

# C.Morosi

## Meccanica Razionale A

Note integrative al corso

a.a. 2009-2010

### Indice

1. Moto rigido piano.
2. Distribuzione delle accelerazioni.
3. Equazioni cardinali.
4. Analisi delle forze applicate al corpo rigido.
5. Centro di forze parallele e baricentro.
6. Moto rigido piano: calcolo delle quantità meccaniche.
7. Relazione simbolica della dinamica.
8. Principio dei lavori virtuali.
9. Sollecitazione conservativa e potenziale.
10. Principio di d'Alembert.

Appendice. L'oscillatore armonico

©2003 C. Morosi. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore; pertanto, essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto.

# 1 Moto rigido piano.

Si parla di *moto rigido piano* se le velocità dei punti del c.r. sono tutte parallele ad un piano fisso (detto *piano direttore del moto*).

Il moto rigido piano è ad esempio quello di una lamina piana che si muove in un piano fisso, ma può appartenere anche ad un generico corpo tridimensionale in moto attorno ad una asse fisso. Dalla proprietà di rigidità segue che il moto rigido piano è determinato se è noto il moto di un qualunque piano del c.r. parallelo al piano direttore, cioè nel caso di un corpo con asse fisso se è noto il moto di una sua sezione ortogonale all'asse. Per questo faremo riferimento nel seguito ad un corpo bidimensionale in moto nel piano  $XY$  di un riferimento cartesiano fisso  $(O; X, Y, Z)$ . Naturalmente, le proprietà del moto rigido piano sono deducibili come caso particolare dall'analisi generale dell'atto di moto rigido fatta precedentemente, ma qui dedurremo direttamente i risultati che ci interessano.

Consideriamo un generico punto  $A$  del c.r. ed una terna cartesiana ortogonale destra  $(A; x, y, z)$  solidale al corpo, scegliendo  $x, y$  nel piano del corpo, per cui gli assi  $z$  e  $Z$  coincidono e quindi

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{K} \quad \text{indipendente dal tempo ;} \quad (1.1)$$

chiamiamo poi *angolo di rotazione del c.r.* l'angolo che una direzione solidale con il c.r. forma con una direzione fissa: ad esempio possiamo assumere come angolo di rotazione l'angolo  $\alpha$  che l'asse  $x$  forma con l'asse fisso  $X$  (*misurato dall'asse fisso  $X$  verso l'asse mobile  $x$* ).

I versori  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  degli assi  $x$  e  $y$  della terna solidale hanno allora la seguente rappresentazione cartesiana rispetto alla terna fissa:

$$\mathbf{i}(t) = \cos \alpha(t) \mathbf{I} + \sin \alpha(t) \mathbf{J} , \quad \mathbf{j}(t) = -\sin \alpha(t) \mathbf{I} + \cos \alpha(t) \mathbf{J} . \quad (1.2)$$

Chiamiamo *velocità angolare* del c.r. il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  così definito

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha} \mathbf{K} = \dot{\alpha} \mathbf{k} . \quad (1.3)$$

Pertanto *nel moto rigido piano  $\boldsymbol{\omega}$  ha direzione costante, e misura la variazione nel tempo dell'angolo di rotazione* <sup>(1)</sup>.

Scelto un secondo punto  $B$  del c.r., vale allora il seguente fondamentale risultato.

**1.1 Teorema.** *Le velocità  $\mathbf{v}_A$  e  $\mathbf{v}_B$  di una qualunque coppia di punti  $A$  e  $B$  del c.r. e la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  sono legati dalla relazione*

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A) .$$

**Dimostrazione.** Dalla rappresentazione cartesiana (1.2) dei versori della terna mobile e dalla definizione (1.3) di velocità angolare è immediato verificare che

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j} \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>Val la pena di ricordare che, nelle applicazioni, l'angolo di rotazione può essere scelto anche nel verso opposto a quello naturale associato agli assi cartesiani, per cui in generale è  $\boldsymbol{\omega} = \pm \dot{\alpha} \mathbf{k} = \pm \dot{\alpha} \mathbf{K}$ . Ricordiamo ancora che, se  $\boldsymbol{\omega}$  è ortogonale al piano e  $\mathbf{u}$  è un qualunque vettore nel piano, l'operazione  $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$  dà luogo ad un vettore ancora nel piano, ortogonale ad  $\mathbf{u}$  e di modulo  $|\dot{\alpha}|u$ ; il verso è quello ("orario" o "antiorario") indotto dal verso scelto per l'angolo di rotazione. L'operazione  $\boldsymbol{\omega} \wedge \cdot$  è quindi l'operazione di rotazione piana di un angolo di  $\pi/2$ .

(mentre è ovviamente  $d\mathbf{k}/dt = 0$ ). Consideriamo allora il vettore  $B - A$ , che dà la posizione di  $B$  rispetto ad  $A$ ; rappresentando tale vettore sulla terna solidale al c.r., di origine  $A$ , abbiamo

$$B - A = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \quad (1.5)$$

dove  $a$  e  $b$  sono le coordinate di  $B$  nella terna solidale, che sono *costanti* per la proprietà di rigidità. Abbiamo allora che

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A &= \frac{d(B - O)}{dt} - \frac{d(A - O)}{dt} = \frac{d(B - A)}{dt} \stackrel{(1.5)}{=} a \frac{d\mathbf{i}}{dt} + b \frac{d\mathbf{j}}{dt} \\ &\stackrel{(1.4)}{=} a\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} + b\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \wedge (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \stackrel{(1.5)}{=} \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A). \quad \square \end{aligned}$$

Pertanto in base al teorema ora dimostrato se sono note la velocità angolare e la velocità di un punto  $A$ , la velocità di ogni altro punto del c.r. è data da

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A); \quad (1.6)$$

viceversa, date le velocità di due punti, la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{K}$  è data da

$$\omega = \frac{|\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A|}{AB}.$$

Analizziamo più in dettaglio le proprietà dell'atto di moto rigido piano che discendono dalla (1.6). Ricordiamo anzitutto che l'atto di moto rigido si dice **traslatorio** se tutti i punti hanno ugual velocità, **rotatorio** se esiste almeno un punto con velocità nulla.

In effetti, si può dimostrare che l'atto di moto rigido piano si riduce sempre ad uno di questi due casi. Supponiamo infatti che in un dato istante sia  $\boldsymbol{\omega} = 0$ ; segue allora dalla (1.6) che tutti i punti hanno uguale velocità e quindi, per quanto detto, l'atto di moto è traslatorio; viceversa, se tutti i punti hanno ugual velocità dalla (1.6) segue che

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (B - A) = 0 \quad \forall A, B$$

per cui, per l'arbitrarietà del vettore  $(B - A)$ , deve essere  $\boldsymbol{\omega} = 0$ . In conclusione, abbiamo il seguente risultato.

**1.2 Teorema.** *L'atto di moto è traslatorio se e solo se  $\boldsymbol{\omega} = 0$ .*

Se invece  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ , l'atto di moto è rotatorio, in forza del seguente risultato.

**1.3 Teorema (Eulero).** *L'atto di moto rigido piano non traslatorio è rotatorio.*

**Dimostrazione.** Supponiamo che l'atto di moto non sia traslatorio, e quindi che  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ ; ci chiediamo se esiste un punto  $C$  con velocità nulla: per la (1.6), il punto  $C$  deve essere soluzione dell'equazione

$$\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (C - A) = 0. \quad (1.7)$$

Rappresentando i vettori sulla terna fissa abbiamo

$$\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (C - A) = v_{Ax} \mathbf{I} + v_{Ay} \mathbf{J} + \omega \mathbf{K} \wedge ((X_C - X_A)\mathbf{I} + (Y_C - Y_A)\mathbf{J})$$

$$= (v_{Ax} - \omega(Y_C - Y_A)) \mathbf{I} + (v_{Ay} + \omega(X_C - X_A)) \mathbf{J} ;$$

segue allora che la (1.7) ha una e una sola soluzione  $C$ , di coordinate

$$X_C = X_A - \frac{v_{Ay}}{\omega} , \quad Y_C = Y_A + \frac{v_{Ax}}{\omega} . \quad \square \quad (1.8)$$

Il punto con velocità nulla la cui esistenza è garantita dal teorema di Eulero è detto *centro di istantanea rotazione* (lo indicheremo spesso nel seguito con *C.I.R.*).

Se è noto il *C.I.R.*, la velocità di ogni altro punto del c.r. può quindi calcolarsi con la formula

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - C) ;$$

da tale formula segue ovviamente che  $\mathbf{v}_P$  è nel piano del moto e più in particolare che :

- (a)  $\mathbf{v}_P$  è perpendicolare al vettore  $(P - C)$
- (b) la retta per  $P$  e il *C.I.R.* è perpendicolare a  $\mathbf{v}_P$  ,
- (c)  $v_P = \omega r \quad r = \overline{PC}$  .

Si ha quindi che il modulo della velocità di ogni punto  $P$  cresce linearmente con la distanza  $r$  di  $P$  dal *C.I.R.* (diagramma triangolare delle velocità).

Nelle applicazioni, può essere utile determinare il *C.I.R.* senza dover prima calcolare il moto; ciò si può fare in tre casi:

- (i) se esiste un punto fisso  $O$ , esso è evidentemente il *C.I.R.*
- (ii) se sono note le direzioni, non parallele, delle velocità  $\mathbf{v}_A$  e  $\mathbf{v}_B$  di due punti  $A$  e  $B$ , segue dalla proprietà (b) prima enunciata che il *C.I.R.* è il punto di intersezione tra le perpendicolari a  $\mathbf{v}_A$  e  $\mathbf{v}_B$  condotte per  $A$  e  $B$  (teorema di Chasles).
- (iii) se il c.r. rotola senza strisciare su una guida fissa, il punto di contatto del c.r. con la guida è il *C.I.R.*

Se la posizione del *C.I.R.* non è nota, le velocità dei punti del c.r. si possono comunque calcolare tramite la formula generale (1.6), cioè partendo da un punto di cui sia agevole calcolare la velocità.

**Osservazione.** In generale, la posizione del *C.I.R.* varia nel tempo; *rispetto all'osservatore fisso, il luogo descritto dal C.I.R. è detto la base del moto; lo stesso luogo, scritto in una terna solidale al c.r., è detto la rulletta.*

Si dimostra che base e rulletta hanno in comune un punto e la tangente (contatto del secondo ordine), per cui il moto della rulletta è un moto di puro rotolamento sulla base.

[Per dimostrare che base e rulletta hanno tangente comune, siano  $A$  un generico punto del c.r., con velocità  $\mathbf{v}_A$  all'istante  $t$ , e  $(A; x, y)$  un riferimento cartesiano solidale al c.r., con versori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  . Sia  $C = C(t)$  un punto che si muove sulla base: la sua velocità  $\mathbf{v}_C$  dà la direzione della tangente alla base. Il punto  $C$  ha nel riferimento solidale coordinate  $(x, y)$  e velocità  $\mathbf{v}_r = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j}$ , che dà la direzione della tangente alla rulletta. Abbiamo allora la rappresentazione

$$C(t) - A(t) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} ,$$

da cui derivando

$$\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (C - A) ,$$

essendo  $\omega$  la velocità angolare del c.r. all'istante  $t$ . D'altra parte poiché  $A$  appartiene al corpo rigido e l'atto di moto all'istante  $t$  è rotatorio attorno ad un punto  $C'$  che coincide con il punto  $C(t)$  della base è anche

$$\mathbf{v}_A = \omega \wedge (A - C') = \omega \wedge (A - C) ;$$

confrontando allora le due espressioni precedenti otteniamo che  $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_r$ : poiché come detto la direzione dei due vettori è quella della tangente alla base e alla rulletta, le due curve hanno quindi la stessa tangente.]

Ad esempio, nel caso di puro rotolamento su una guida fissa, la guida è la base del moto, il profilo del c.r. la rulletta.

Le equazioni parametriche (in funzione del parametro  $t$ ) della base sono ovviamente date dalla (1.8); considerando invece una terna solidale al c.r. di origine in  $A$ , rispetto alla quale le coordinate di  $C$  sono  $(x_C, y_C)$ , alla curva (1.8) corrisponde la curva (rulletta) di equazioni parametriche

$$x_C = -\frac{v_{Ax}}{\omega} \sin \alpha - \frac{v_{Ay}}{\omega} \cos \alpha , \quad y_C = -\frac{v_{Ax}}{\omega} \cos \alpha + \frac{v_{Ay}}{\omega} \sin \alpha , \quad (1.9)$$

essendo  $\alpha$  l'angolo di rotazione del c.r. ( $\omega = \pm \dot{\alpha}$ ).

