (o differenza) di 1 con la funzione di trasferimento d'anello. In questo modo i poli del sistema in anello chiuso si ottengono risolvendo un'equazione che non è più un prodotto e quindi i poli del sistema complessivo dipendono da zeri e poli dei sistemi che compongono la retroazione. In particolare può accadere che i vari sistemi siano stabili ma il sistema reatroazioniato sia instabile o viceversa. In altre parole, la connessione in retroazione può avere un effetto stabilizzante o un effetto stabilizzante.



[3] infatti il denominatore della funzione di trasferimento complessiva, in entrambi i casi, è il prodotto dei denominatori di tutte le sottofunzioni di trasferimento.

CONTROLLO AUTOMATICO

Si parla di **controllo in catena chiusa** (**o controllo in anello chiuso**) quando l'azione di controllo viene decisa sulla base del confronto tra la condizione in cui si trova il sistema da controllare e la condizione desiderata. Si viene così a formare una concatenazione di eventi osservazione-confrotno-decisione-intervento sul sistema che dà luogo ad una catena di effetti che si chiude su ste stessa, detto *sistema circolare.* Si parla invece di **controllo in catena aperta** (o **controllo in anello aperto**) quando il controllore opera in base ad una programmata sequenza di operazioni, non basata sulla osservazione della condizione attuale in cui si trova ad operare il sistema sotto controllo. Per i sistemi in catena chiusa si parla anche di *controllo in retroazione*. La condizione ottimale si ha quando si possono misurare tutte la variabili di stato del sistema, in questo caso si parla di sistemi di controllo ad **informazione completa**. Ma speso bisogna accontentarsi di misure molto meno esaustive sullo stato del sistema, ovvero di una **informazione parziale**.
Fanno parte di un sistema controllato in catena chiusa i seguenti componenti:

A —> attuatore
è quel sistema che, a partire da un segnale u generato da controllore C, regola la variabile manipolabile u_P con cui si agisce sul vero e proprio sistema da controllare P.

P —> sistema da controllare
il sistema da controllare, spesso denominato *processo*, è soggetto a uno o più segnali di ingresso e produce uno o più segnali d'uscita. Quanto agli ingressi, alcuni sono manipolabili nel senso che possono essere governati tramite l'attuatore, altri non lo sono e prendono il nome di *disturbi*.

T —> sensore (o trasduttore)
le variabili misurabili vengono rilevate mediante opportuni dispositivi di misura che prendono il nome di sensori o trasduttori. La misura viene poi trasmessa (via retroazione) al controllore.

C —> controllore
il controllore riceve le informazioni di misura dal sensore e quelle sul valore desiderato y^o (segnale di riferimento) della variabili y da governare; esso decide quindi l'azione da imprimere alla variabile u di ingresso dell'attuatore A.

✦specifiche di un sistema di controllo

Sicuramente la **stabilità** del sistema è la prima cosa richiesta, infatti a fonte di perturbazioni si desidera che il sistema torni ad operare nelle condizioni di funzionamento previste, cioè che tali disturbi non abbiano conseguenze permanenti.
Anche il **comportamento a regine** è uno dei fattori determinanti per un sistema di controllo. Infatti il segnale di riferimento in questo caso è costante e viene indicato con $\underline{y}^o$ e il segnali di uscita $\underline{y}$ è anch'esso costante oppure fluttua (a causa dei disturbi) intorno ad un valore medio. L'errore allora risulta $\underline{e}=\underline{y}^o - \underline{y} = 0$ o comunque deve essere <5% poiché l'obiettivo è fare sì che l'errore sia il più piccolo possibile.
Il **comportamento in transitorio** è una parte molto delicata del progetto. Infatti un aspetto fondamentale da considerare è il modo in cui ha luogo la transizione dal precedente al nuovo regime. Tale transizione, infatti, può aver luogo con modalità assai diverse: 1) può essere più o meno veloce, ed è chiaro che una eccessiva lentezza nella risposta può avere gravi conseguenze (*tempo di risposta breve senza trascurare lo sforzo del controllore*); 2) la variabile di uscita y può essere soggetta ad oscillazioni significative prima di assestarsi al nuovo valore, in tal caso i dispositivi del sistema possono essere soggetti a sollecitazioni non trascurabili (**banda passante** abbastanza elevata).
Non bisogna poi dimenticare che l'analisi non va limitata alla variabile d'uscita, ma va estesa alle variabili interne, in particolare alla variabile di controllo; occorre infatti evitare che nei transitori venga richiesto uno sforzo di controllo eccessivo, che possa portare al deterioramento degli attuatori o a condizioni di sovra-sollecitazione dell'impianto.

✦la banda dei quattro

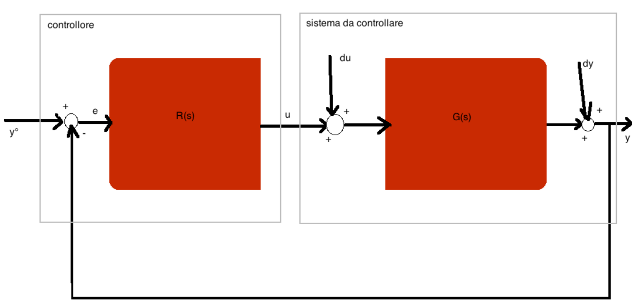
1. Funzione di trasferimento[4] da y° a y
   F(s) = L(s) / [1+L(s)] *—> desidero F(s)=1*

2. Funzione di trasferimento[5] da y° a e
   T(s) = 1 / [1+L(s)]

3. Funzione di trasferimento[6] da y° a u
   S(s) = R(s) / [1+L(s)]

4. Funzione di trasferimento da d_u a y
   W(s) = G(s) / [1+L(s)]

SISTEMI DI CONTROLLO RETROAZIONATI LINEARI



[4] desidero F(s) =1 anche se è utopistico

[5] si noti che F(s)+T(s)=1 sono funzioni *complementari*, T(s) prende il nome di *funzione di sensitività* mentre F(s) di *funzione di sensitività complementare*

