

C.Morosi

Appunti di Meccanica analitica

a.a. 2009-2010

Indice

1. Relazione simbolica della dinamica.
2. Principio dei lavori virtuali.
3. Equazioni di Lagrange.
4. Sollecitazione conservativa e potenziale.
5. Formulazione variazionale delle equazioni di moto.
6. Introduzione alla stabilità.
7. Stabilità dell'equilibrio di sistemi olonomi.
8. Oscillazioni attorno a configurazioni stabili.

©2003 C. Morosi. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore; pertanto, essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto.

1 Relazione simbolica della dinamica.

Consideriamo un generico sistema meccanico, che schematizziamo come un sistema di N punti materiali P_i ($i = 1, 2, \dots, N$), di massa m_i ; indichiamo con \mathbf{F}_i e con Φ_i le forze attive e reattive applicate ai punti P_i , con δP_i gli spostamenti virtuali dei punti P_i ⁽¹⁾.

In meccanica analitica si considerano sistemi soggetti a vincoli non dissipativi, per i quali si introduce il seguente postulato.

Postulato. *Per un qualunque sistema meccanico soggetto a vincoli non dissipativi, sia in condizioni di equilibrio che in condizioni di moto il lavoro virtuale complessivo delle reazioni vincolari (esterne ed interne) non è mai negativo per ogni spostamento virtuale dei punti del sistema:*

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i \cdot \delta P_i \geq 0 \quad \forall \delta P_i . \quad (1.1)$$

¹Ricordiamo che lo spostamento infinitesimo dP di un punto P è per definizione il differenziale del vettore posizione, per cui se \mathbf{v} è la velocità del punto si ha $dP = \mathbf{v} dt$. Lo spostamento virtuale δP è per definizione un generico spostamento infinitesimo del punto P , conforme ai vincoli *pensati fissi*; in modo del tutto analogo, si può definire la *velocità virtuale* \mathbf{v}' del punto, data dal rapporto $\mathbf{v}' = \delta P / \delta t$ tra lo spostamento virtuale ed un intervallo di tempo arbitrario δt .

Per chiarire ulteriormente la differenza tra lo spostamento infinitesimo associato alla velocità \mathbf{v} e lo spostamento virtuale è utile riferirsi al caso di vincoli mobili; ricordiamo che se $\{x_i, y_i, z_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) sono le coordinate dei punti del sistema, un vincolo fisso è dato da una relazione che senza perdita di generalità possiamo pensare della forma $f(x_i, y_i, z_i) \geq 0$, o della forma $f(x_i, y_i, z_i) = 0$ nel caso in cui il vincolo sia anche bilatero. Si parla invece di vincolo mobile quando tra le coordinate dei punti del sistema sussiste una relazione della forma $f(x_i, y_i, z_i, t) \geq 0$ o della forma $f(x_i, y_i, z_i, t) = 0$ per vincoli anche bilateri. Utilizzando le equazioni che traducono i vincoli cui è soggetto il sistema, possiamo allora esprimere la posizione P_i di un generico punto del sistema in funzione di un numero n (ovviamente $n \leq 3N$) di coordinate indipendenti, che denoteremo con $\{q_1, \dots, q_n\}$ e del tempo t (se sono presenti vincoli mobili), per cui la posizione di ogni punto del sistema è data da $P_i = P_i(q_1, \dots, q_n, t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). In base alla definizione di spostamento virtuale, si ha allora

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

mentre lo spostamento infinitesimo dP_i relativo all'intervallo dt è dato da

$$dP_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

(la differenza essenziale tra le due espressioni non è ovviamente data dalla sostituzione del simbolo d con δ , dovuta solo a ragioni storiche e mantenuta per maggiore chiarezza, ma dal fatto che lo spostamento infinitesimo dP è il differenziale del vettore posizione, mentre lo spostamento virtuale δP è dato dal differenziale parziale del vettore posizione, fatto solo rispetto alle q e non al tempo). Pertanto se i vincoli sono fissi lo spostamento infinitesimo (effettivo) è uno degli spostamenti virtuali possibili, mentre se i vincoli sono mobili tra tutti gli spostamenti virtuali non si ha lo spostamento infinitesimo.

Lo spostamento virtuale è reversibile se anche il suo opposto $-\delta P$ è virtuale, altrimenti è detto irreversibile. Pertanto per vincoli bilateri gli spostamenti virtuali sono reversibili, mentre per vincoli unilateri (ad esempio di appoggio) si hanno anche spostamenti irreversibili.