## 2 Distribuzione delle accelerazioni.

Dalla formula fondamentale dell'atto di moto rigido  $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A)$ , derivata rispetto al tempo, segue che le accelerazioni di due punti  $A$  e  $B$  del c.r. sono legate dalla relazione  $\mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (B - A) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$  per cui, esprimendo ancora le velocità tramite la formula fondamentale, si ha

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (B - A) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (B - A)) . \quad (2.1)$$

Utilizzando l'identità del doppio prodotto vettore

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}$$

(con  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{c} = (B - A)$ ), la (2.1) può allora scriversi nella forma equivalente

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (B - A) - \omega^2 (B - A) + ((B - A) \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} . \quad (2.2)$$

### Accelerazioni nel moto rigido piano.

Nel caso di una lamina piana in moto nel proprio piano, l'ultimo termine della (2.2) è identicamente nullo, per cui, ponendo  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{K}$  e  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega} \mathbf{K}$ , segue che

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\omega} \mathbf{K} \wedge (B - A) - \omega^2 (B - A) . \quad (2.3)$$

In stretta analogia con l'interpretazione dell'atto di moto rigido  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A)$  come rototraslatorio, possiamo analizzare tale relazione dicendo che *nel caso piano* l'accelerazione di un generico punto  $B$  è ottenibile componendo l'accelerazione di un punto  $A$ , arbitrariamente scelto, con l'accelerazione che  $B$  avrebbe nell'atto di moto rotatorio attorno ad  $A$ , data dal secondo e terzo termine nella (2.3) (rispettivamente, l'accelerazione tangenziale e l'accelerazione centripeta).

Sempre nel caso piano, si dimostra infine che esiste (ed è unico) un punto  $C_a$  (*centro delle accelerazioni*), che ha accelerazione nulla. A tal fine, poniamo nella (2.3)  $B = C_a$  e  $\mathbf{a}_B = 0$ ; proiettando l'equazione vettoriale così ottenuta lungo le due direzioni ortogonali di  $\mathbf{a}_A$  e  $\mathbf{K} \wedge \mathbf{a}_A$ , otteniamo che la posizione del centro delle accelerazioni rispetto ad  $A$  è data da

$$C_a - A = \frac{\omega^2}{\dot{\omega}^2 + \omega^4} \mathbf{a}_A + \frac{\dot{\omega}}{\dot{\omega}^2 + \omega^4} \mathbf{K} \wedge \mathbf{a}_A .$$

In generale, il centro delle accelerazioni  $C_a$  non coincide con il *C.I.R.*

### 3 Equazioni cardinali.

Questa è una breve sintesi delle equazioni che, secondo l'impostazione della meccanica newtoniana (o vettoriale), caratterizzano il moto e l'equilibrio del punto materiale, del corpo rigido e dei sistemi di corpi rigidi liberi o tra loro vincolati (sistemi articolati); tali sistemi si possono formalmente analizzare come insiemi di punti (schema particellare) o come insiemi di corpi continui. In effetti, lo schema formale e concettuale adottato nella formulazione delle equazioni di seguito descritte viene mantenuto anche per formulare le equazioni di moto e di equilibrio dei *continui deformabili*.

Lo scopo di questa sintesi è solo di fissare alcune notazioni e definizioni: si rimanda ai testi per la loro deduzione a partire dalle leggi di Newton e per una trattazione più completa.

- Rispetto ad un osservatore inerziale, le equazioni di moto e di equilibrio di un punto materiale  $P$  sono date da

$$\mathbf{F} + \mathbf{\Phi} = m\mathbf{a} , \quad \mathbf{F} + \mathbf{\Phi} = 0 \quad (3.1)$$

dove  $m$  è la massa del punto,  $\mathbf{F}$  è la forza attiva applicata,  $\mathbf{\Phi}$  la reazione vincolare, cioè la forza esercitata dal vincolo cui è eventualmente soggetto il punto. Rispetto ad un osservatore non inerziale, la prima equazione continua a valere annoverando tra le forze  $\mathbf{F}$  anche la forza apparente di trascinamento e la forza di Coriolis, la seconda vale ancora aggiungendo a  $\mathbf{F}$  la forza apparente di trascinamento (la forza di Coriolis essendo identicamente nulla in condizioni di equilibrio relativo).

Nota la forza  $\mathbf{F}$ , le equazioni (3.1) contengono come incognite la posizione  $P$  del punto e la reazione vincolare  $\mathbf{\Phi}$ . Se quindi il punto è vincolato (ad una linea o ad una superficie) ed il problema è quello di determinare il moto o l'equilibrio, si deve pervenire ad *equazioni pure* (contenenti cioè la sola posizione), eliminando la reazione vincolare  $\mathbf{\Phi}$ .

- Consideriamo un sistema esteso, visto come un insieme di punti materiali  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) o come un continuo che occupa un volume  $\tau \subset \mathbf{R}^3$ . Dalle (3.1) scritte per ogni punto  $P_i$  o per ogni elemento continuo di massa  $dm = \rho d\tau$  ( $\rho$  densità materiale del sistema) si perviene, tenendo conto del principio di azione e reazione (come conseguenza del quale il risultante ed il momento risultante delle forze interne in un qualunque sistema meccanico sono identicamente nulli), alle seguenti equazioni, che hanno una validità del tutto generale e che sono dette le *Equazioni cardinali della dinamica e della statica*:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R} + \mathbf{R}' , \quad \mathbf{R} + \mathbf{R}' = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} + \mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}'_0 , \quad \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}'_0 = 0 . \quad (3.3)$$

Il punto  $O$  è generico; se  $O$  è fisso, oppure coincide con il centro di massa  $G$ , oppure se  $\mathbf{v}_0$  è parallelo alla velocità  $\mathbf{v}_G$  del centro di massa, si ha  $\mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{Q} = 0$ , per cui la prima delle (3.3) assume la forma semplificata

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}'_0 .$$

- Le (3.2) sono ottenute sommando le equazioni (3.1) scritte per tutti i punti del sistema: sono dette rispettivamente il *teorema della quantità di moto* e l'*equazione del risultante*. In tali equazioni:

$\mathbf{Q}$  è la *quantità di moto*, definita come la somma vettoriale delle quantità di moto dei singoli punti o come l'integrale della quantità di moto infinitesima  $\mathbf{v} dm = \rho \mathbf{v} d\tau$  associata ad un elemento di massa  $dm$

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{Q} = \int_m \mathbf{v} dm = \int_{\tau} \mathbf{v} \rho d\tau; \quad (3.4)$$

$\mathbf{R}$  e  $\mathbf{R}'$  sono rispettivamente il *Risultante delle forze esterne* attive e reattive applicate al sistema, cioè delle azioni sui punti del sistema dovuti all'interazione con elementi che non fanno parte del sistema stesso (come già ricordato, il risultante delle forze interne attive e reattive è identicamente nullo per ogni sistema meccanico, per il principio di azione e reazione); per un sistema di punti si ha

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{R}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{\Phi}_i. \quad (3.5)$$

• Le (3.3) sono ottenute moltiplicando vettorialmente per  $(P_i - O)$  l'equazione di moto (o di equilibrio) per il generico punto  $P_i$  e sommando le equazioni così ottenute su tutti i punti del sistema: esse sono dette rispettivamente il *teorema del momento delle quantità di moto* e l'*equazione del momento*. In tali equazioni:

$\mathbf{K}_0$  è il *momento delle quantità di moto* (o *momento angolare*) rispetto ad un punto  $O$  (di velocità  $\mathbf{v}_0$ ), definito come la somma vettoriale dei momenti delle quantità di moto dei singoli punti o come l'integrale del momento della quantità di moto infinitesima  $(P-O) \wedge \mathbf{v} dm = (P-O) \wedge \rho \mathbf{v} d\tau$  associata ad un elemento di massa  $dm$

$$\mathbf{K}_0 = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{K}_0 = \int_m (P - O) \wedge \mathbf{v} dm = \int_{\tau} (P - O) \wedge \mathbf{v} \rho d\tau; \quad (3.6)$$

$\mathbf{M}_0$  e  $\mathbf{M}'_0$  sono rispettivamente il *Momento risultante* delle forze esterne attive e reattive applicate al sistema, rispetto allo stesso punto  $O$  (il momento risultante delle forze interne attive e reattive è identicamente nullo per ogni sistema meccanico, per il principio di azione e reazione); per un sistema di punti si ha:

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{M}'_0 = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \mathbf{\Phi}_i. \quad (3.7)$$

• Oltre a queste equazioni, in dinamica è utile considerare una ulteriore equazione (identicamente soddisfatta nel caso statico), nella quale intervengono però tutte le forze presenti nel sistema, non solo quelle esterne; moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{v}_i$  l'equazione di moto per il generico punto  $P_i$  e sommando sui punti del sistema si ottiene il teorema dell'energia cinetica

$$\frac{dT}{dt} = \Pi; \quad (3.8)$$

$T$  è l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2, \quad T = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho v^2 d\tau, \quad (3.9)$$

$\Pi$  è la potenza complessiva delle forze applicate al sistema (attive e reattive, sia esterne che interne), definita per un sistema di punti da:

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i \quad (3.10)$$

essendo  $\mathbf{f}_i$  la forza complessiva (attiva e reattiva) applicata al punto  $P_i$ .

Val la pena di ricordare che mentre le forze interne hanno risultante e momento nulli, la potenza (e il lavoro) delle forze interne è in generale diversa da 0; se però l'atto di moto è rigido anche la potenza delle forze interne è nulla. Questo risultato segue immediatamente osservando che per un qualunque sistema di forze  $\mathbf{f}_i$  applicate ai punti  $P_i$  le cui velocità siano date dalla formula  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - A)$  dell'atto di moto rigido la potenza è data da

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - A)) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_A + \mathbf{M}_A \cdot \boldsymbol{\omega}; \quad (3.11)$$

se in particolare le forze sono quelle interne, è poi  $\mathbf{R} = 0$ ,  $\mathbf{M}_A = 0$ , e quindi  $\Pi^{int.} = 0$ .

• Una interessante conseguenza del teorema dell'energia cinetica segue dalle ipotesi:

(i) vincoli bilateri e fissi,

(ii) tutti i vincoli (esterni ed interni) non dissipativi,

(iii) forze attive (esterne e interne) agenti sul sistema posizionali e conservative: esiste cioè una funzione  $U$  della configurazione del sistema (detta il potenziale della sollecitazione attiva) per cui  $\Pi^{att.} = dU/dt$ .

Dalle prime due ipotesi segue che la potenza delle reazioni vincolari è nulla, per cui il teorema dell'energia cinetica fornisce un'equazione pura di moto:  $dT/dt = \Pi^{att.}$ ; dall'ipotesi (iii) segue allora che  $dT/dt = \Pi^{att.} = dU/dt$ , da cui si deduce che durante il moto si ha la *conservazione dell'energia meccanica*

$$T - U = E .$$

**Osservazioni.** Le equazioni cardinali consentono di studiare il moto o l'equilibrio di ogni sistema meccanico, senza limitazioni sul tipo di forze applicate e sul tipo di vincoli, esterni ed interni, cui il sistema è sottoposto. In particolare consentono di determinare, oltre al moto o all'equilibrio, le reazioni vincolari applicate al sistema in condizioni dinamiche o statiche, problema quest'ultimo di notevole interesse in molti problemi applicativi.

Occorre però fare alcune osservazioni sull'uso di tali equazioni.

(i) Le equazioni cardinali sono due equazioni vettoriali, corrispondenti a sei equazioni scalari (e a tre equazioni scalari nel caso piano). Osserviamo che formalmente si possono scrivere infinite equazioni, cambiando il polo rispetto a cui scrivere la seconda equazione cardinale; si dimostra però che una volta soddisfatta la prima equazione cardinale e la seconda rispetto ad un polo  $O$ , l'equazione cardinale che si ottiene scegliendo un diverso polo  $A$  è identicamente soddisfatta dalla soluzione delle prime due; pertanto in statica per un intero sistema non si possono scrivere più di sei equazioni indipendenti, in dinamica si hanno al più (introducendo anche il teorema dell'energia cinetica) sette equazioni indipendenti. Tali equazioni sono condizioni *necessarie* del moto o dell'equilibrio del sistema, ma *non sono in generale sufficienti*, se non per un singolo corpo

*rigido*. Se si vuole pervenire ad un numero sufficiente di equazioni, occorre quindi applicare tali equazioni anche ai sottosistemi che si possono ottenere analizzando separatamente alcune parti (tipicamente, per un sistema articolato, composto da un numero finito di corpi rigidi tra loro vincolati, si possono considerare come sottosistemi i singoli corpi rigidi).

In linea di principio, quindi, per un sistema di corpi rigidi e di punti materiali scrivendo le equazioni cardinali per il sistema e per le sue parti si perviene ad un numero sufficiente di equazioni che consentono di determinare il moto o l'equilibrio. Occorre però notare che, quando si considera un sottosistema, nelle equazioni relative ad esso compaiono generalmente come forze esterne delle nuove incognite, date dalle reazioni vincolari interne al sistema complessivo, che diventano esterne per il sottosistema che si considera, e che rappresentano le forze che le parti del sistema si scambiano tra loro. Tali forze sono incognite, e le loro proprietà dipendono dalla natura dei vincoli tra le parti del sistema.

Se il sistema è composto da più parti e non si fa una scelta oculata dei sottosistemi e delle equazioni, ci si può trovare quindi a dover analizzare un numero elevato di equazioni anche per sistemi con pochi gradi di libertà.