[6] consiste nell'influenza della variabile di controllo

✦criterio di Nyquist

Il **criterio di Nyquist** consente di giudicare la stabilità di un sistema in anello chiuso analizzando il diagramma della risposta in frequenza della funzione di trasferimento in anello aperto L(s). Il sistema in anello chiesto (supposto retroazionato negativamente) è stabile se gli zeri di **Δ(s) = 1 + L(s)** stanno tutti nel semipiano sinistro del piano complesso. Infatti tali zeri sono i poli del sistema in anello chiuso. Del tutto equivalentemente si può affrontare la questione cercando di stabilire in quale numero gli zeri di Δ(s) stanno nel semipiano destro[7]: se tale numero sarà nullo allora il sistema è stabile. Prendendo in esame una generica linea chiusa ø nel piano complesso, ed esaminiamo la linea del piano complesso Ω ottenuta come immagine di ø attraverso Δ(s).

- **<u>effetto di uno o più poli interni al percorso di Nyquist</u>**

Supponendo Δ(s)=1/(s-p) con polo interno a ø, il numero complesso (s-p) è il vettore che congiunge p ad un generico punti s di ø. Quindi il punto Δ(s) avrà una fase che descrive una linea chiusa Ω che viene percorsa da Δ(s) per un intero giro antiorario quando s compie un giro orario su ø.
In generale, se vi sono k poli interni a ø, il punto Δ(s) descrive k giri in senso antiorario su Ω quando s compie un giro in senso orario su ø.

- **<u>effetto di uno o più zeri interni al percorso di Nyquist</u>**

Considerando Δ(s) = (s-z) allora Δ(s) descriverà k giri in senso orario quando s descrive un giro in senso orario su ø.

- **<u>effetto di poli o zeri esterni al percorso di Nyquist</u>**

Se si considera una singolarità di Δ(s) esterna a ø, sia essa un polo o uno zero, allora il corrispondente vettore associato alla singolarità si muove quando s compie un giro su ø ma ritornando su se stesso senza descrivere una rotazione.

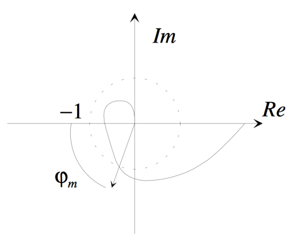
Dopo queste analisi si può dedurre che il numero di giri di Δ(s) attorno all'origine è uguale alla differenza tra il numero di poli interni a ø e il numero di zeri interni a ø. A questo punto considerando la funzione nella forma che ci interessa, ovvero Δ(s)=1+L(s) allora si può notare che:

- i poli di Δ(s) sono i poli in anello aperto (ovvero i poli di L(s));
- gli zeri di Δ(s) sono i poli in anello chiuso (ovvero i poli di Δ(s));

Quindi il numero di giri attorno all'origine **N** è uguale alla differenza tra il numero di poli in anello aperto interni al percorso di Nyquist e tra il numero di poli in anello chiuso interni al percorso di Nyquist.
Si può anche notare che la funzione L(s), nell'insieme dei valori assunti quando s descrive ø, si avrà una linea che coincide con Ω a parte una traslazione di -1. Dunque il numero di giri che Δ(s) descrive attorno all'origine coincide con il numero dei giri che L(s) descrive attorno al punto -1. Quindi quando s compie un giro in senso orario s su ø (consideriamo ora ø come il percorso di Nyquist), per L(s) si può dire che: *il diagramma di Nyquist descrive un numero di giri in senso antiorario intorno al punto -1 pari alla differenza tra il numero dei poli in anello aperto che giacciono nel semipiano destro e il numero di poli in anello chiuso che giacciono nel semipiano destro.*
Inoltre il sistema è stabile se i poli in anello chiuso sono nel semipiano sinistro, e quindi il numero dei poli in anello chiuso intorno al percorso di Nyquist deve essere nullo: il numero dei giri deve essere quindi uguale al numero di poli in anello aperto interni al percorso di Nyquist (poli di L(s)).
Considerando un sistema lineare retroazionato negativamente è stabile quando **$N=P_D$** dove N è il numero di giri descritti in senso antiorario intorno al punto -1 dal diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento d'anello e P_D è il numero dei poli in anello aperto nel semipiano destro del piano complesso. Se il sistema in anello aperto è stabile allora $P_D=0$ e il criterio diviene: un sistema lineare retroazionato negativamente è stabile quando il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento d'anello non contiene al suo interno il punto -1.
Si noti che i poli di L(s) sull'asse immaginario non entrano nel conteggio di P_D poiché per definizione vengono evitati dal percorso di Nyquist.
Nel caso di retroazione positiva i risultati precedenti sono validi pur di considerare le rotazioni intorno al punto +1.

✦criterio di Bode

Consideriamo il guadagno del sistema positivo. La **pulsazione critica ω_c** è quella per cui il diagramma di Bode del modulo di L(s) taglia l'asse a 0dB, mentre la **fase critica ϕ_c** è nient'altro che il valore assunto dal diagramma delle fasi alla pulsazione critica. Se tale fase è compresa tra 0° e -180° allora il sistema in anello chiuso è stabile, altrimenti non lo è. Si definisce quindi il cosiddetto **margine di fase** come l'angolo complementare alla fase critica: $\phi_M=180° - |\phi_c|$



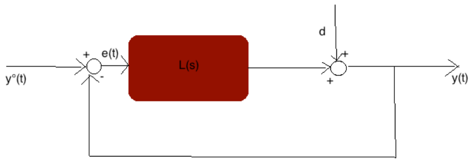
Risulta necessario e conveniente quindi progettare il controllore in modo che il diagramma di Bode della funzione di trasferimento d'anello tagli l'asse a 0dB con una pendenza di -20dB/Δ così sicuramente la fase sarebbe minore di 90°. Per garantire la stabilità in anello chiuso con una certa sicurezza è bene che il margine di fase non sia troppo piccolo e quindi il margine di fase viene spesso considerato come un indice del *grado di stabilità* di un sistema in anello chiuso: maggiore è il margine di fase e tanto più lontano è il diagramma di Nyquist dal punto critico -1.