Con tale postulato, consideriamo le equazioni di moto $\mathbf{F}_i + \Phi_i = m_i \mathbf{a}_i$ per ogni punto del sistema, che scriviamo nella forma

$$\Phi_i = -(\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) . \quad (1.2)$$

Queste equazioni, risolte, forniscono sia il moto $P_i = P_i(t)$ che le reazioni vincolari Φ_i . Dalle (1.1) e (1.2) segue allora che se

(i) valgono le leggi di Newton

(ii) i vincoli sono non dissipativi

il moto $P_i = P_i(t)$ deve essere tale da verificare la relazione

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta P_i \leq 0 \quad \forall \delta P_i , \quad (1.3)$$

che è detta la *Relazione simbolica della dinamica*.

Introduciamo l'ulteriore ipotesi di *vincoli bilateri*; essendo in tal caso gli spostamenti virtuali reversibili, la relazione (1.3) deve valere per ogni scelta di spostamenti δP_i e per i loro opposti $-\delta P_i$: poiché il lavoro è lineare negli spostamenti, ne segue che deve essere verificata la *Equazione simbolica della dinamica*

$$\sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta P_i = 0 \quad \forall \delta P_i . \quad (1.4)$$

Osservazione.

Le (1.3) e (1.4) sono state ottenute come conseguenze necessarie delle equazioni di Newton: ogni moto $P_i = P_i(t)$ del sistema, ottenuto risolvendo le equazioni di Newton dopo aver eliminato le reazioni vincolari Φ_i esercitate dai vincoli non dissipativi durante il moto, deve soddisfare la relazione e/o l'equazione simbolica della dinamica.

D'altra parte, se per un sistema con vincoli non dissipativi si determina una legge di moto $P_i = P_i(t)$ per cui vale la (1.3) o la (1.4), tale moto è soluzione delle equazioni di Newton (1.2); infatti, introdotti N vettori Φ_i definiti da

$$\Phi_i := -(\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.5)$$

le equazioni di Newton (1.2) sono verificate per costruzione e i vettori Φ_i sono senz'altro interpretabili come reazioni vincolari esercitate sul sistema dai vincoli non dissipativi, poichè dalle (1.5) e (1.3) segue che

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i \cdot \delta P_i = - \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta P_i \geq 0 \quad \forall \delta P_i$$

e quindi tali vettori soddisfano all'unica richiesta che imponiamo ai vincoli non dissipativi, cioè la (1.1). In conclusione:

le soluzioni $P_i = P_i(t)$ del sistema di equazioni di Newton (1.2), ottenute eliminando da tali equazioni le reazioni vincolari, sono tutte e sole quelle che si ottengono dalla relazione (1.3) o dalla (1.4). Ai fini del solo calcolo del moto (e non anche delle reazioni vincolari) risolvere la (1.3) o la (1.4) è quindi equivalente a risolvere le (1.2) (e quindi le equazioni cardinali che ne sono una diretta conseguenza). \diamond

2 Principio dei lavori virtuali.

Equilibrio di un sistema con vincoli non dissipativi.

Consideriamo ora il caso dell'equilibrio ($\mathbf{v}_i = 0$, $\mathbf{a}_i = 0$); tutte e sole le posizioni di equilibrio, ottenibili come eventuali soluzioni delle equazioni di Newton $\mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i = 0$ (e quindi delle equazioni cardinali che ne sono una diretta conseguenza) dopo aver eliminato le reazioni vincolari, sono ottenibili dalla *Relazione simbolica della statica*

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i \leq 0 \quad \forall \delta P_i, \quad (2.1)$$

che storicamente prende il nome di *Principio dei lavori virtuali*. Riassumendo quanto detto, tale principio può quindi enunciarsi nel modo seguente.

2.1 Principio dei lavori virtuali. *Per ogni sistema meccanico soggetto a vincoli non dissipativi, condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che il lavoro virtuale delle forze attive applicate al sistema non sia positivo, per ogni spostamento virtuale del sistema*

$$\delta^* L = \sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i \leq 0 \quad \forall \delta P_i. \quad (2.2)$$

Pertanto, se per un sistema esiste una configurazione di equilibrio, considerando uno spostamento virtuale dei suoi punti a partire da tale configurazione non è possibile che il lavoro virtuale delle forze attive sia positivo (condizione necessaria); viceversa, se analizzando la (2.2) si determina una configurazione tale che il lavoro delle forze attive a partire da tale configurazione sia non positivo per ogni spostamento virtuale, allora tale configurazione è senz'altro di equilibrio (condizione sufficiente).