Come semplice esempio di tale situazione generale, ricordiamo il caso ben noto di un sistema biella-manovella, costituito da un'asta  $OA$  incernierata in  $O$  (manovella) e da un'asta  $AB$  (biella) collegata alla prima nella cerniera  $A$  e con l'estremo  $B$  vincolato con un carrello, che supponiamo liscio, all'esterno. Tale sistema ha un grado di libertà; per determinarne l'equilibrio, note le forze attive applicate, si hanno a disposizione sei equazioni, ad esempio tre equazioni per l'intero sistema e tre per la biella  $AB$ , nelle sei incognite rappresentate, oltre che dalla coordinata libera, dalle due reazioni vincolari nella cerniera fissa  $O$ , dalla reazione nel carrello  $B$  e dalle due reazioni interne tra biella e manovella nella cerniera  $A$  (supponiamo che i vincoli siano ideali (non dissipativi)). Come noto, la scelta più opportuna è quella di scrivere l'equazione  $\mathbf{M}_0 = 0$  per il sistema, e l'equazione  $\mathbf{M}_A = 0$  per la sola biella  $AB$ , avendo così un sistema di due equazioni nelle due incognite date dalla coordinata libera e dalla reazione vincolare nel carrello.

**(ii)** In base alle osservazioni precedenti, se lo scopo è quello di determinare il moto o l'equilibrio del sistema, senza calcolare anche le reazioni vincolari, l'uso delle equazioni cardinali presenta quindi due tipi di difficoltà: occorre pervenire ad equazioni pure nelle sole incognite di configurazione (coordinate libere) eliminando le reazioni vincolari dal sistema di equazioni cardinali che si sono scritte, e determinare un numero di equazioni pure indipendenti in numero pari ai gradi di libertà del sistema.

**(iii)** Come detto, le equazioni cardinali non forniscono un metodo generale per eliminare le reazioni vincolari e scegliere in maniera ottimale il numero di equazioni pure sufficienti a risolvere il problema del moto o dell'equilibrio. Semplificando, e un po' riduttivamente, si può vedere la *Meccanica Analitica* come una formulazione del problema dell'equilibrio e del moto che è sostanzialmente equivalente all'impostazione newtoniana, ma che consente di scrivere direttamente delle equazioni pure di moto o di equilibrio in numero uguale al numero di gradi di libertà del sistema, eliminando a priori l'introduzione delle reazioni vincolari. In effetti, per raggiungere tale scopo occorre restringere la classe di sistemi che si analizzano, ponendo delle restrizioni sul tipo di vincoli introdotti (semplificando, si perde la possibilità di analizzare quei sistemi in cui è presente il fenomeno dell'attrito, retto ad esempio dal modello di Coulomb). Anche se quindi la meccanica analitica ha una minor generalità della meccanica vettoriale ora schematizzata, tuttavia la classe di sistemi considerata è ancora molto generale.  $\diamond$

## 4 Analisi delle forze applicate al corpo rigido.

Dato un qualunque sistema meccanico, per ora non necessariamente rigido, indichiamo con  $\mathcal{S}$  una sollecitazione ad esso applicata, data da un insieme  $(\mathbf{F}_i, P_i)$  di forze  $\mathbf{F}_i$  con punti di applicazione  $P_i$ .

Il *risultante* e il *momento* della sollecitazione sono i vettori

$$\mathbf{R} := \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{M}_A := \sum_{i=1}^n (P_i - A) \wedge \mathbf{F}_i, \quad (4.1)$$

essendo  $A$  un punto generico. Da tali definizioni segue poi che per il momento sussiste la formula di trasporto al variare del polo

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + (A - B) \wedge \mathbf{R}; \quad (4.2)$$

in particolare, se una sollecitazione ha risultante nullo il momento è quindi indipendente dal polo.

Moltiplicando scalarmente ambo i membri della (4.2) per  $\mathbf{R}$  segue che il prodotto scalare di risultante e momento è uguale per tutti i punti, per cui introduciamo l'*invariante scalare* della sollecitazione

$$I := \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}; \quad (4.3)$$

se esiste un punto rispetto a cui il momento si annulla, deve essere  $I = 0$  e, viceversa, se  $I \neq 0$  non può esistere alcun punto rispetto a cui il momento si annulla.

Poiché la forza è un vettore applicato, ovvero è una grandezza caratterizzata da un vettore  $\mathbf{F}$  e da un punto di applicazione, l'equilibrio e il moto di qualunque sistema non sono alterati se più forze applicate nello stesso punto sono sostituite dalla loro somma vettoriale o, viceversa, se una forza  $\mathbf{F}$  applicata in un punto viene sostituita con più forze, applicate nello stesso punto, aventi  $\mathbf{F}$  come loro somma (*prima operazione invariantiva, o di composizione*).

### Sollecitazioni sul c.r. e loro equipollenza.

Nel caso del c.r., si postula per le forze la seguente ulteriore proprietà. Data una forza  $\mathbf{F}$  applicata in un punto, definiamo *retta di applicazione* della forza la retta passante per il punto ed avente la direzione di  $\mathbf{F}$ . Si postula allora che l'equilibrio ed il moto del c.r. rimangano inalterati se una forza  $\mathbf{F}$  viene sostituita da una forza data ancora dal vettore  $\mathbf{F}$ , ma applicata in un diverso punto della retta di applicazione, cioè, intuitivamente, se si fa scorrere la forza lungo la sua retta di applicazione (*seconda operazione invariantiva, o di scorrimento*).

Queste considerazioni si riassumono nel seguente postulato.

**Postulato.** *La forza applicata ad un c.r. è una grandezza descritta da un vettore e da una retta di applicazione, ovvero la forza è un cursore.*

**Osservazione.** A rigore, un vettore applicato ed un cursore andrebbero indicati rispettivamente con le coppie ordinate  $(\mathbf{F}; P)$  e  $(\mathbf{F}; r)$ , essendo  $\mathbf{F}$  il vettore,  $P$  e  $r$  il punto e la retta di applicazione; per maggior semplicità di scrittura, continueremo, quando chiaro dal contesto, ad indicare la forza sul corpo rigido con la sola parte vettoriale  $\mathbf{F}$ , precisando a parole punto o retta di applicazione.  $\diamond$

In base al postulato ora enunciato, è naturale introdurre la seguente definizione.

**4.1 Definizione.** Una sollecitazione  $\mathcal{S} = \{\mathbf{F}_i, r_i\}$  è equipollente ad una sollecitazione  $\mathcal{S}' = \{\mathbf{F}'_i, r'_i\}$ :  $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$  se le forze di  $\mathcal{S}$  si possono trasformare in quelle di  $\mathcal{S}'$  con una successione di operazioni invariantive.

**Osservazione.** Dalla definizione segue immediatamente che  $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$  implica  $\mathcal{S}' \sim \mathcal{S}$ , ed infine che  $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$  e  $\mathcal{S}' \sim \mathcal{S}''$  implica  $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}''$  (proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva). L'equipollenza di sollecitazioni gode quindi della proprietà di equivalenza, per cui in seguito parleremo direttamente di *sollecitazioni equivalenti*.  $\diamond$

L'importanza di tale definizione è evidente: se  $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$ , possiamo dedurre qualunque informazione sull'equilibrio o sul moto del c.r. utilizzando le forze della sollecitazione  $\mathcal{S}'$  invece che quelle di  $\mathcal{S}$ , se tale sostituzione semplifica l'analisi del problema in esame (come vedremo, questa è ad esempio la ragione per cui per un c.r. si può parlare di un'unica forza peso, applicata in un punto opportuno, piuttosto che del sistema di forze peso distribuite nel c.r.).

#### Coppia di forze.

Per analizzare una sollecitazione sfruttando la nozione di equivalenza è utile introdurre la seguente definizione.

**Definizione.** Una coppia di forze è una sollecitazione costituita da due forze  $(\mathbf{F}, A)$  e  $(-\mathbf{F}, B)$  uguali ed opposte, senza la stessa retta di applicazione.

Per quanto detto, una coppia di forze, che indicheremo con  $C(F; A, B)$ , è quindi una sollecitazione con  $\mathbf{R} = 0$  e  $\mathbf{M} = (A - B) \wedge \mathbf{F}$  indipendente dal polo, in base alla (4.2); utilizzando la seconda operazione invariantiva, possiamo poi scegliere  $A$  e  $B$  in modo che il vettore  $(A - B)$  sia ortogonale alla direzione di  $\mathbf{F}$ .

La distanza  $b$  delle rette di applicazione delle due forze costituenti la coppia si dice il *braccio* della coppia, il piano individuato dalle due rette di applicazione, ortogonale al momento  $\mathbf{M}$ , è detto il piano della coppia; si ha ovviamente  $M = F b$ .

**Osservazioni.** Due importanti proprietà delle sollecitazioni sul c.r., che seguono dall'introduzione della nozione di coppia di forze, sono le seguenti.

(i) In base alla definizione ora introdotta, è immediato constatare che la sollecitazione costituita da una forza  $(\mathbf{F}, A)$  applicata in  $A$  è equivalente alla sollecitazione data da una forza  $(\mathbf{F}, B)$  applicata in un punto  $B$  non appartenente alla retta di applicazione di  $(\mathbf{F}, A)$  e ad una coppia  $C(F; A, B)$  di momento  $\mathbf{M} = (A - B) \wedge \mathbf{F}$  (basta aggiungere in  $B$  il sistema nullo costituito dalle forze  $(\mathbf{F}, B)$  e  $(-\mathbf{F}, B)$ ); questa è la "regola di trasporto" di una forza sul c.r. da un punto ad un altro punto esterno alla sua retta di applicazione.

(ii) Consideriamo due coppie di forze

$$C(F; A, B) \text{ con } \mathbf{M} = (A - B) \wedge \mathbf{F}, \quad C'(F'; A', B') \text{ con } \mathbf{M}' = (A' - B') \wedge \mathbf{F}' ;$$

la sollecitazione costituita dalle quattro forze ha evidentemente risultante nullo, e momento indipendente dal polo dato da

$$\mathbf{M}'' = \mathbf{M} + \mathbf{M}' .$$

Vale il seguente risultato.

**4.2 Teorema.** *La sollecitazione data da due coppie di momenti  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{M}'$  è equivalente ad una coppia, il cui momento è la somma vettoriale  $\mathbf{M}'' = \mathbf{M} + \mathbf{M}'$  dei momenti delle due coppie.*

**Dimostrazione.** Basta far vedere che esistono un vettore  $\Phi$  ed un punto  $X$  tali che

$$(A - X) \wedge \Phi = \mathbf{M}'' , \quad (4.4)$$

per cui si ha una coppia  $C(\Phi; A, X)$ . Questo si può fare in infiniti modi; scelto infatti un qualunque vettore  $\Phi$  che soddisfi la condizione di ortogonalità con il momento  $\mathbf{M}''$

$$\Phi \cdot \mathbf{M}'' = 0 , \quad (4.5)$$

il punto  $X$  soluzione della (4.4) è dato da

$$X - A = \frac{\mathbf{M}'' \wedge \Phi}{\Phi^2} , \quad (4.6)$$

come segue da

$$(A - X) \wedge \Phi \stackrel{(4.6)}{=} -\frac{\mathbf{M}'' \wedge \Phi}{\Phi^2} \wedge \Phi = \frac{1}{\Phi^2} (\Phi \cdot \Phi) \mathbf{M}'' - \frac{1}{\Phi^2} (\mathbf{M}'' \cdot \Phi) \Phi \stackrel{(4.5)}{=} \mathbf{M}''$$

(dove si è utilizzata l'identità del doppio prodotto vettore  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}$  con  $\mathbf{a} = \mathbf{M}''$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \Phi$ ).  $\square$

#### Condizione caratteristica di equivalenza.

Torniamo ora alla equivalenza di sollecitazioni applicate al c.r.: perchè tale nozione sia operativamente efficace, è necessario avere un criterio che permetta di determinare agevolmente l'equivalenza. Consideriamo allora una sollecitazione  $\mathcal{S}$ , di risultante  $\mathbf{R}$  e di momento  $\mathbf{M}_O$ , ed una seconda sollecitazione  $\mathcal{S}'$ , di risultante  $\mathbf{R}'$  e momento  $\mathbf{M}'_O$ : vale il seguente fondamentale risultato.

**4.3 Teorema.** *Due sollecitazioni  $\mathcal{S}$  ed  $\mathcal{S}'$  sono equivalenti se e solo se hanno ugual risultante ed ugual momento rispetto ad uno stesso punto.*

**Dimostrazione.** Che l'uguaglianza di risultante e momento sia condizione necessaria di equivalenza è ovvio, poichè le operazioni invariantive di composizione e scorrimento non alterano risultante e momento (la somma di momenti di forze applicate nello stesso punto è il momento della somma delle forze; facendo scorrere una forza lungo la sua retta di applicazione il braccio della forza rimane invariato).

Che la condizione sia sufficiente segue essenzialmente dalle proprietà precedentemente dimostrate sul trasporto di una forza da un punto ad un altro e sulla somma di coppie di forze.

Consideriamo la sollecitazione  $\mathcal{S}$ ; ogni forza  $(\mathbf{F}_i; P_i)$  può essere trasformata in una forza  $(\mathbf{F}_i; A)$ , con  $A$  arbitrariamente scelto, aggiungendo una coppia di momento  $(P_i - A) \wedge \mathbf{F}_i$ . In tal modo, possiamo sostituire alla sollecitazione  $\mathcal{S}$  la sollecitazione  $\bar{\mathcal{S}} \sim \mathcal{S}$  ottenuta sommando tutte le forze  $(\mathbf{F}_i; A)$ , di risultante  $\mathbf{R}$ , e sommando tutte le coppie, ottenendo quindi  $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i (P_i - A) \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_A$ . Siamo quindi passati da  $\mathcal{S}$  ad una sollecitazione equivalente  $\bar{\mathcal{S}}$  data dalla forza  $(\mathbf{R}; A)$  e dalla coppia di momento  $\mathbf{M}$ .