[7] Il semipiano destro può essere visto come la regione del piano complesso delimitata dall'asse immaginario e dalla semicirconferenza di raggio ∞ giacente appunto nel semipiano destro: **percorso di Nyquist**.

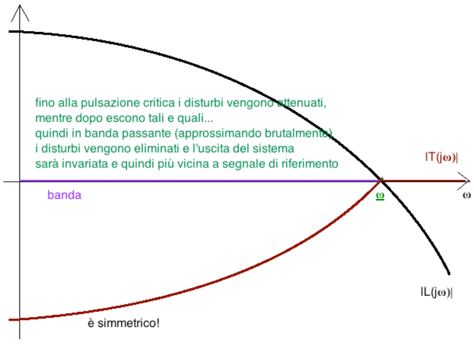
✦effetto del disturbo

La funzione di trasferimento da d a e(t) è proprio una funzione della banda dei quattro: $T(s) = + 1/[1+L(s)]$.

Pensando al disturbo come qualcosa di periodica (il cui caso più semplice è una sinusoide di pulsazione $\underline{\omega}$) non è applicabile il teorema del valore finale e bisogna applicare la risposta in frequenza, per cui l'effetto di e(t) sarà una sinusoide di pulsazione $\underline{\omega}$ e ampiezza $|T(j\underline{\omega})|$. Considerando invece F(s) si può notare che:



$$|F(j\underline{\omega})| = |1/[1+L(s)]| = \begin{cases} 1 \text{ se } |L(j\underline{\omega})| >> 1 \longrightarrow \text{ ovvero quando } \omega < \underline{\omega} \\ L(j\underline{\omega}) \text{ se } |L(j\underline{\omega})| << 1 \longrightarrow \text{ ovvero quando } \omega > \underline{\omega} \end{cases}$$



Nel caso migliore si potrebbe riscrivere la funzione $F(s)=1/(1+sT)$ con $T=1/\omega_c$ e considerando le semplificazioni appena fatte si può capire che le sinusoidi di pulsazioni comprese tra 0 e ω_c si ritrovano tali e quali all'uscita senza distorsione. Per questo tale intervallo di pulsazioni prende il nome di **banda passante** del sistema in anello chiuso. SI deduce che più è elevata la banda passante e più ci si avvicina all'obiettivo ideale che porta l'uscita y a coincidere perfettamente con il riferimento y°, inoltre più è elevata la banda passante e maggiore è la rapidità di risposta del sistema.

✦luogo delle radici

Il **l**uogo delle radici consente di studiare la posizione, nel piano complesso, dei poli di un sistema retroazionato al variare del guadagno della funzione di trasferimento d'anello. Scrivendo la funzione d'anello come $L(s)=\rho\, N(s)/D(s)$ e dato che consideriamo i sistemi a retroazione negativa, i poli del sistema in anello chiuso si ottengono dalla condizione:

$$\mathbf{D(s) + \rho\, N(s) = 0}$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra l'equazione caratteristica ha n soluzioni per ogni valore di ρ; l'insieme delle soluzioni viene detta *costellazione polare* e ovviamente questa costellazione varia a seconda del particolare valore di ρ, descrivendo delle linee nel piano complesso, linee che prendono il nome di **rami**. L'insieme di tutti i punti del piano commesso descritto dalla costellazione al variare di ρ prende il nome di **luogo delle radici**.

Per semplicità scriviamo la funzione di trasferimento d'anello L(s) nella forma $L(s)= \rho L^*(s)$ da cui l'equazione del luogo risulta $\mathbf{L^*(s)=-1/\rho}$

SI dice *luogo delle radici diretto* l'insieme delle radici dell'equazione caratteristica al variare di ρ da 0 a + ∞; si noti che è l'insieme dei numeri complessi s tali che la fase di $L^*(s)$ risulterà 180° + k360° con k intero.

Si dice *luogo delle radici inverso* l'insieme delle radici dell'equazione caratteristica al cariare di ρ da 0 a - ∞; si noti che se ρ<0 la fase di $L^*(s)$ risulterà 0° + k360° con k intero.

regole di tracciamento del luogo delle radici

1. simmetria: il luogo (diretto o inverso) è simmetrico rispetto all'asse reale.
2. asse reale: ogni punto dell'asse reale posto a sinistra di un numero dispari di singolarità di L(s) fa parte del luogo diretto, i restanti punti dell'asse reale fanno parte del luogo inverso.
3. numero dei rami: il luogo (diretto o inverso) è costituito da un numero di rami pari al numero di poli di L(s).
4. partenza e arrivo dei rami: dai poli di L(s) partono i rami del luogo, se L(s) ha un numero di zeri uguale a quello dei poli, tutti i rami arrivano negli zeri di L(s).
5. rami all'infinito: se L(s) ha zeri in numero inferiore a quello dei poli, vi sono alcuni rami che vanno all'infinito per |ρ| che va all'infinito; questi rami hanno asintoti che si incontrano nello stesso punto dell'asse reale, ovvero nell'ascissa $\mathbf{(-\Sigma_i z_i + \Sigma_j p_j)/r}$ dove r=n-m è la differenza tra grado n del denominatore di L(s) (numero poli) e grado m del numeratore di L(s) (numero zeri). Gli angoli che gli asintoti formano con l'asse reale positivo sono:
$$\theta = \begin{cases} (180° + k360°)/r \longrightarrow \text{luogo diretto} \\ (0° + k360°)/r \longrightarrow \text{luogo inverso} \end{cases}$$
6. punteggiatura in ρ: dalla condizione $L^*(s)= -1/\rho$ si deduce che il valore di |ρ| in un dato punto è uguale al prodotto delle distanze di tale punto dai poli di L(s) diviso per il prodotto dell distanze dagli zeri di L(s).