Analizziamo più in dettaglio l'espressione del lavoro virtuale. Consideriamo un sistema di N punti materiali, soggetto a vincoli bilateri, fissi o mobili; la generica configurazione e lo spostamento virtuale sono individuati da n coordinate e dalle loro n variazioni, che con notazione vettoriale indicheremo anche con \mathbf{q} e $\delta \mathbf{q}$:

$$\mathbf{q} := (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \delta \mathbf{q} := (\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n). \quad (2.3)$$

La posizione di ogni punto del sistema è quindi data da $P_i = P_i(\mathbf{q}, t)$, dipende cioè da n parametri e dal tempo (la dipendenza esplicita dal tempo t manca se i vincoli sono fissi). Essendo lo spostamento virtuale di ogni punto dato da

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2.4)$$

il lavoro virtuale $\delta^* L$ delle forze attive è quindi

$$\delta^* L := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \quad (2.5)$$

Introducendo le n quantità Q_k ⁽²⁾

$$\mathbf{Q} := (Q_1, Q_2, \dots, Q_n), \quad Q_k := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

il lavoro virtuale si può allora esprimere come il *prodotto scalare* della sollecitazione attiva \mathbf{Q} per lo spostamento virtuale $\delta \mathbf{q}$:

$$\delta^* L = \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{q} := \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k .$$

Essendo i vincoli bilateri, le posizioni di equilibrio si ottengono dall'equazione

$$\sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = 0 . \quad (2.6)$$

Equilibrio di sistemi olonomi.

Facciamo ora l'ipotesi che il sistema sia *olonomo*, cioè che ammetta un numero n di spostamenti virtuali indipendenti, uguali al numero delle coordinate \mathbf{q} ; supponiamo cioè che non solo le q_k siano indipendenti, ma che lo siano anche le loro variazioni δq_k .

Perchè la (2.6) sia soddisfatta per ogni spostamento virtuale, la condizione necessaria e sufficiente è quindi che le singole componenti della sollecitazione siano nulle; si ottiene così un sistema di n equazioni

$$\begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_2 = 0 \\ \dots \\ Q_n = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

in numero pari al numero di gradi di libertà del sistema.

Nelle applicazioni a sistemi olonomi con più gradi di libertà, può essere utile il seguente *Metodo di sovrapposizione*: per calcolare la componente Q_k della sollecitazione attiva secondo la coordinata q_k , possiamo considerare lo spostamento virtuale parziale ottenuto variando la sola coordinata k -sima

$$\delta q_k \neq 0, \quad \delta q_i = 0 \quad \text{se } i \neq k$$

e il corrispondente lavoro virtuale parziale, che indichiamo con $\delta_k^* L$; la componente Q_k è allora data dal rapporto

$$Q_k = \frac{\delta_k^* L}{\delta q_k} ;$$

il lavoro virtuale complessivo è poi dato dalla somma degli n lavori parziali così calcolati.

²Le Q_k sono dette le *componenti della sollecitazione attiva secondo le coordinate q_k* . Se la coordinata q_k ha le dimensioni di una lunghezza, la corrispondente componente Q_k ha le dimensioni di una forza; se q_k è adimensionale (come nel caso di coordinate angolari), la componente Q_k ha le dimensioni di un momento.

Equilibrio di un sistema olonomo soggetto a sollecitazione conservativa: il teorema della stazionarietà del potenziale.

Nel caso di sistema olonomo, una formulazione più sintetica e vantaggiosa del principio dei lavori virtuali si ha nel caso di *sollecitazione conservativa*.

Nel contesto della meccanica analitica, per una sollecitazione applicata ad un generico sistema diciamo che essa è conservativa se esiste una funzione $U = U(\mathbf{q}, t)$ della configurazione e del tempo, la cui variazione virtuale uguaglia il lavoro virtuale delle forze attive, ovvero tale che

$$\delta^* L = \delta U \quad \Rightarrow \quad Q_k = \frac{\partial U(\mathbf{q}, t)}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) . \quad (2.8)$$

In particolare, nel caso statico abbiamo vincoli fissi e forze non dipendenti dal tempo, per cui è $U = U(q)$.

Le (2.7) e (2.8) implicano allora che tutte e sole le posizioni di equilibrio siano punti di stazionarietà del potenziale

$$\text{equilibrio} \quad \Leftrightarrow \quad Q_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta U = 0 .$$

Riassumendo, si ha il seguente risultato.

2.2 Teorema della stazionarietà del potenziale. *Per ogni sistema meccanico soggetto a vincoli non dissipativi, bilateri ed olonomi, e a sollecitazione attiva conservativa di potenziale U , condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che il potenziale sia stazionario nella configurazione di equilibrio: $\delta U = 0$.*

Il principio dei lavori virtuali e le equazioni cardinali.