Operando allo stesso modo sulla seconda sollecitazione  $\mathcal{S}'$  otteniamo una sollecitazione equivalente  $\bar{\mathcal{S}}' \sim \mathcal{S}'$ , data da una forza  $(\mathbf{R}'; A)$  e da una coppia di momento  $\mathbf{M}'$ . Ma poichè per ipotesi è  $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$  e  $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}'_A$ , segue che  $\bar{\mathcal{S}} \sim \bar{\mathcal{S}}'$ , e per la proprietà transitiva è  $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$ .  $\square$

**Analisi della sollecitazione in base a  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{M}$ .**

In base al teorema ora dimostrato, una sollecitazione applicata al c.r. è completamente caratterizzata dai due vettori  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{M}$ , indipendentemente dal numero e dalle caratteristiche delle singole forze che contribuiscono alla sollecitazione complessiva. Una sollecitazione applicata al corpo rigido può quindi ridursi a quattro classi, in base alle proprietà del risultante e del momento <sup>(2)</sup>. Le prime due corrispondono a sollecitazioni con  $\mathbf{R} = 0$ , le altre due a sollecitazioni con  $\mathbf{R} \neq 0$ . Incominciamo ad analizzare sollecitazioni con  $\mathbf{R} = 0$ , e quindi con momento indipendente dal polo.

**I. Sollecitazione nulla.** È data da un sistema di forze con  $\mathbf{R} = 0$  e  $\mathbf{M} = 0$ .

Tale sollecitazione corrisponde all'assenza di forze; si dice anche che tale sollecitazione è *equilibrata*, per il seguente motivo. Se esiste una configurazione in cui la sollecitazione applicata ad un c.r. verifica le equazioni cardinali della Statica:  $\mathbf{R} = 0$ ,  $\mathbf{M} = 0$ , in tale configurazione la sollecitazione è equivalente all'assenza di forze; è allora naturale ammettere che se il c.r. è fermo in tale configurazione esso vi permanga indefinitamente, e quindi che tale configurazione sia di equilibrio <sup>(3)</sup>. Pertanto introduciamo il seguente postulato:

**Postulato.** *Le equazioni cardinali della Statica, che sono condizioni necessarie di equilibrio per ogni sistema meccanico, nel caso del c.r. sono anche condizioni sufficienti di equilibrio.*

**II. Sollecitazione equivalente ad una coppia.** È un sistema con  $\mathbf{R} = 0$  e  $\mathbf{M} \neq 0$ .

Per quanto già detto, il più semplice sistema con tali caratteristiche è proprio la coppia di forze. Si tratta di una sollecitazione particolarmente semplice da utilizzare, non dando contributo al risultante  $\mathbf{R}$  e contribuendo al momento totale con un termine  $\mathbf{M}$  che non dipende dal polo rispetto al quale il momento totale è calcolato; in particolare quindi nello scrivere le equazioni cardinali non è possibile scegliere il polo in modo da annullare il momento della coppia.

Consideriamo infine il caso di sollecitazione con  $\mathbf{R} \neq 0$ ; vale allora il seguente risultato.

**4.4 Teorema.** *Se  $\mathbf{R} \neq 0$ , esiste un asse (detto asse centrale), di equazione*

$$P(\lambda) - A = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_A}{R^2} + \lambda \mathbf{R} \quad (4.7)$$

*(essendo  $A$  un punto qualunque), rispetto ai cui punti il momento è dato da*

$$\mathbf{M}_{P(\lambda)} = \frac{I}{R} \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (4.8)$$

*ed è quindi diretto come  $\mathbf{R}$ , di modulo  $I/R$  ed uguale per tutti i punti dell'asse.*

<sup>2</sup>Una data sollecitazione è quindi caratterizzata da un campo di vettori  $\mathbf{M}$ , che variano al variare del punto secondo la relazione (4.2), con  $\mathbf{R}$  indipendente dal punto; val la pena di osservare che la (4.2) è formalmente analoga alla formula dell'atto di moto rigido  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A) = \mathbf{v}_A + (A - B) \wedge \boldsymbol{\omega}$ , per cui i risultati relativi all'analisi delle forze si possono dedurre dai risultati sull'atto di moto rigido sostituendo  $\mathbf{v}$  con  $\mathbf{M}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  con  $\mathbf{R}$ ; tale analogia è puramente formale, basata sul fatto che i vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{M}$  variano al variare del punto con la stessa formula del trasporto, e non corrisponde ovviamente ad alcuna analogia meccanica tra le grandezze cinematiche  $\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}$  e dinamiche  $\mathbf{R}, \mathbf{M}$ .

<sup>3</sup>Se invece le condizioni iniziali non sono di quiete, all'assenza di forze può corrispondere un moto, genericamente accelerato, che dipende dalle condizioni iniziali e dalla distribuzione di inerzia del corpo.

**Dimostrazione.** Dalla formula (4.2) di trasporto dei momenti si ottiene

$$\mathbf{M}_{P(\lambda)} = \mathbf{M}_A + (A - P(\lambda)) \wedge \mathbf{R} \stackrel{(4.7)}{=} \mathbf{M}_A - \left( \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_A}{R^2} + \lambda \mathbf{R} \right) \wedge \mathbf{R} = \mathbf{M}_A - \frac{1}{R^2} (\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_A) \wedge \mathbf{R} .$$

Il risultato (4.8) segue allora immediatamente applicando l'identità del doppio prodotto vettore  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}$  con  $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{M}_A$ , e ricordando che  $\mathbf{M}_A \cdot \mathbf{R} = I$ .  $\square$

**Osservazione.** L'asse centrale è univocamente determinato, indipendentemente dalla scelta del punto  $A$ . Si veda l'analoga osservazione a proposito dell'univocità dell'asse di Mozzi nella cinematica del corpo rigido.  $\diamond$

In base a tale teorema, le sollecitazioni con  $\mathbf{R} \neq 0$  si possono suddividere in due classi.

**III. Sollecitazione equivalente ad una sola forza.** È un sistema con  $\mathbf{R} \neq 0$  e  $I = 0$ .

Poichè in tal caso segue dalla (4.8) che il momento rispetto ai punti dell'asse centrale è nullo, la sollecitazione è equivalente ad una sola forza, di vettore  $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ , applicata lungo i punti dell'asse centrale (che in questo caso prende il nome di *retta di applicazione del risultante*).

**IV. Sollecitazione non riducibile ad una forza.** È un sistema con  $\mathbf{R} \neq 0$  e  $I \neq 0$ .

In tal caso, la sollecitazione più semplice equivalente a quella data è costituita da una forza, di vettore  $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ , applicata lungo i punti dell'asse centrale (che in tal caso prende il nome di *asse di minimo momento*) e da una coppia di momento diretto come l'asse e di modulo  $I/R$ .

Che il momento rispetto ai punti dell'asse sia minimo segue dal fatto che se consideriamo la forza  $\mathbf{R}$  applicata non lungo l'asse, ma esternamente ad esso a distanza  $h$ , ad esempio in un punto  $B$ , la coppia che occorre aggiungere per avere una sollecitazione equivalente ha momento di modulo maggiore, dato da  $M = \sqrt{(I/R)^2 + h^2 R^2}$ , come segue dalla formula di trasporto dei momenti  $\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_{P(\lambda)} + (P(\lambda) - B) \wedge \mathbf{R}$ .

In conclusione, *la più generale sollecitazione applicata al c.r. è equivalente ad una forza e ad una coppia; in particolare, se  $I = 0$  si ha una sola forza, se  $\mathbf{R} = 0$  si ha una sola coppia, se  $I = 0$  e  $\mathbf{R} = 0$  si ha il sistema nullo (assenza di forze).*

**Tre casi notevoli di sollecitazioni riducibili ad una forza.**

Presentiamo tre esempi di sollecitazioni, che supponiamo con  $\mathbf{R} \neq 0$ , che hanno  $I = 0$ , e che quindi ammettono retta di applicazione del risultante; si tratta rispettivamente delle forze centrali, piane e parallele.

(i) Siano applicate al c.r. delle forze **centrali**, le cui rette di applicazione passano tutte per un punto  $O$ . Per quanto detto, ciò è equivalente a dire che tutte le forze sono applicate in  $O$ ; il momento  $\mathbf{M}_O$  è quindi nullo, per cui  $I = 0$ . Il sistema di forze centrali è quindi equivalente al risultante  $\mathbf{R}$  applicato in  $O$ : esempi di tali forze sono le forze gravitazionali e le forze elettrostatiche.

(ii) Consideriamo una sollecitazione in cui le forze siano **piane**. Se i vettori  $\mathbf{F}_i$  appartengono al piano  $xy$  di un riferimento assegnato,  $\mathbf{R}$  appartiene allo stesso piano; rispetto ad un generico punto del piano, i momenti delle singole forze sono ortogonali al piano, e quindi lo è anche il momento complessivo  $\mathbf{M}$ , per cui è  $I = 0$ .

(iii) Consideriamo infine una sollecitazione  $\mathcal{S}$  costituita da forze **parallele**, date cioè da vettori  $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{k}$ , dove  $\mathbf{k}$  è il versore di una direzione assegnata, uguale per tutte le forze  $\mathbf{F}_i$ , e  $F_i$  sono

le componenti delle forze lungo tale direzione (non è detto che le componenti  $F_i$  siano tutte dello stesso segno, ma supponiamo che  $R = \sum_i F_i \neq 0$ ): pertanto si ha  $\mathbf{R} = R \mathbf{k}$ . Il momento di ogni forza essendo perpendicolare a  $\mathbf{k}$ , lo è anche il momento totale, per cui  $I = 0$ .

## 5 Centro di forze parallele e Baricentro.

Le forze parallele applicate al c.r. ammettono una ulteriore importante proprietà. Consideriamo invece di una sollecitazione parallela  $\mathcal{S}$ , con  $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{k}$ , una qualunque altra sollecitazione  $\mathcal{S}'$ , costituita da forze ancora parallele  $\mathbf{F}'_i = F_i \mathbf{k}'$  (che potremmo pensare ottenuta da  $\mathcal{S}$  ruotando dello stesso angolo la direzione delle forze senza alterarne le componenti  $F_i$ ) e che quindi ammette una retta di applicazione del risultante diretta come  $\mathbf{k}'$ .

Si dimostra allora che al variare della direzione delle forze, e mantenendo invariate le loro componenti  $F_i$ , le rette di applicazione del risultante ammettono un punto in comune (e costituiscono quindi una stella di rette); esiste cioè un (unico) punto, detto il **centro** del sistema di forze parallele (indicato nel seguito con  $G$ ), che appartiene alla retta di applicazione del risultante indipendentemente dalla direzione delle forze. Nel caso particolare in cui la sollecitazione parallela è data dalle forze peso  $\mathbf{p}_i = p_i \mathbf{k}$ , il centro delle forze peso è chiamato il *baricentro del c.r.*

**5.1 Teorema.** *Sia dato un sistema di forze parallele  $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{k}$  con  $R = \sum_i F_i \neq 0$ . Allora:*  
(i) *esiste ed è unico un punto  $G$  per cui*

$$\sum_i F_i (P_i - G) = 0 ; \quad (5.1)$$

*rispetto ad un punto arbitrario  $O$ , la posizione di  $G$  è data da*

$$G - O := \frac{\sum_i F_i (P_i - O)}{R} ; \quad (5.2)$$

(ii) *il punto  $G$  è il centro delle forze parallele.*

**Dimostrazione.** (i) L'unicità di  $G$  segue immediatamente dalla proprietà (5.1); infatti se esistesse un secondo punto  $G'$  per cui  $\sum_i F_i (P_i - G') = 0$ , sottraendo tale relazione dalla (5.1) si avrebbe  $\sum_i F_i (G' - G) = R (G' - G) = 0$ , da cui  $G' = G$  essendo  $R \neq 0$  per ipotesi. Che il punto  $G$  sia dato dalla (5.2) è evidente; scrivendo  $(P_i - G) = (P_i - O) - (G - O)$  abbiamo infatti

$$\sum_i F_i (P_i - G) = \sum_i F_i (P_i - O) - \sum_i F_i (G - O) \stackrel{(5.2)}{=} R (G - O) - R (G - O) = 0 .$$

(ii) Per verificare che  $G$  così definito sia il centro della stella di rette, osserviamo dalla definizione (5.2) che  $G$  non dipende dalla particolare direzione  $\mathbf{k}$  delle forze parallele, ma solo dalle loro componenti  $F_i$ ; pertanto ogni sua proprietà è indipendente dalla direzione. Se dimostriamo allora che il momento  $\mathbf{M}_G$  del sistema di forze è nullo,  $G$  appartiene alla retta di applicazione del risultante qualunque sia la direzione  $\mathbf{k}$  delle forze parallele, e quindi è il centro; in effetti questo segue immediatamente dalla proprietà (5.1):

$$\mathbf{M}_G = \sum_i (P_i - G) \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i (F_i (P_i - G)) \wedge \mathbf{k} \stackrel{(5.1)}{=} 0. \quad \square$$

**Osservazioni.**

(i) Nel caso particolare delle forze peso si ha  $\mathbf{p}_i = p_i \mathbf{k} = m_i g \mathbf{k}$ , dove  $g$  è l'accelerazione di gravità, uguale per tutti i punti,  $m_i$  è la massa dell' $i$ -esimo punto  $P_i$  e  $\mathbf{k}$  è la direzione della verticale, volta verso il basso; segue allora, semplificando per  $g$  al numeratore e al denominatore della (5.2), che il *baricentro del c.r. coincide con il suo centro di massa*:

$$G - O = \frac{\sum_i p_i (P_i - O)}{p} = \frac{\sum_i m_i (P_i - O)}{m},$$

essendo  $p$  e  $m$  il peso e la massa totali del corpo (ricordiamo però che il centro di massa esiste per ogni distribuzione di massa ed indipendentemente dalla presenza di forze peso, mentre il baricentro esiste solo per un corpo rigido in un campo di forze peso).