✦errore a transitorio esaurito

tipo	poli nell'origine	g=0	g=1	g=2	g=3
segnale	y°sca(t)	$y°\,[1/(1+\mu)]$	0	0	0
di	y°ramp(t)	∞	$y°\,(1/\mu)$	0	0
riferimento	y°par(t)	∞	∞	$y°\,(1/\mu)$	0

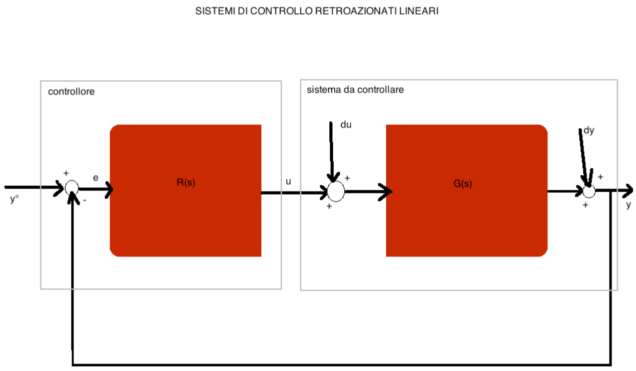
Una ulteriore ragione di discrepanza tra l’uscita ed il riferimento è naturalmente l’effetto dei disturbi che possono agire sul sistema, l’errore e può essere quindi valutato sovrapponendo gli effetti del segnale di riferimento y° e dei disturbi.

✦progetto del controllore

Per quanto riguarda il progetto di un controllore di solito si procede in due fasi:

- *progetto statico*
- *progetto dinamico*

Nella prima fase si procede all’individuazione dei valori appropriati per μ_R e di h (tipo del controllore, poli nell’origine) in modo da soddisfare i requisiti sul comportamento a transitorio esaurito imposti dal sistema di controllo (progetto statico). Si passa poi al progetto dinamico volto all’individuazione di R*(s) modo a soddisfare i requisiti sul comportamento dinamico del sistema di controllo (stabilità, velocità di risposta, andamento dei transitori).



✦controllori P, PI, PID

controllore	ingresso u(t)	funzione trasferimento R(s)	dettagli
P proporzionale	u(t) = k	R(s) = k	errore a transitorio esaurito si può ridurre aumentando il guadagno del controllore, cosa utile anche per aumentare la velocità di risposta del sistema (attenzione a non arrivare ad instabilità)
PI proporzionale & integrativo	u(t) = k	R(s) = k	si genera un polo nell’origine, utile per far variare il tipo del sistema e trovare l’errore a transitorio esaurito più adatto.
PID proporzionale, integrativo & derivativo	$u(t)=k_p$	R(s) = k	il grado del numeratore è superiore a quello del denominatore, cosa che non esiste sei sistemi di causa-effeto del mondo reale. Ciò deriva dall’operazione di derivata che valuta la pendenza al tempo t del segnale e che ha in qualche modo a vedere con l’elocuzione futura

SEGNALI E SISTEMI A TEMPO DISCRETO

I segnali ed i sistemi fino ad ora considerato erano tutti a tempo continuo, ma è opportuno, a causa della loro importanza, analizzare anche i segnali e i sistemi a tempo discreto. Un **segnale a tempo discreto** è una sequenza di valori reali associati ad istanti discreti. Bisogna introdurre una trasformata che svolge un ruolo simile alla trasformata di Laplace per i segnali a tempo continuo: la **trasformata Z**. La trasformata Z di un segnale a tempo discreto f(t) è appunto una funzione complessa di variabile complessa F(z) data da:

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \ldots$$

Tabella delle trasformate.

funzione	f(t)	Z [f(t)]
impulso	imp(t)	Z[imp(t)] = 1
scalino	sca(t) = 1	Z[sca(t)] = z/(z-1)
rampa	ramp(t) = t	Z[ramp(t)] = z/(z-1)
esponenziale	a^t	Z[a^t] = z/(z
esponenziale (2)	t a^t	Z[t a^t
seno	sen(ω̲t)	Z[sen(_ _ _
coseno	cos(ω̲t)	Z[cos(_ _ _

Ricorda che: f(t) se 0≤t invece per t<0 f(t)=0

Anche la trasformata Z gode di alcune proprietà utili:

- **linearità**: *(t) =* $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longrightarrow Z[f(t)] = a_1 Z[f_1(t)] + a_2 Z[f_2(t)]$
- **contrazione in z**: *sia F(z) la trasformata di f(t)* $\longrightarrow Z[a^t f(t)] = F(a^{-1}z)$
- **derivata in z**: $Z[t\, f(t)] = -z\, \partial F(z)/\partial z$

✦teorema del valore finale & teorema del valore iniziale

Il valore iniziale f(0) di una funzione f(t) può essere dedotto dalla sua trasformata F(z), e prende il nome di **teorema del valore iniziale**, nel modo seguente:

$$\mathbf{f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)}$$

Invece il **teorema del valore finale** implica che, se esiste il valore asintotico f(∞) di f(t) allora f(∞) può essere dedotto dalla sua trasformata F(z):

$$\mathbf{f(\infty) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})\, F(z)}$$

Si noti che f(∞) esiste se le singolarità del denominatore di F(z) hanno tutte modulo minore di 1 oppure, se qualcuna di queste si trova nel punto 1, le restanti avendo tutte modulo minore di 1.