(ii) Quanto detto nel caso di un sistema di forze applicate in punti  $P_i$  vale naturalmente nel caso di forze distribuite con continuità, sostituendo formalmente alle somme sui punti gli integrali sul dominio (volume, superficie o linea per c.r. tri, bi e monodimensionali), e alle forze  $\mathbf{F}_i$  le forze  $d\mathbf{f} = \mathbf{F}d\tau$  relative al volume infinitesimo  $d\tau$ , essendo  $\mathbf{F}$  la forza specifica. Il centro  $G$  delle forze è allora dato da

$$G - O = \frac{\int (P - O) df}{R} = \frac{\int_{\tau} (P - O) F d\tau}{R} \quad (R = \int df = \int_{\tau} F d\tau). \quad (5.3)$$

Nel caso particolare del baricentro, si ha così

$$G - O = \frac{\int (P - O) dp}{R} = \frac{\int_{\tau} (P - O) k d\tau}{p} = \frac{\int_{\tau} (P - O) \varrho d\tau}{m} \quad (5.4)$$

dove  $p = \int dp = \int_{\tau} k d\tau = \int_{\tau} \varrho g d\tau$  e  $m = \int_{\tau} \varrho d\tau$ , con  $k$  e  $\varrho$  peso specifico e densità.

Proiettando la relazione vettoriale (5.4) sugli assi cartesiani si ottengono le componenti cartesiane del centro delle forze:

$$x_G = \frac{\int x df}{R} = \frac{\int_{\tau} x F d\tau}{R}, \quad y_G = \frac{\int y df}{R} = \frac{\int_{\tau} y F d\tau}{R}, \quad z_G = \frac{\int z df}{R} = \frac{\int_{\tau} z F d\tau}{R}.$$

(iii) La proprietà (5.1) definisce intrinsecamente il centro delle forze, indipendentemente dalla scelta del punto  $O$  rispetto al quale calcolare la posizione di  $G$ ; tale proprietà è molto importante, perchè la scelta di un punto per il quale la somma  $\sum_i F_i (P_i - G)$  si annulla consente utili semplificazioni nel calcolo di alcune quantità meccaniche; passando a componenti cartesiane ortogonali, ed adottando la descrizione continua, la proprietà  $\int (P - G) dm = \int_{\tau} (P - G) \varrho d\tau = 0$  implica ad esempio, scegliendo un riferimento con origine in  $G$ , che

$$\int_{\tau} x \varrho(x, y, z) d\tau = 0, \quad \int_{\tau} y \varrho(x, y, z) d\tau = 0, \quad \int_{\tau} z \varrho(x, y, z) d\tau = 0. \quad \diamond$$

## 6 Moto rigido piano: calcolo delle quantità meccaniche.

In vista delle applicazioni alla dinamica del c.r. e dei sistemi di c.r., qui di seguito diamo una breve sintesi (senza dimostrazioni) delle formule per il calcolo delle quantità meccaniche  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $T$  per un c.r. che si muove in un piano fisso e quindi, per il teorema di Eulero, con atto di moto o traslatorio o rotatorio, con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  di direzione costante.

Ricordiamo inoltre che  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $T$  sono lineari nella distribuzione di massa, per cui *le quantità meccaniche per un sistema di corpi rigidi si possono calcolare come la somma delle quantità corrispondenti ad ogni corpo rigido del sistema.*

### Il calcolo di $\mathbf{Q}$ , $\mathbf{K}$ , $T$ .

Consideriamo un c.r. bidimensionale in moto nel piano  $(O; X, Y)$ ; indichiamo con  $m$  la sua massa, con  $G$  il suo baricentro e con  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta} \mathbf{k}$  la velocità angolare, essendo  $\vartheta$  l'angolo di rotazione del corpo. Applicando a questa situazione particolare le definizioni generali delle quantità meccaniche  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{K}$  e  $T$  si ottengono le seguenti *regole di calcolo*.

- La *quantità di moto*  $\mathbf{Q}$  si può facilmente calcolare come

$$\mathbf{Q} = m \mathbf{v}_G \quad (4).$$

- Consideriamo il *momento delle quantità di moto*  $\mathbf{K}$ .

(i) Se l'atto di moto è traslatorio, il momento della quantità di moto rispetto ad un generico punto  $A$  si può calcolare come il momento del vettore quantità di moto  $\mathbf{Q}$  pensato applicato nel baricentro  $G$ , cioè

$$\mathbf{K}_A = (G - A) \wedge \mathbf{Q} = (G - A) \wedge m \mathbf{v}_G .$$

In particolare quindi *nell'atto di moto traslatorio il momento delle quantità di moto rispetto al baricentro è nullo:  $\mathbf{K}_G = 0$ .*

(ii) Se l'atto di moto è rotatorio, e se il corpo rigido *appartiene ad un piano fisso  $\pi$  ed è in moto nel piano stesso:*

(a) rispetto al baricentro  $G$  e rispetto al C.I.R.  $C$  si ha

$$\mathbf{K}_G = I_G \boldsymbol{\omega} \Rightarrow K_G = I_G \dot{\vartheta}, \quad \mathbf{K}_C = I_C \boldsymbol{\omega} \Rightarrow K_C = I_C \dot{\vartheta},$$

dove  $I_G$  e  $I_C$  sono il momento di inerzia del c.r. rispetto all'asse ortogonale al piano per  $G$  e  $C$  rispettivamente (in breve, il momento di inerzia rispetto a  $G$  e  $C$ );

---

<sup>4</sup>Questo risultato è *del tutto generale*, e vale per ogni distribuzione di massa e per ogni atto di moto, anche non rigido, se  $G$  è il centro di massa del sistema (che come noto nel caso di un c.r. coincide con il baricentro). Ricordando infatti che la velocità  $\mathbf{v}_i$  di un generico punto è la derivata del vettore posizione:  $\mathbf{v}_i = d(P_i - O)/dt$  e che dalla definizione di centro di massa  $G$  segue che  $\sum_i m_i (P_i - O) = m(G - O)$ , otteniamo

$$\mathbf{Q} = \sum_I m_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i (P_i - O) = \frac{d}{dt} m (G - O) = m \mathbf{v}_G .$$

(b) se  $A$  è un punto qualunque del c.r. ( $A \neq G, A \neq C$ ), il momento delle quantità di moto non è più direttamente proporzionale a  $\boldsymbol{\omega}$  e si calcola con la formula del trasporto, per cui

$$\mathbf{K}_A = \mathbf{K}_G + (G - A) \wedge m\mathbf{v}_G = I_G\boldsymbol{\omega} + (G - A) \wedge m\mathbf{v}_G ,$$

oppure

$$\mathbf{K}_A = \mathbf{K}_C + (C - A) \wedge m\mathbf{v}_G = I_C\boldsymbol{\omega} + (C - A) \wedge m\mathbf{v}_G .$$

• Per il calcolo dell'energia cinetica si hanno questi risultati:

(i) se l'atto di moto è traslatorio con velocità  $\mathbf{v}$ :

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

(ii) se  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$  ed è noto il C.I.R.  $C$ :

$$T = \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{2}I_C\dot{\vartheta}^2$$

(iii) se non è noto il C.I.R.,  $T$  può calcolarsi mediante la formula (*Teorema di König*)

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\vartheta}^2 .$$

**Osservazione.** Dalla definizione generale di momento di inerzia segue che per un c.r. piano, di densità  $\rho$ , massa  $m$  e superficie  $\sigma$ , il momento di inerzia rispetto ad un punto  $A$  (cioè il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per  $A$  ed ortogonale al piano contenente il corpo) è dato da

$$I_A = \int_m r^2 dm = \int_\sigma r^2 \rho d\sigma$$

essendo  $r$  la distanza dell'elemento di massa  $dm = \rho d\sigma$  da  $A$  (naturalmente, se il c.r. è un tratto di curva piana, l'integrale doppio va sostituito con l'integrale di linea). Se il punto  $A$  è un punto del c.r., il momento d'inerzia  $I_A$  è costante, se  $A$  non è solidale al c.r.  $I_A$  è in generale funzione del tempo.

Nel calcolo dei momenti di inerzia può essere utile ricordare la seguente proprietà (che segue dal cosiddetto *teorema del trasporto (di Huyghens)*)

$$I_A = I_G + m\overline{AG}^2$$

che lega il momento di inerzia rispetto ad un generico punto  $A$  al momento di inerzia baricentrale  $I_G$ : da essa segue anche che il momento di inerzia rispetto al baricentro è il minimo tra tutti gli altri momenti di inerzia calcolati rispetto ai punti del piano.  $\diamond$

## 7 Relazione simbolica della dinamica.

Consideriamo un generico sistema meccanico, che schematizziamo come un sistema di  $N$  punti materiali  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), di massa  $m_i$ ; indichiamo con  $\mathbf{F}_i$  e con  $\Phi_i$  le forze attive e reattive applicate ai punti  $P_i$ , con  $\delta P_i$  gli spostamenti virtuali dei punti  $P_i$  <sup>(5)</sup>.

In meccanica analitica si considerano sistemi soggetti a vincoli non dissipativi, per i quali si introduce il seguente postulato.

**Postulato.** *Per un qualunque sistema meccanico soggetto a vincoli non dissipativi, sia in condizioni di equilibrio che in condizioni di moto il lavoro virtuale complessivo delle reazioni vincolari (esterne ed interne) non è mai negativo per ogni spostamento virtuale dei punti del sistema:*

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i \cdot \delta P_i \geq 0 \quad \forall \delta P_i . \quad (7.1)$$

Con tale postulato, consideriamo le equazioni di moto  $\mathbf{F}_i + \Phi_i = m_i \mathbf{a}_i$  per ogni punto del

---

<sup>5</sup>Lo spostamento virtuale  $\delta P$  è un generico spostamento infinitesimo del punto  $P$ , conforme ai vincoli *pensati fissi*; in modo del tutto analogo, si può definire la *velocità virtuale*  $\mathbf{v}'$  del punto, data dal rapporto  $\mathbf{v}' = \delta P / \delta t$  tra lo spostamento virtuale ed un intervallo di tempo arbitrario  $\delta t$ .

Lo spostamento virtuale è reversibile se anche il suo opposto  $-\delta P$  è virtuale, altrimenti è detto irreversibile. Pertanto *per vincoli bilateri gli spostamenti virtuali sono reversibili*, mentre per vincoli unilateri (ad esempio di appoggio) si hanno anche spostamenti irreversibili.

Per chiarire ulteriormente la differenza tra spostamento infinitesimo effettivo e spostamento virtuale è utile riferirsi al caso di vincoli mobili; ricordiamo che se il generico punto  $P_i$  del sistema ha coordinate  $\{x_i, y_i, z_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), un vincolo fisso è dato da una relazione che senza perdita di generalità possiamo pensare della forma  $f(x_i, y_i, z_i) \geq 0$ , o della forma  $f(x_i, y_i, z_i) = 0$  nel caso in cui il vincolo sia anche bilatero. Si parla invece di vincolo mobile quando tra le coordinate dei punti del sistema sussiste una relazione della forma  $f(x_i, y_i, z_i, t) \geq 0$  o della forma  $f(x_i, y_i, z_i, t) = 0$  per vincoli anche bilateri. Utilizzando le equazioni che traducono i vincoli cui è soggetto il sistema, possiamo allora esprimere la posizione  $P_i$  di ogni punto in funzione di un numero  $n$  (ovviamente  $n \leq 3N$ ) di coordinate indipendenti, che denoteremo con  $\{q_1, \dots, q_n\}$  e del tempo  $t$  (se sono presenti vincoli mobili), per cui  $P_i = P_i(q_1, \dots, q_n, t)$ . Tenendo conto della definizione di spostamento virtuale, si ha allora

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

mentre lo spostamento infinitesimo  $dP_i$  relativo all'intervallo  $dt$  è dato da

$$dP_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

(la differenza essenziale tra le due espressioni non è ovviamente data dalla sostituzione del simbolo  $d$  con  $\delta$ , dovuta solo a ragioni storiche e mantenuta per maggiore chiarezza, ma dal fatto che lo spostamento effettivo è il differenziale del vettore posizione, mentre lo spostamento virtuale è dato da una variazione parziale della posizione, fatta solo rispetto alle  $q$  e non al tempo). Pertanto *se i vincoli sono fissi lo spostamento effettivo è uno degli spostamenti virtuali possibili, mentre se i vincoli sono mobili tra tutti gli spostamenti virtuali non si ha lo spostamento effettivo.*

sistema, che scriviamo nella forma

$$\Phi_i = -(\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) . \quad (7.2)$$

Queste equazioni, risolte, forniscono sia il moto  $P_i = P_i(t)$  che le reazioni vincolari  $\Phi_i$ . Dalle (7.1) e (7.2) segue allora che se  
 (i) valgono le leggi di Newton  
 (ii) i vincoli sono non dissipativi  
 il moto  $P_i = P_i(t)$  deve essere tale da verificare la relazione

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta P_i \leq 0 \quad \forall \delta P_i , \quad (7.3)$$

che è detta la *Relazione simbolica della dinamica*.

Introduciamo l'ulteriore ipotesi di *vincoli bilateri*; essendo in tal caso gli spostamenti virtuali reversibili, la relazione (7.3) deve valere per ogni scelta di spostamenti  $\delta P_i$  e per i loro opposti  $-\delta P_i$ : poichè il lavoro è lineare negli spostamenti, ne segue che deve essere verificata la *Equazione simbolica della dinamica*

$$\sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta P_i = 0 \quad \forall \delta P_i . \quad (7.4)$$

#### **Osservazione.**

Le (7.3) e (7.4) sono state ottenute come conseguenze necessarie delle equazioni di Newton: ogni moto  $P_i = P_i(t)$  del sistema, ottenuto risolvendo le equazioni di Newton dopo aver eliminato le reazioni vincolari  $\Phi_i$  esercitate dai vincoli non dissipativi durante il moto, deve soddisfare la relazione e/o l'equazione simbolica della dinamica.

D'altra parte, se per un sistema con vincoli non dissipativi si determina una legge di moto  $P_i = P_i(t)$  per cui vale la (7.3) o la (7.4), tale moto è soluzione delle equazioni di Newton (7.2); infatti, introdotti  $N$  vettori  $\Phi_i$  definiti da

$$\Phi_i := -(\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (7.5)$$

le equazioni (7.2) sono verificate per costruzione e i vettori  $\Phi_i$  sono senz'altro interpretabili come reazioni vincolari esercitate sul sistema dai vincoli non dissipativi, poichè dalle (7.5) e (7.3) segue che

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i \cdot \delta P_i = - \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta P_i \geq 0 \quad \forall \delta P_i$$

e quindi tali vettori soddisfano all'unica richiesta che imponiamo ai vincoli non dissipativi, cioè la (7.1). In conclusione:

*le soluzioni  $P_i = P_i(t)$  del sistema di equazioni di Newton (7.2), ottenute eliminando da tali equazioni le reazioni vincolari, sono tutte e sole quelle che si ottengono dalla relazione (7.3) o dalla (7.4). Ai fini del solo calcolo del moto (e non anche delle reazioni vincolari) risolvere la (7.3) o la (7.4) è quindi equivalente a risolvere le (7.2) (e quindi le equazioni cardinali che ne sono una diretta conseguenza).*  $\diamond$

## 8 Principio dei lavori virtuali.

### Equilibrio di un sistema con vincoli non dissipativi.

Consideriamo ora il caso dell'equilibrio ( $\mathbf{v}_i = 0$ ,  $\mathbf{a}_i = 0$ ); tutte e sole le posizioni di equilibrio, ottenibili come eventuali soluzioni delle equazioni di Newton  $\mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i = 0$  (e quindi delle equazioni cardinali che ne sono una diretta conseguenza) dopo aver eliminato le reazioni vincolari, sono ottenibili dalla *Relazione simbolica della statica*

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i \leq 0 \quad \forall \delta P_i, \quad (8.1)$$

che storicamente prende il nome di *Principio dei lavori virtuali*. Riassumendo quanto detto, tale principio può quindi enunciarsi nel modo seguente.

**8.1 Principio dei lavori virtuali.** *Per ogni sistema meccanico soggetto a vincoli non dissipativi, condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che il lavoro virtuale delle forze attive applicate al sistema non sia positivo, per ogni spostamento virtuale del sistema*

$$\delta^* L = \sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i \leq 0 \quad \forall \delta P_i. \quad (8.2)$$

Pertanto, se per un sistema esiste una configurazione di equilibrio, considerando uno spostamento virtuale dei suoi punti a partire da tale configurazione non è possibile che il lavoro virtuale delle forze attive sia positivo (condizione necessaria); viceversa, se analizzando la (8.2) si determina una configurazione tale che il lavoro delle forze attive a partire da tale configurazione sia non positivo per ogni spostamento virtuale, allora tale configurazione è senz'altro di equilibrio (condizione sufficiente).

Analizziamo più in dettaglio l'espressione del lavoro virtuale. Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali, soggetto a vincoli bilateri, fissi o mobili; la generica configurazione e lo spostamento virtuale sono individuati da  $n$  coordinate e dalle loro  $n$  variazioni, che con notazione vettoriale indicheremo anche con  $\mathbf{q}$  e  $\delta \mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q} := (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \delta \mathbf{q} := (\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n). \quad (8.3)$$

La posizione di ogni punto del sistema è quindi data da  $P_i = P_i(\mathbf{q}, t)$ , dipende cioè da  $n$  parametri e dal tempo (la dipendenza esplicita dal tempo  $t$  manca se i vincoli sono fissi). Essendo lo spostamento virtuale di ogni punto dato da

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (8.4)$$

il lavoro virtuale  $\delta^* L$  delle forze attive è quindi

$$\delta^* L := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \quad (8.5)$$

Introducendo le  $n$  quantità  $Q_k$  <sup>(6)</sup>

$$\mathbf{Q} := (Q_1, Q_2, \dots, Q_n), \quad Q_k := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

il lavoro virtuale si può allora esprimere come il *prodotto scalare* della sollecitazione attiva  $\mathbf{Q}$  per lo spostamento virtuale  $\delta \mathbf{q}$ :

$$\delta^* L = \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{q} := \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k .$$

Essendo i vincoli bilateri, le posizioni di equilibrio si ottengono dall'equazione

$$\sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = 0 . \quad (8.6)$$

### Equilibrio di sistemi olonomi.

Facciamo ora l'ipotesi che il sistema sia *olonomo*, cioè che ammetta un numero  $n$  di spostamenti virtuali indipendenti, uguali al numero delle coordinate  $\mathbf{q}$ ; supponiamo cioè che non solo le  $q_k$  siano indipendenti, ma che lo siano anche le loro variazioni  $\delta q_k$ .

Perchè la (8.6) sia soddisfatta per ogni spostamento virtuale, la condizione necessaria e sufficiente è quindi che le singole componenti della sollecitazione siano nulle; si ottiene così un sistema di  $n$  equazioni

$$\begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_2 = 0 \\ \dots \\ Q_n = 0 \end{cases} \quad (8.7)$$

in numero pari al numero di gradi di libertà del sistema.

Nelle applicazioni a sistemi olonomi con più gradi di libertà, può essere utile il seguente *Metodo di sovrapposizione*: per calcolare la componente  $Q_k$  della sollecitazione attiva secondo la coordinata  $q_k$ , possiamo considerare lo spostamento virtuale parziale ottenuto variando la sola coordinata  $k$ -sima

$$\delta q_k \neq 0, \quad \delta q_i = 0 \quad \text{se } i \neq k$$

e il corrispondente lavoro virtuale parziale, che indichiamo con  $\delta_k^* L$ ; la componente  $Q_k$  è allora data dal rapporto

$$Q_k = \frac{\delta_k^* L}{\delta q_k} ;$$

il lavoro virtuale complessivo è poi dato dalla somma degli  $n$  lavori parziali così calcolati.

---

<sup>6</sup>Le  $Q_k$  sono dette le *componenti della sollecitazione attiva secondo le coordinate  $q_k$* . Se la coordinata  $q_k$  ha le dimensioni di una lunghezza, la corrispondente componente  $Q_k$  ha le dimensioni di una forza; se  $q_k$  è adimensionale (come nel caso di coordinate angolari), la componente  $Q_k$  ha le dimensioni di un momento.

**Equilibrio di un sistema con sollecitazione conservativa.**

Nel caso di sistema olonomo, una formulazione più sintetica e vantaggiosa del principio dei lavori virtuali si ha nel caso di *sollecitazione conservativa*.

Per una sollecitazione applicata ad un generico sistema diciamo che essa è conservativa se esiste una funzione  $U = U(\mathbf{q}, t)$  della configurazione e del tempo, la cui variazione virtuale uguaglia il lavoro virtuale delle forze attive, ovvero tale che

$$\delta^* L = \delta U \quad \Rightarrow \quad Q_k = \frac{\partial U(\mathbf{q}, t)}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) . \quad (8.8)$$

In particolare, nel caso statico abbiamo vincoli fissi e forze non dipendenti dal tempo, per cui è  $U = U(q)$ .

Le (8.7) e (8.8) implicano allora che tutte e sole le posizioni di equilibrio siano punti di stazionarietà del potenziale

$$\text{equilibrio} \quad \Leftrightarrow \quad Q_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta U = 0 .$$

Riassumendo, si ha il seguente risultato.

**8.2 Teorema della stazionarietà del potenziale.** *Per ogni sistema meccanico soggetto a vincoli non dissipativi, bilateri ed olonomi, e a sollecitazione attiva conservativa di potenziale  $U$ , condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che il potenziale sia stazionario nella configurazione di equilibrio:  $\delta U = 0$ .*

**Il principio dei lavori virtuali e le equazioni cardinali.**

Osserviamo anzitutto che per un corpo rigido il più generale spostamento virtuale (che è compatibile con la proprietà di rigidità) è rototraslatorio, per cui il lavoro virtuale di un qualunque sistema di vettori applicati al c.r. è dato da

$$\delta^* L := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot (\delta A + \boldsymbol{\epsilon} \wedge (P_i - A)) = \mathbf{R} \cdot \delta A + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{M}_A . \quad (8.9)$$

Da tale relazione e dal principio di azione e reazione segue allora che il lavoro virtuale delle forze interne al c.r. è nullo, per cui se anche interpretiamo tali forze come reazioni vincolari interne si tratta comunque di forze esercitate da un vincolo non dissipativo.

Se consideriamo ora le condizioni di equilibrio del c.r. libero, dalla (8.9) e dall'arbitrarietà di  $\delta A$  e di  $\boldsymbol{\epsilon}$  riotteniamo il risultato già noto: le condizioni caratteristiche di equilibrio del c.r. libero sono le equazioni cardinali del risultante e del momento:  $\mathbf{R} = 0$ ,  $\mathbf{M}_A = 0$ .

Val la pena di osservare che la sufficienza delle equazioni cardinali per l'equilibrio del c.r. segue naturalmente dall'impostazione della meccanica analitica, senza che si sia dovuto introdurre il postulato della forza come cursore (il che ha permesso, come visto in precedenza, di interpretare un sistema di forze soddisfacenti le equazioni del risultante e del momento come equivalente al sistema nullo). Considerazioni del tutto analoghe si possono fare per quanto riguarda la sufficienza delle equazioni cardinali per il moto del corpo rigido.

Se consideriamo invece un sistema non rigido (per esempio costituito da corpi e punti materiali tra loro vincolati) che ammette uno spostamento rototraslatorio come spostamento virtuale ed applichiamo il principio dei lavori virtuali come condizione necessaria, le equazioni cardinali

del risultante e del momento devono essere soddisfatte e sono quindi, come già sappiamo, condizioni necessarie di equilibrio; tali equazioni non sono però sufficienti perché lo spostamento rototraslatorio non è il più generale spostamento virtuale di un sistema non rigido.

## 9 Sollecitazione conservativa e potenziale.

Diamo una breve sintesi dei diversi modi in cui in Meccanica Newtoniana (teorema dell'energia) e in Meccanica Analitica (teorema della stazionarietà del potenziale ed equazioni di Lagrange) si introduce la nozione di potenziale.

### Potenziale di una forza posizionale.

Il primo modo di introdurre il concetto di potenziale è partendo da un singolo campo di forza di tipo posizionale:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P)$ ; in tal caso dire che il campo di forze  $\mathbf{F}$  è conservativo corrisponde ad una delle seguenti affermazioni, tra loro equivalenti *nell'ipotesi che il campo di forze  $\mathbf{F}$  sia definito in una regione semplicemente connessa di  $R^3$* :

(i) il lavoro infinitesimo della forza  $\mathbf{F}$  è un differenziale esatto, cioè esiste una funzione  $U = U(P)$  tale che

$$d^*L(P) := \mathbf{F}(P) \cdot dP = dU(P) ; \quad (9.1)$$

(ii) il lavoro della forza  $\mathbf{F}$  lungo un qualunque cammino regolare  $\gamma$  da  $P_0$  a  $P$  è funzione solo di  $P_0$  e  $P$ , ma non di  $\gamma$ , per cui possiamo introdurre una funzione  $U$  tale che

$$\int_{P_0}^P \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = U(P) - U(P_0) \quad \Rightarrow \quad U(P) = U(P_0) + \int_{P_0}^P \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} , \quad (9.2)$$

essendo l'integrale calcolato lungo un *qualunque* cammino tra  $P_0$  e  $P$ ;

(iii) il lavoro lungo un percorso chiuso (ciclo) è nullo:  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ .

(iv) la potenza  $\Pi := \mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{v}_P$  della forza  $\mathbf{F}$  è la derivata totale rispetto al tempo  $t$  di una funzione  $U(P)$ :

$$\Pi = dU(P)/dt ;$$

(v) la forza  $\mathbf{F}$  del campo è il gradiente di una funzione  $U$ :  $\mathbf{F} = \text{grad}U$ ;

(vi) la forza  $\mathbf{F}$  del campo è irrotazionale:  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ .

Esempi ben noti di campi di forze con tali proprietà sono i campi centrali e posizionali (gravitazionale, elettrostatico, elastico), il campo di forze peso e più in generale i campi di forze costanti, e, per un osservatore non inerziale uniformemente ruotante rispetto ad un osservatore inerziale, il campo di forze centrifughe.

### Potenziale di una sollecitazione posizionale.

Nell'applicazione del teorema dell'energia cinetica a sistemi estesi (sistemi di punti, corpo rigido e sistemi articolati), è utile introdurre una generalizzazione della precedente nozione di potenziale, suggerita dalla definizione (i). Consideriamo una generica sollecitazione posizionale  $\mathcal{S}$  applicata al sistema, costituita da un insieme di forze  $\mathbf{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) applicate in punti  $P_i$  e dipendenti solo dalle posizioni dei punti del sistema, e da coppie di momenti  $\mathbf{C}_j$  applicate a corpi rigidi del sistema; diciamo allora che la sollecitazione  $\mathcal{S}$  è conservativa se il lavoro infinitesimo complessivo della sollecitazione è un differenziale esatto, cioè se esiste una funzione  $U$  della configurazione del sistema tale che:

$$d^*L := \sum_i \mathbf{F}_i \cdot dP_i + \sum_j \mathbf{C}_j \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j = dU \quad (9.3)$$

( $\epsilon_j$  è la rotazione infinitesima del corpo rigido a cui la  $j$ -sima coppia  $\mathbf{C}_j$  è applicata).

Un primo esempio di tale generalizzazione del concetto di potenziale si ha considerando due punti liberi  $A$  e  $B$  collegati da una molla di costante elastica  $k$ ; le due forze elastiche scambiate tra  $A$  e  $B$  non sono singolarmente conservative, ma se si considera il loro lavoro infinitesimo complessivo, esso è il differenziale della funzione  $U = -(1/2)k\overline{AB}^2$ , che è il *potenziale della molla*.

Un secondo esempio è quello di una coppia applicata ad un corpo rigido piano che si muove in un piano, di normale  $\mathbf{k}$ ; se  $\mathbf{C} = C(\vartheta)\mathbf{k}$  è il momento della coppia e  $\epsilon = d\vartheta\mathbf{k}$  il vettore rotazione infinitesima del corpo, il lavoro infinitesimo della coppia è  $d^*L = \mathbf{C} \cdot \epsilon = C(\vartheta)d\vartheta$ , per cui la coppia è conservativa secondo la definizione ora introdotta, con potenziale

$$U(\vartheta) = \int^{\vartheta} C(\xi) d\xi ; \quad (9.4)$$

in particolare per una coppia di momento costante  $C_0$  si ha  $U = C_0\vartheta$ , per una coppia elastica di momento  $C = -\alpha\vartheta$  si ha  $U = -(1/2)\alpha\vartheta^2$  (in entrambi i casi, a meno di inessenziali costanti additive).

### Potenziale in Meccanica analitica.

Utilizzando i metodi della meccanica analitica è utile introdurre una ulteriore generalizzazione del concetto di potenziale, essenzialmente basata sul fatto che si considera ora il lavoro virtuale e non più il lavoro corrispondente a spostamenti effettivi.

Senza analizzare il caso di un singolo campo di forze, consideriamo direttamente un generico sistema olonomo, con  $n$  gradi di libertà e con vincoli bilateri, eventualmente mobili; per ogni punto  $P_i$  del sistema si ha allora  $P_i = P_i(\mathbf{q}; t)$ , dove  $\mathbf{q} := (q_1, \dots, q_n)$  sono le coordinate libere del sistema; supponiamo che sui punti agiscano delle forze  $\mathbf{F}_i$  dipendenti dalla configurazione del sistema ed eventualmente dal tempo:  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{q}; t)$  (non si richiede quindi che si tratti di una sollecitazione posizionale). In queste ipotesi, le componenti della sollecitazione attiva del sistema (cioè i coefficienti  $Q_k$  nell'espressione del lavoro virtuale  $\delta^*L = \sum_k Q_k \delta q_k$ ) risultano genericamente dipendere dalle coordinate e dal tempo, per cui

$$\delta^*L = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(\mathbf{q}; t) \cdot \delta P_i = \mathbf{Q}(\mathbf{q}; t) \cdot \delta \mathbf{q} . \quad (9.5)$$

Generalizzando la precedente definizione di potenziale, diremo allora che la sollecitazione attiva applicata al sistema è complessivamente conservativa, con potenziale  $U$ , se il lavoro virtuale è il *differenziale virtuale* (cioè rispetto alle sole coordinate  $\mathbf{q}$ ) di una funzione  $U = U(\mathbf{q}; t)$ :

$$\delta^*L(\mathbf{q}; t) = \delta U(\mathbf{q}; t) \quad \text{ovvero} \quad Q_k(\mathbf{q}; t) = \frac{\partial U(\mathbf{q}; t)}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, n) . \quad (9.6)$$

È questo il potenziale che entra nella scrittura delle equazioni di Lagrange in forma conservativa, con Lagrangiana  $L = T + U$ .

Come esempio, consideriamo in un riferimento cartesiano  $(O; x, y)$  un punto materiale  $A$  vincolato con vincolo bilatero all'asse  $x$ , la cui posizione è data da:  $(A - O) = x\mathbf{i}$ . Supponiamo che

A sia collegato, tramite una molla di costante  $k$ , all'estremo  $B$  di un'asta  $OB$ , di lunghezza  $\ell$ , incernierata in  $O$  e ruotante nel piano con legge di moto assegnata  $\vartheta = \vartheta(t)$ , essendo  $\vartheta$  l'angolo che l'asta forma con l'asse  $x$ . Considerando come sistema meccanico il solo punto  $A$ , si tratta allora di un sistema con un grado di libertà e vincolo fisso e bilatero (l'asse  $x$ ), soggetto alla forza elastica esercitata dalla molla, che è una forza *dipendente dal tempo*:

$$\mathbf{F} = -k(A - B) \quad \Rightarrow \quad F_x = -k(x - \ell \cos \vartheta(t)), \quad F_y = k \ell \sin \vartheta(t) .$$

Essendo lo spostamento virtuale del punto  $A$  dato da  $\delta A = \delta x \mathbf{i}$ , il lavoro virtuale della forza è

$$\delta^* L = \mathbf{F} \cdot \delta A = F_x \delta x = -k(x - \ell \cos \vartheta(t)) \delta x \quad \Rightarrow \quad Q_x(x, t) = -k(x - \ell \cos \vartheta(t)) .$$

Osserviamo che

$$Q_x = -k(x - \ell \cos \vartheta(t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{2} k (x - \ell \cos \vartheta(t))^2 \right) ;$$

pertanto la forza  $\mathbf{F}$ , dipendente dal tempo, ammette potenziale nel senso della precedente definizione (9.6), con

$$U(x, t) = -\frac{1}{2} k (x - \ell \cos \vartheta(t))^2 . \quad (9.7)$$

Tale risultato può scriversi in una forma più semplice osservando che, come ogni potenziale dipendente solo dalle coordinate  $\mathbf{q}$  è definito a meno di costanti additive (cioè di quantità che hanno derivata nulla rispetto alle coordinate), così il potenziale dipendente dal tempo non cambia sommando ad esso arbitrarie funzioni del tempo; aggiungendo all'espressione (9.7) la funzione  $-(1/2)k(\ell \sin \vartheta(t))^2$  otteniamo allora

$$U(x, t) = -\frac{1}{2} k [(x - \ell \cos \vartheta(t))^2 + (\ell \sin \vartheta(t))^2] = -\frac{1}{2} k \overline{AB}^2 . \quad (9.8)$$

Pertanto ritroviamo, in questo esempio, un risultato generale, utile nelle applicazioni: *nello studio della meccanica di un generico sistema (ad esempio nello scrivere le equazioni di Lagrange), ad una molla di costante  $k$ , di estremi  $A$  e  $B$ , possiamo sempre associare il potenziale  $U = -(1/2) k \overline{AB}^2$ ; tale potenziale può dipendere dal tempo se il moto di un estremo della molla è assegnato, mentre dipende solo dalle coordinate se gli estremi sono liberi o se più in particolare un estremo è fisso.*

**Osservazione.** Accenniamo ad una ulteriore possibile generalizzazione della nozione di potenziale, che consente di scrivere le equazioni di Lagrange in forma conservativa in presenza di particolari campi di forze dipendenti, oltre che dalle coordinate  $\mathbf{q}$  e dal tempo, anche (linearmente) dalle velocità  $\dot{\mathbf{q}}$ . A tal fine, se  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t)$  è la sollecitazione attiva, è facile verificare che se esiste una funzione  $U = U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t)$  tale che

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) , \quad (9.9)$$

allora le equazioni di Lagrange ammettono la usuale formulazione conservativa in termini di una funzione Lagrangiana  $L := T + U$ . Anche in tal caso, diremo che la sollecitazione attiva con la proprietà (9.9) è conservativa con potenziale  $U$ ; sollecitazioni di tale tipo si incontrano ad esempio in meccanica relativa (forza di Coriolis) e in elettromagnetismo (forza di Lorentz).  $\diamond$

## 10 Principio di d'Alembert.

Come visto precedentemente, sia considerando le equazioni cardinali della dinamica e della statica sia considerando la relazione simbolica della dinamica e il principio dei lavori virtuali, la statica appare naturalmente come un caso particolare della dinamica. Nella scrittura delle equazioni di un problema dinamico può però essere utile, soprattutto se chi deve affrontare il problema ha maggiore esperienza nell'impostare problemi di equilibrio, partire dal punto di vista dell'equilibrio: in questo approccio, che illustreremo nel seguito per il caso di moti piani, consiste il cosiddetto *principio di d'Alembert*.

Se consideriamo le equazioni di equilibrio del punto materiale e le equazioni del risultante e del momento, dal punto di vista formale esse consistono nell'uguagliare a zero la somma di campi vettoriali che sono dati dalle forze esterne attive e reattive, o dai momenti delle forze esterne attive e reattive. Analogamente, in meccanica analitica, per un sistema con vincoli bilateri, si uguaglia a zero la somma dei lavori delle forze attive esterne e interne.

Da questo punto di vista, l'equazione fondamentale della dinamica del punto, da cui seguono poi le equazioni cardinali, scritta nella forma

$$\mathbf{F} + \Phi + (-m\mathbf{a}) = 0 , \quad (10.1)$$

esprime l'annullamento di una somma in cui accanto alle forze effettive compare il termine  $-m\mathbf{a}$ : evidentemente tale termine non rappresenta l'interazione tra il punto ed un sistema fisico esterno, ma dal punto di vista puramente formale la (10.1) può essere vista come un'equazione di equilibrio. Come vedremo nel seguito questo punto di vista è generalizzabile ad ogni sistema, per cui introduciamo la seguente definizione.

**Definizione.** Dato un punto materiale di massa  $m$  ed accelerazione  $\mathbf{a}$ , chiamiamo forza di inerzia agente sul punto il vettore

$$\mathbf{F}^{(m)} := -m\mathbf{a} . \quad (10.2)$$

Trattando tale vettore formalmente come una forza, è immediata la generalizzazione ad un sistema esteso, sia nella descrizione particellare che continua; in particolare definiamo il risultante  $\mathbf{R}^{(m)}$  ed il momento  $\mathbf{M}^{(m)}$  delle forze di inerzia, dati per un sistema  $N$  di punti materiali  $P_i$  da

$$\mathbf{R}^{(m)} := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(m)} = - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i , \quad (10.3)$$

$$\mathbf{M}_A^{(m)} := \sum_{i=1}^N (P_i - A) \wedge \mathbf{F}_i^{(m)} = - \sum_{i=1}^N (P_i - A) \wedge m_i \mathbf{a}_i$$

e per un sistema continuo, di volume  $\tau$ , densità  $\varrho$  e distribuzione di massa  $dm = \varrho d\tau$ , da

$$\mathbf{R}^{(m)} := \int_{\tau} d\mathbf{F}^{(m)} = - \int_{\tau} \varrho \mathbf{a} d\tau \quad (10.4)$$

$$\mathbf{M}_A^{(m)} := \int_{\tau} d\mathbf{M}_A^{(m)} = - \int_{\tau} (P - A) \wedge \varrho \mathbf{a} d\tau .$$

Per quanto riguarda il risultante delle forze di inerzia, segue immediatamente che esso è sempre uguale alla forza d'inerzia che avrebbe un punto con la massa totale del sistema e con l'accelerazione del centro di massa:

**Teorema.** Per ogni sistema con massa  $m$  e centro di massa  $G$  il risultante  $\mathbf{R}^{(m)}$  delle forze d'inerzia è dato da

$$\mathbf{F}^{(m)} := -m \mathbf{a}_G . \quad (10.5)$$

**Dimostrazione.** Ricordiamo che il centro di massa di un sistema è definito come l'unico punto  $G$  per cui è

$$\sum_{i=1}^N m_i (P_i - G) = 0 ; \quad (10.6)$$

derivando due volte rispetto al tempo tale relazione segue che

$$\sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_G) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^{(m)} = - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_G = -m \mathbf{a}_G . \quad \square$$

Possiamo ora enunciare il principio di d'Alembert.