✦poli & zeri di un segnale

Poli e zeri di un segnale sono definiti come le singolarità del numeratore e del denominatore della trasformata Z del segnale. Una osservazione importante riguarda i segnali periodici di periodo T, questi segnali hanno una caratteristica fondamentale: i loro poli sono collocati sulla circonferenza di raggio 1 del piano complesso nei punti aventi come fase 2π/T, 4π/T e così via; naturalmente ciascuno di questi poli è accompagnato dal suo complesso coniugato..

✦operatore z e operatore z^{-1}

L'operatore z è interpretato come l'**operatore di anticipo unitario** dato che moltiplicando per z la trasformata Z di un segnale si ottiene la trasformata Z del segnale traslato avari di un passo: Z[f(t+1)] = z[Z[f(t)] - f(0)]. In generale z^k è l'*operatore di anticipo di k passi*.

Invece z^{-1} è l'**operatore ritardo unitario** e generalizzando si verifica facilmente che z^{-k} è l'*operatore di ritardo di k passi*.

✦antitrasformazione

Innanzitutto un metodo del tutto analogo a quello visto a tempo continuo, basato sullo sviluppo di Heaviside: si tratta di scomporre F(z) nella somma di termini elementari di cui si conosce l'antitrasformata.

Oppure esiste un procedimento per determinare i valori dei campioni che compongono f(t), si tratta di esprimere F(z) come somma (infinita) di potenze di $z^{-n} \longrightarrow F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} \ldots$

Quando questa espressione è stata trovata, allora i campioni di f(t) sono ovviamente dati da f(0)= f_0 , f(1)=f_1 e così via.

Per arrivare alla serie di F(z) si può utilizzare l'algoritmo della **Lunga Divisione**.

✦analisi in frequenza

Anche i segnali a tempo discreto possono essere studiati nel dominio delle frequenze. A tal fine definiamo la **trasformata di Fourier Ω(ω)** di f(t) come:

$$\Omega(\omega) = f(0) + f(1)\, e^{-j\omega} + f(2)\, e^{-2j\omega} + \dots \longrightarrow \sum f(t)\, e^{-j\omega t}$$

dove ω è un numero reale. La trasformata di Fourier si ottiene valutando F(z) sulla circonferenza di raggio 1 nel piano complesso, ovvero per $z=e^{j\omega}$. Tutte le proprietà viste per le trasformate Zeta si traducono in analoghe proprietà per la trasformata di Fourier (pur di sostituire dove necessario $e^{j\omega}$ al posto di z).

Mentre a tempo continuo i segnali possono avere frequenza comunque elevata, a tempo discreto questo non è vero: la pulsazione più elevata a tempo discreto è $\boldsymbol{\omega_{MAX} = \pi}$ (ovvero la frequenza più elevata a f_{MAX}=0,5).

✦sistemi e trasformate

La forma in cui si scrivono i sistemi lineari a tempo discreto è la seguente:

$$\begin{cases} x(t+1) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

- se u(t) = 0

$$\begin{cases} x(t+1) = A\,x(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases} \quad \text{—> la soluzione fornisce il movimento libero —>} \quad \begin{cases} x_L(t) = A^{t-to}\,x(t_0) \\ y_L(t) = CA^{t-to}\,x(t_0) \end{cases}$$

- se x(t) = 0 allora
  $x(t_0 +1) = Bu(t_0)$
  $x(t_0 +2) = ABu(t_0) + Bu(t_0 +1)$
  $x(t_0 +3) = A^2Bu(t_0) + ABu(t_0 +1) + Bu(t_0 +2)$
  il **movimento forzato** risulta quindi $x_F(t)=Bu(t-1)+ABu(t-2)+\dots+A^{t-to-1}Bu(t_0)$

In generale si ha la **formula di Lagrange a tempo discreto**:

$$\begin{cases} x(t) = x_L(t)+x_F(t) = A^{t-to}\,x(t_0) + \sum_{k=0}^{t-to-1} A^k Bu(t-k-1) \\ y(t) = CA^{t-to}\,x(t_0) + \sum_{k=0}^{t-to-1} CA^k Bu(t-k) + Du(t) \end{cases}$$

dove CA^kB prendono il nome di *parametri di Markov*

✦punto di equilibrio e guadagno

Il **punto di equilibrio** x̲ associato ad un ingresso costante u̲ si può trovare imponendo x(t+1)=x(t)=x̲ e si ha così:

$$\begin{cases} x_{eq} = Ax_{eq} + Bu_{eq} \\ y_{eq} = Cx_{eq} + Du_{eq} \end{cases} \quad \text{—>} \quad \begin{cases} x_{eq} = (I-A)^{-1}Bu_{eq} \\ y_{eq} = C(I-A)^{-1}Bu_{eq} + Du_{eq} \end{cases}$$

La caratteristica statica del sistema , cioè il legame tra il valore costante u̲ dell'ingresso e il valore dell'uscita y̲ corrispondente alla condizione di equilibrio del sistema è perciò data da $\underline{y}=\mu\underline{u}$ dove il **guadagno μ** vale:

$$\boldsymbol{\mu = C(I-A)^{-1} B + D}$$

✦funzione di trasferimento Zeta

Il rapporto tra la trasformata Zeta dell'uscita e quella dell'ingresso corrispondente a condizioni iniziali nulle non dipende dal particolare segnale applicato all'ingresso del sistema. Tale rapporto prende il nome di **funzione di trasferimento Zeta** del sistema $\mathbf{G(z) = C(zI-A)^{-1}B+D}$. Tale rapporto è un rapporto tra polinomi in z e si noti che, come per i sistemi a tempo continuo, il grado del numeratore non può superare quello del denominatore.

Inoltre, mentre il guadagno di un sistema a tempo continuo si trova valutando la funzione di trasferimento in s=0, i guadagno di un sistema a tempo discreto è dato dalla funzione di trasferimento Zeta valutata per z=1

$$\mu = G(z)|_{z=1}$$

✦stabilità

Considerato un punto di equilibrio x̲ dello stato del sistema corrispondente all'ingresso costante u̲, si considera il movimento perturbato, cioè l'andamento $x_P()$ dello stato associato al medesimo ingresso u̲ e allo stato iniziale $\underline{x}+\partial x_0$. Si confronta questo andamento con lo stato x̲. Se, per perturbazioni sufficientemente piccole $x_P()$ non diverge rispetto a x̲, allora si dice che il punto di equilibrio x̲ è **stabile**. Se poi la differenza tra $x_P()$ e x̲() tende a zero, allora si dice che x̲ è **asintoticamente stabile**.

Analizzando l'andamento della variazione $[x_P(t) - \underline{x}]$ dello stato perturbato rispetto al punto di equilibrio $\underline{x}$, alla luce della formula di Lagrange a tempo discreto, tale variazione è data da $[x_P(t) - \underline{x}]=A^{(t-t_0)}\partial x_0$. In generale tale differenza tende a zero se *tutti gli autovalori della matrice A hanno modulo minore di 1*, a tempo discreto quindi la r**egione di stabilità** è l'interno del cerchio di raggio 1.
I poli della funzione di trasferimento del sistema coincidono (a meno di cancellazione) con gli autovalori di A. Perciò la stabilità può essere analizzata a partire dallo studio dei poli, richiedendo che tutti i poli siano interni alla regione di stabilità nel piano complesso. Per stabilire se un polinomio del tipo $\alpha_0 s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\alpha_2 s^{n-2}+\ldots+\alpha_n$ ha tutte le sue radici di modulo minore di 1 si può effettuare in più modi:

1. **criterio di Routh-Hurwitz per segnali a tempo discreto**

Per poter applicare questo criterio ai segnali a tempo discreto occorre operare una trasformazione nel piano complesso per ricondurre l'interno del cerchio di raggio 1 (regione di stabilità richiesta a tempo discreto) nel semipiano sinistro (regione di stabilità richiesta a tempo continuo), tale trasformazione è nota come *trasformazione bi-lineare*

$$z=\frac{(s+1)}{(s-1)}$$

2. **criterio di Ruzicka**

Come per il criterio di Routh-Hurwitz, richiede la costruzione preliminare di una tabella ricavata a partire dai coefficienti del polinomio assegnato.:

- la prima riga è costituita dai coefficienti del polinomio $a_1\ a_2 \ldots a_{n-1}\ a_n$
- la seconda riga dei medesimi coefficienti in ordini inverso $a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1$
- la terza riga contiene n-1 coefficienti $h_o\ h_1\ldots h_{n-1}\ h_n$ e la matrice di cui si calcola il determinante sono costituite da: la prima colonna è la colonna delle due righe soprastanti, mentre la seconda colonna è costituita dall'ultima colonna delle righe soprastanti per h_o della penultima per h_1 e così via

$$h_o=\frac{1}{\alpha_o}\det\begin{bmatrix}\alpha_o & \alpha_n\\ \alpha_n & \alpha_o\end{bmatrix}=\alpha_o-\frac{\alpha_n}{\alpha_o}\alpha_n \qquad h_1=\frac{1}{\alpha_o}\det\begin{bmatrix}\alpha_o & \alpha_{n-1}\\ \alpha_n & \alpha_1\end{bmatrix}=\alpha_1-\frac{\alpha_n}{\alpha_o}\alpha_{n-1}$$

- la quarta riga è ottenuta dalla terza in ordine inverso
- la quinta riga è costituita da n-2 elementi costruita col medesimo principio della terza

$$k_o=\frac{1}{h_o}\det\begin{bmatrix}h_o & h_{n-1}\\ h_{n-1} & h_o\end{bmatrix}=h_o-\frac{h_{n-1}}{h_o}h_{n-1}$$

- la sesta riga è costituita da questi stessi elementi ma in ordine inverso
- e così via…

La tabella è conclusa quando si arriva a (n+1)-esima riga diretta. Le radici del polinomio hanno tutte modulo minore di 1 se i primi elementi delle righe dirette sono non nulli ed hanno lo stesso segno.

✦risposta a scalino e risposta impulsiva

La **risposta a scalino** è semplice da trovare, siccome ottengo Y(z)=G(z)U(z) dove U(z) è lo trasformata Zeta dello scalino che è nota da qui posso applicare il teorema del valore finale e ottengo $y(\infty)=\mu\underline{u}$.
Inoltre la funzione di trasferimento Zeta può essere vista come la trasformata della **risposta impulsiva** del sistema siccome Z[imp(t)] =1. La risposta impulsiva è data dalla sequenza dei parametri di Markov:

$$y(t)=\begin{cases} D & t=0\\ CA^{t-1}B & t>0\end{cases}$$

✦risposta in frequenza

Se ho un ingresso sinusoidale di pulsazione ω, il **teorema della risposta in frequenza** asserisce che, supplendo che nessun autovalore di A coincida con il punto $e^{j\omega}$ della circonferenza di raggio 1 del piano complesso allora vi è una e una sola scelta della condizione iniziale x(0) per cui, a fronte dell'ingresso u(t)=Usen(ωt+∂) l'uscita è data ancora da un segnale sinusoidale con la stessa ω del tipo y(t)=Ysen(ωt+ß) con:

$$\begin{cases} Y= & U\,|G(e^{j\omega})|\\ \beta=\alpha+\gamma\ con & \gamma=faseG(e^{j\omega})\end{cases}$$

Se il sistema è stabile allora, qualunque sia lo stato iniziale del sistema, l'uscita tende al segnale sinusoidale. Se la sinusoide in ingresso diventa molto lenta, se cioè ω è vicina allo zero, allora Y—>μU dove μ=|G(e^{j0})| è proprio il guadagno del sistema.