**Principio di d'Alembert.** Un problema dinamico può essere formulato come un problema statico attribuendo ad ogni massa (puntiforme)  $m$  presente nel sistema una forza d'inerzia  $\mathbf{F}^{(m)} := -m \mathbf{a}$ , e ad ogni distribuzione di massa  $dm = \rho d\tau$  una forza  $d\mathbf{F}^{(m)} := -\rho d\mathbf{a} d\tau$ .

**Osservazioni.**

(i) Ripetiamo che il punto di vista di d'Alembert è solo un modo diverso di scrivere le equazioni della dinamica; ovviamente occorre, quando richiesto, introdurre le relazioni costitutive tipiche della dinamica e non della statica; nel caso di vincoli scabri, ad esempio, se si utilizza il modello di attrito di Coulomb occorre ricordare che la relazione costitutiva dell'attrito dinamico è data dall'equazione  $|\Phi_T| = f |\Phi_N|$ , con  $f$  coefficiente di attrito dinamico, e non dalla relazione  $|\Phi_T| \leq \mu |\Phi_N|$ , con  $\mu$  coefficiente di attrito statico.

(ii) Per sistemi privi di massa non si ha evidentemente differenza tra equazioni statiche e dinamiche, per cui proprietà dedotte dal caso dell'equilibrio continuano a valere anche in situazioni di moto: ad esempio, il fatto che in un sistema articolato un'asta rettilinea di massa trascurabile incernierata agli estremi e senza forze distribuite al suo interno (*puntone* o *tirante*) eserciti sulle cerniere un'azione diretta come l'asta stessa sussiste anche durante il moto.  $\diamond$

In base al principio di d'Alembert, le equazioni cardinali della dinamica possono scriversi nella forma

$$\mathbf{R} + \mathbf{R}' + \mathbf{R}^{(m)} = 0 , \quad \mathbf{M}_A + \mathbf{M}'_A + \mathbf{M}_A^{(m)} = 0 \quad (10.7)$$

facendo intervenire accanto alle forze esterne attive e reattive le forze di inerzia. Per quanto detto sul risultante delle forze d'inerzia, si vede immediatamente che la prima delle (10.7) non è altro che la prima equazione cardinale della dinamica scritta nella forma di teorema del moto del baricentro.

Per quanto riguarda il momento delle forze d'inerzia, diamo il risultato per un corpo rigido bidimensionale in moto nel piano  $xy$  di un riferimento cartesiano fisso  $(O; x, y, z)$ , dotato di velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  e di accelerazione angolare  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ ; ricordiamo che in questo caso particolare è

$$\boldsymbol{\omega} = \pm \dot{\vartheta} \mathbf{k}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \pm \ddot{\vartheta} \mathbf{k} \quad (10.8)$$

essendo  $\vartheta$  l'angolo di rotazione del corpo rigido. Vale allora il seguente risultato:

**Teorema.** Dato un c.r. piano, di massa  $m$  e momento di inerzia  $I_G$  rispetto al baricentro  $G$ , il momento  $\mathbf{M}_G^{(m)}$  delle forze d'inerzia rispetto al baricentro  $G$  è dato da

$$\mathbf{M}_G^{(m)} := -I_G \dot{\boldsymbol{\omega}} . \quad (10.9)$$

**Dimostrazione.** Nelle ipotesi particolari del teorema, l'accelerazione  $\mathbf{a}_i$  di un generico punto  $P_i$  del c.r. piano è data da

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_G - \omega^2(P_i - G) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_i - G) ; \quad (10.10)$$

sostituendo  $\mathbf{a}_i$  nell'espressione del momento  $\mathbf{M}_G^{(m)}$  abbiamo allora

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_G^{(m)} &= - \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge m_i \mathbf{a}_i \\ &= - \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge m_i \mathbf{a}_G + \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge (m_i \omega^2 (P_i - G)) - \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge (m_i \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_i - G)) . \end{aligned}$$

La prima ed la seconda sommatoria nell'ultima riga sono identicamente nulle poiché

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge m_i \mathbf{a}_G &= \left( \sum_{i=1}^N m_i (P_i - G) \right) \wedge \mathbf{a}_G \stackrel{(10.6)}{=} 0 , \\ \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge (m_i \omega^2 (P_i - G)) &= \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i (P_i - G) \wedge (P_i - G) = 0 . \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la terza sommatoria, osserviamo che

$$(P_i - G) \wedge (\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_i - G)) = \dot{\boldsymbol{\omega}} r_i^2 \quad (r_i := \overline{P_i G})$$

dove si è utilizzata l'identità del doppio prodotto vettore  $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}$  con  $\mathbf{a} = \mathbf{c} = P_i - G$ ,  $\mathbf{b} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$  ed il fatto che il moto è piano; si ha allora

$$\mathbf{M}_G^{(m)} = - \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge m_i (\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_i - G)) = - \dot{\boldsymbol{\omega}} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = -I_G \dot{\boldsymbol{\omega}} . \quad \square$$

Utilizzando i risultati ora dimostrati, abbiamo allora il seguente corollario, che è di utilità pratica nello scrivere le equazioni di moto per sistemi di c.r. piani.

**Corollario.** Il sistema di forze d'inerzia agenti su un c.r. piano è equipollente ad una "forza di inerzia"  $\mathbf{F}^{(m)}$  applicata nel baricentro del c.r. e ad una "coppia di inerzia"  $\mathbf{C}^{(m)}$ , date rispettivamente da

$$\mathbf{F}^{(m)} := -m \mathbf{a}_G , \quad \mathbf{C}^{(m)} := -I_G \dot{\boldsymbol{\omega}} . \quad (10.11)$$

**Osservazione.** Tenendo conto dell'espressione della coppia di inerzia è evidente che l'equazione del momento (10.5), scritta rispetto al baricentro  $G$ , è l'equazione del momento delle quantità di moto rispetto al baricentro.

Il vantaggio di “costruire” la seconda equazione cardinale della dinamica come equazione di equilibrio dei momenti attribuendo ad ogni corpo rigido la sollecitazione d’inerzia “forza + coppia” deriva dal fatto che nell’equazione del momento ogni polo è equivalente, mentre nell’equazione del momento delle quantità di moto  $d\mathbf{K}_A/dt + \mathbf{v}_A \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{M}_A + \mathbf{M}'_A$  il termine  $\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{Q}$  e il calcolo di  $\mathbf{K}_A$  dipendono in modo non banale dalla scelta di  $A$ .  $\diamond$

## Appendice. L'oscillatore armonico.

L'equazione dell'oscillatore armonico è data da:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad (*)$$

con  $b \geq 0$  e  $\omega$  costanti: il termine noto  $f$  è detto la *forzante* applicata all'oscillatore.

[A titolo di esempio, se l'oscillatore è dato da un punto di massa  $m$  mobile lungo l'asse  $x$ , soggetto all'azione di una forza elastica di costante  $k$ , di una forza viscosa di costante  $h$  e di una generica forza applicata  $F$  dipendente da  $t$ , nella (\*) è:

$$x = \text{ascissa del punto} \quad 2b = \frac{h}{m} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

Se l'oscillatore è un oscillatore elettrico (circuito  $RCL$ ), nella (\*) è:

$$x = \text{carica elettrica nel circuito} \quad 2b = \frac{R}{L} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f(t) = \frac{E(t)}{L}$$

dove  $E(t)$  è la forza elettromotrice nel circuito (l'equazione è anche l'equazione dell'intensità di corrente  $I(t)$  ponendo  $x = I$  e  $f(t) = \dot{E}(t)/L$  .]

Riportiamo sinteticamente i risultati di uso più comune nelle applicazioni meccaniche.

**(i) Oscillatore libero** ( $f = 0$ ).

La soluzione dell'equazione omogenea

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad (**)$$

è riportata qui di seguito, separando per comodità il caso dell'oscillatore non smorzato da quello dell'oscillatore smorzato;  $C_1$  e  $C_2$  sono costanti di integrazione arbitrarie, che devono essere determinate con le condizioni iniziali del moto  $x(t_0) = x_0$  e  $\dot{x}(t_0) = v_0$ .

**oscillatore libero non smorzato** ( $f = 0$ ,  $b = 0$ ):

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

**oscillatore libero smorzato** ( $f = 0$ ,  $b \neq 0$ ):

$$\text{sottosmorzato } (b < \omega) : \quad x(t) = e^{-bt}(C_1 \sin \tilde{\omega} t + C_2 \cos \tilde{\omega} t) \quad (\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - b^2})$$

$$\text{criticamente smorzato } (b = \omega) \quad x(t) = e^{-\omega t}(C_1 + C_2 t)$$

$$\text{sovrasmorzato } (b > \omega) \quad x(t) = e^{-bt}(C_1 \sinh \bar{\omega} t + C_2 \cosh \bar{\omega} t) \quad (\bar{\omega} = \sqrt{b^2 - \omega^2})$$

(si noti che, in ogni caso,  $x(t) \mapsto 0$  per  $t \mapsto +\infty$ ).

**(ii) Oscillatore forzato** ( $f \neq 0$ ).

Come noto, la soluzione generale dell'equazione (\*) è data dalla somma della soluzione generale dell'equazione omogenea (\*\*) e di una soluzione particolare  $\bar{x}$ , che dipende dal termine forzante  $f$ ; senza riportare il risultato generale per  $f$  qualunque, consideriamo, a titolo di esempio, solo i casi di forzante costante, con dipendenza polinomiale dal tempo e armonica:

(i) *forzante costante:*

$$f(t) = f_0 \text{ (costante)} \Rightarrow \bar{x} = f_0/\omega^2$$

(ii) *forzante polinomiale:*

$$f(t) = p_n(t) \text{ (polinomio di grado } n) \Rightarrow \bar{x} = q_n(t) \text{ (polinomio completo di grado } n)$$

(i coefficienti di  $q_n(t)$  si determinano sostituendo  $x(t) = q_n(t)$  nella (\*) con  $f(t) = p_n(t)$  ed applicando il principio di identità dei polinomi, cioè uguagliando in ambo i membri i coefficienti di uguali potenze di  $t$ ).

(iii) *forzante armonica:*

$$f(t) = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t .$$

Distinguiamo, per maggior semplicità nella scrittura esplicita dei risultati, il caso smorzato  $b = 0$  dal caso non smorzato  $b \neq 0$ , anche se il primo può essere ottenuto dal secondo considerando il limite per  $b \rightarrow 0$  .

Nel caso non smorzato ( $b = 0$ ) la soluzione particolare  $\bar{x}$  è data da:

$$\lambda \neq \omega : f(t) = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t \Rightarrow \bar{x}(t) = \frac{A}{\omega^2 - \lambda^2} \sin \lambda t + \frac{B}{\omega^2 - \lambda^2} \cos \lambda t$$

$$\lambda = \omega : f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \Rightarrow \bar{x}(t) = \frac{B}{2\omega} t \sin \omega t - \frac{A}{2\omega} t \cos \omega t .$$

Il caso  $\lambda = \omega$ , in cui il termine forzante ha una pulsazione uguale alla pulsazione propria dell'oscillatore libero è quello ben noto della *risonanza*: la soluzione particolare  $\bar{x} = \bar{x}(t)$  non è limitata, ma ha massimi e minimi che in valore assoluto crescono linearmente nel tempo.

Nel caso smorzato ( $b \neq 0$ ), e per  $\lambda$  generico, la soluzione particolare  $\bar{x}(t)$  è data da

$$\bar{x}(t) = \frac{(\omega^2 - \lambda^2) A + 2 b \lambda B}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4 b^2 \lambda^2} \sin \lambda t + \frac{(\omega^2 - \lambda^2) B - 2 b \lambda A}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4 b^2 \lambda^2} \cos \lambda t$$

ovvero in modo equivalente da

$$\bar{x}(t) = C \sin(\lambda t + \varphi) ,$$

$$C = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4 b^2 \lambda^2}} , \quad \tan \varphi = \frac{(\omega^2 - \lambda^2) B - 2 b \lambda A}{(\omega^2 - \lambda^2) A + 2 b \lambda B} :$$

si tratta quindi ancora di una funzione armonica, di ampiezza  $C$  e di pulsazione  $\lambda$  uguale a quella del termine forzante.

Nel caso di piccolo smorzamento ( $0 < b < \omega/\sqrt{2}$ ), se consideriamo, fissata l'ampiezza  $\sqrt{A^2 + B^2}$  del termine forzante, la dipendenza  $C = C(\lambda)$  dell'ampiezza della soluzione particolare dalla pulsazione  $\lambda$  della forzante troviamo che  $C$  ha un massimo per  $\bar{\lambda} = \sqrt{\omega^2 - 2b^2}$ , ed è :

$$C(\bar{\lambda}) = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{2b \sqrt{\omega^2 - b^2}} ;$$

si parla anche in questo caso di *condizioni di risonanza* .