✦diagrammi polari e diagrammi di Nyquist

Il **diagramma polare** è ottenuto come luogo dei punti di $G(e^{j\omega})$ al variare di ω, a tempo discreto esso è dato da g(z) per z che descrive la semicirconferenza di raggio 1 nel piano complesso che giace nel I e II quadrante. Si noti che a tempo discreto la pulsazioni non va ad ∞ ma al più a π.

Si definisce **diagramma di Nyquist** il diagramma ottenuto cmd luogo dei punti di G(z) per z che descrive l'intera circonferenza di raggio 1 nel piano complesso. Siccome $G(e^{j\omega})$ è il complesso coniugato di $G(e^{-j\omega})$ anche in questo caso, come nel caso continuo, il diagramma di Nyquist si ottiene complementando il diagramma polare col il diagramma che si ottiene dal diagramma polare stesso ribaltandolo rispetto all'asse reale.

✦sistemi interconnessi

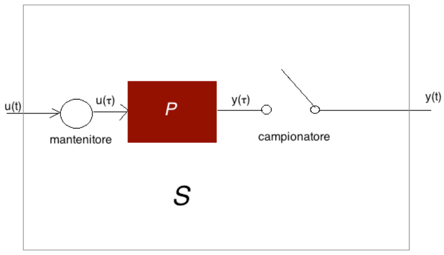
Anche a tempo discreto si definiscono le interconnessioni in cascata, parallelo e retroazione. Le regole per i calcolo della funzione di trasferimento Zeta sono le medesime di quelle viste proprio per i sistemi a tempo continuo.

Sistemi a Segnali Campionati

I. campionamento e mantenimento di segnali

SI dispone all'uscita del sistema a tempo continuo un convertitore analogico/digitale che genera un segnale ottenuto da tale uscita per campionamento ad intervalli di durata Δ. Questo convertitore prende il nome di **campionature a cadenza uniforme**. L'uscita a tempo discreto a t è il valore dell'uscita a tempo τ=tΔ, dove Δ è l'*intervallo di campionamento*. Avendo indicato con y il segnale a tempo continuo e con *y* il segnale campionato, si ha:

$$y(t)=y(\tau)|_{\text{con }\tau=t\Delta}$$



conversione di un sistema a tempo continuo P in un sistema a tempo discreto S

All'ingresso la trasformazione che ha luogo richiede una conversione analogico/digitale, di norma tale conversione viene effettuata nel seguente modo (il segnale in ingresso di P è costante a tratti, per intervalli di durata Δ):

$$u(\tau)=u(t) \qquad \text{per } t\Delta \le \tau < (t+1)\Delta$$

Il dispositivo che compie tale conversione viene denominato **mantenitore** e il sistema complessivo prende il nome di **sistema a segnali campionati**.

II. dal sistema analogico al sistema digitale

$$\begin{cases} x'(\tau) = Fx(\tau) + Gu(\tau) \\ y(\tau) = Hx(\tau) + Ku(\tau) \end{cases}$$

partendo da tale sistema lineare e prendendo come condizione iniziale il valore x(tΔ) dello stato, si può applicare la formula di Lagrange all'intervallo tΔ e (t+1Δ)

$$\downarrow$$

$$x((t+1)\Delta) = e^{F[(t+1)\Delta - t\Delta]}x(t\Delta) + \int_{t\Delta}^{(t+1)\Delta} e^{F[(t+1)\Delta-\tau]}Gu(\tau)d\tau$$

ma u(τ) è costante tra tΔe (t+1Δ) e può essere portato fuori dall'integrale (u(t)=u(τ)), inoltre è utile definire un nuovo vettore stato: x(t)=x(tΔ)

$$\downarrow$$

$$x(t+1) = e^{F\Delta}x(t) + \left[\int_{t\Delta}^{(t+1)\Delta} e^{F[(t+1)\Delta-\tau]}Gd\tau\right]u(t)$$

a questo punta è utile applicare un cambio di variabile

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \sigma = \quad -(t\Delta-\tau) \\ d\sigma = \quad d\tau \\ (t+1)\Delta - \tau \ = \Delta - \sigma \\ \tau = t\Delta \ \dashrightarrow \ \sigma = 0 \\ \tau=(t+1)\Delta \dashrightarrow \sigma = \Delta \end{cases} \text{----->} \ x(t+1)=e^{F\Delta}x(t)+\left[\int_0^{\Delta} e^{F(\Delta-\sigma)}Gd\sigma\right]u(t)$$

a questo punto posso risolvere il sistema, trovando anche l'uscita y

Essendo y(t)=y(tΔ)=Hx(tΔ)+Ku(tΔ) e sostituendo con il vettore stato definito poco fa ottengo:

$$s: \begin{cases} x(t+1) = Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) = \ Hx(t)+Ku(t) \end{cases}$$

con A e B le matrici rispettivamente calcolate in precedenza!

Dunque il sistema a segnali campionati S è anch'esso lineare. Il suo vettore di stato x(t) è niente altro che lo stato del sistema a tempo continuo P valutato al tempo τ=tΔ. Dunque il numero di variabili di stato di S è identico a quello del sistema di partenza P.

III. la trasformazione del campionamento

In base a quanto visto, la matrice dinamica A del sistema a tempo discreto S si ottiene da quella a tempo continuo F di P con la regola $A=e^{F\Delta}$; ora l'esponenziale di una matrice ha una proprietà notevole, vale a dire che gli autovalori sono dati fagli esponenziali degli autovalori della matrice esponente:

$$\lambda_i[A] = e^{\Delta\lambda_i[F]}$$

Inoltre alla luce della regola secondo cui si trasformano gli autovalori del sistema nel passaggio dal tempo continuo al tempo discreto, viene naturale introdurre la trasformazione $z=e^{\Delta s}$ che prende il nome di **trasformazione del campionamento**. Essa pone dunque in corrispondenza il piano commesso s (del tempo continuo) con il piano complesso z (del tempo discreto): s=0 —> $z=e^{\Delta 0}=1$

Quindi facendo qualche calcolo si può notare che il tratto di asse immaginario compreso tra 0 e $j\pi/\Delta$ nel piano s diviene la semicirconferenza superiore di raggio 1 nel piano z, invece per ottenere nel piano z la semicirconferenza inferiore basta passare nel piano s dal punto 0 al punto $-j\pi/\Delta$.

Una retta parallela all'asse immaginario nel piano s, ossia l'insieme di punti $\sigma+j\omega$ con σ costante e ω variabile da più a meno infinito. Questa retta si trasforma nell'insieme $e^{(\sigma+j\omega)\Delta}=pe^{j\omega\Delta}$ con $p=e^{\sigma\Delta}$.

Dunque una **retta parallela all'asse immaginario nel piano s diviene una circonferenza nel piano z**. Il raggio p di questa circonferenza è minore di 1 se $\sigma<0$ cioè se la retta nel piano s giace nel semipiano sinistro, e maggiore di 1 se $\sigma>0$ e cioè se la retta giace nel semipiano destro del piano s.

Se ora nel piano s si considerano linee orizzontali, cioè del tipo $\sigma+j\omega$ con ω costante e σ variabile, in seguito alla trasformazione di campionamento si ha: $e^{(\sigma+j\omega)\Delta)}=\beta e^{\sigma\Delta}$ con $\beta=e^{j\omega\Delta}$. Perciò al variare di σ si ottiene nel piano z una semiretta che passa per il punto $e^{j\omega\Delta}$. Precisamente la semiretta nel piano s nel semipiano sinistro si trasforma nel segmento che congiunge l'origine al punto $e^{j\omega\Delta}$ del piano z, mentre la semiretta del piano s nel semipiano destro si trasforma nel tratto della congiungente l'origine al punto $e^{j\omega\Delta}$ al di là di questo punto. Inoltre per σ—> ∞ nel piano s allora nel piano z si gente all'origine. Particolare attenzione merita il caso $j\omega=0$ quando cioè la retta orizzontale del piano s diviene l'asse reale, in tal caso $e^{\sigma+j\omega}=e^{\sigma}$. Quindi l'asse reale negativo si trasforma nel segmento dell'asse reale nel piano z compreso tra -1 (quando σ—> -∞) e +1 (quando σ —> + ∞) mentre l'asse reale positivo diviene nel piano z la parte restante dell'asse reale.

Analizziamo infine il posizionamento dei poli del sistema a segnali campionati quando l'intervallo di campionamento diviene molto piccolo o molto grande:

- per Δ—> 0 i poli del sistema a segnali campionati migrano tutti nel medesimo punto del piano z, precisamente nel punto 1
- per Δ—> ∞ i poli del sistema a segnali campionati migrano tutti nel medesimo punto del piano z, ovvero nell'origine

IV. stabilità dei sistemi a segnali campionati

Ad un polo di P con parte reale minore di zero corrisponde un polo di S di modulo minore di 1, mentre se il polo di P sta nel semipiano destro allora il polo corrispondente di S è esterno al cerchio di raggio 1. Pertanto se il sistema P è stabile anche il sistema a segnali campionati S lo è, viceversa se P è instabile anche S lo è.

V. guadagno, poli & zeri

Il guadagno rimane immutato, infatti esso non è nient'altro che il rapporto tra il valore a regine dell'uscita ed il valore dell'ingresso quando al sistema sia stata applicata una sollecitazione a scalino.

Mentre il numero dei poli di S coincide con il numero dei poli di P, una simile coincidenza non sussiste per gli zeri. Supponiamo che é sia un sistema stabile di ordine n.

Per **Δ—> ∞** sappiamo che tutti gli n poli di S migrano verso l'origine del piano complesso, ma sempre per Δ—> ∞ P è soggetto a un ingresso costante per un intervallo di tempo elevato, di conseguenza la sua uscita tende al valore di regine della risposta allo scalino. Di conseguenza il sistema S si comporta come un puro guadagno: $y(t+1)=\mu u(t)$. Questo è un sistema con funzione di trasferimento Zeta data da μ/z, con un unico polo nell'origine, allora visto che S ha n poli che tendono all'origine devono esserci n-1 zeri anch'essi collocati nell'origine, in modo da cancellare n-1 poli e lasciarne uno solo.

Per **Δ—> 0** il campionamento diventa fittissimo e così l'unica dinamica di P che ha rilievo è quella d'alta frequenza. Se si pensa alla risposta in frequenza di P l'unica parte che avrà rilevanza è quella associata a ω elevate. a la risposta in frequenza si ottiene dalla funzione di trasferimento ponendo $s=j\omega$. In conclusione ciò che conta della funzione di trasferimento è la parte corrispondente a s—> ∞. Indicando con r il grado relativo della funzione di trasferimento, ossia la differenza tra il grado del suo denominatore e quello del suo numeratore si ha che per Δ—> 0, P può essere semplicemente modellato mediante funzione di trasferimento $1/s^r$. Per determinare la collocazione degli zeri in questo caso basterà dunque valutare la funzione di trasferimento del sistema a segnali campionati con questa funzione di trasferimento.