Osserviamo anzitutto che per un corpo rigido il più generale spostamento virtuale (che è compatibile con la proprietà di rigidità) è rototraslatorio, per cui il lavoro virtuale di un qualunque sistema di vettori applicati al c.r. è dato da

$$\delta^* L := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot (\delta A + \boldsymbol{\epsilon} \wedge (P_i - A)) = \mathbf{R} \cdot \delta A + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{M}_A . \quad (2.9)$$

Da tale relazione e dal principio di azione e reazione segue allora che il lavoro virtuale delle forze interne al c.r. è nullo, per cui se anche interpretiamo tali forze come reazioni vincolari interne si tratta comunque di forze esercitate da un vincolo non dissipativo.

Se consideriamo ora le condizioni di equilibrio del c.r. libero, dalla (2.9) e dall'arbitrarietà di δA e di $\boldsymbol{\epsilon}$ riotteniamo il risultato già noto: le condizioni caratteristiche di equilibrio del c.r. libero sono le equazioni cardinali del risultante e del momento: $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M}_A = 0$.

Val la pena di osservare che la sufficienza delle equazioni cardinali per l'equilibrio del c.r. segue naturalmente dall'impostazione della meccanica analitica, senza che si sia dovuto introdurre il postulato della forza come cursore (il che ha permesso, come visto in precedenza, di interpretare un sistema di forze soddisfacenti le equazioni del risultante e del momento come equivalente al sistema nullo). Considerazioni del tutto analoghe si possono fare per quanto riguarda la sufficienza delle equazioni cardinali per il moto del corpo rigido.

Se consideriamo invece un sistema non rigido (per esempio costituito da corpi e punti materiali tra loro vincolati) che ammette uno spostamento rototraslatorio come spostamento virtuale ed

applichiamo il principio dei lavori virtuali come condizione necessaria, le equazioni cardinali del risultante e del momento devono essere soddisfatte e sono quindi, come già sappiamo, condizioni necessarie di equilibrio; tali equazioni non sono però sufficienti perché lo spostamento rototraslatorio non è il più generale spostamento virtuale di un sistema non rigido.

3 Equazioni di Lagrange.

Consideriamo un sistema con vincoli non dissipativi, bilateri, olonomi, con n gradi di libertà; il moto del sistema è dato dalle soluzioni dell'equazione simbolica della dinamica (1.4), che scriviamo nella forma

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i \quad \forall \delta P_i . \quad (3.1)$$

Come già visto, il secondo membro di tali equazioni assume la forma

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i = \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{q} \quad (3.2)$$

dove le n quantità Q_k sono definite da

$$Q_k := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \frac{\delta_k^* L}{\delta q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ovvero da

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

nel caso di sollecitazione conservativa con potenziale $U = U(\mathbf{q}, t)$.

Procedendo come nella derivazione della (3.2), e sostituendo semplicemente \mathbf{F}_i con $m_i \mathbf{a}_i$, il primo membro della (3.1) si scrive allora nella forma

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta P_i = \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{q} \quad (3.3)$$

con

$$\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n), \quad \tau_k := \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) . \quad (3.4)$$

Essendo il sistema olonomo, per l'arbitrarietà delle δq_k ($k = 1, 2, \dots, n$) otteniamo

$$\sum_{k=1}^n \tau_k \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad \forall \delta q_k \quad \Rightarrow \quad \tau_k = Q_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.5)$$

Le (3.5) sono n equazioni differenziali di moto, la cui soluzione fornisce il moto $q_k = q_k(t)$ del sistema.

L'importanza ed utilità di tali equazioni derivano dal risultato, dovuto a Lagrange, secondo cui *le τ_k possono essere calcolate attraverso l'energia cinetica, e quindi conoscendo l'atto di moto, senza dover analizzare la distribuzione delle accelerazioni.* A tal fine, consideriamo, nell'espressione dell'energia cinetica, le \mathbf{q} e le $\dot{\mathbf{q}}$ come *variabili indipendenti*, cioè interpretiamo T come una funzione da un aperto di \mathbf{R}^{2n+1} in \mathbf{R} , $T : \{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\} \mapsto T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Vale allora il seguente risultato.

3.1 Teorema(Lagrange). Le n quantità τ_k sono esprimibili attraverso l'energia cinetica T , essendo:

$$\tau_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) . \quad (3.6)$$

Prima di dimostrare il teorema, ritorniamo alle equazioni (3.5); tenendo conto del risultato ora enunciato, le equazioni di moto si scrivono allora nella forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k , \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.7)$$

dette *equazioni di Lagrange per sollecitazione generica*.

Se poi la sollecitazione è conservativa secondo la definizione (2.8), con un potenziale $U = U(\mathbf{q}, t)$, inserendo nelle (3.7) le relazioni

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k \quad (3.8)$$

possiamo scrivere le (3.7) nella forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} , \quad (k = 1, 2, \dots, n) , \quad (3.9)$$

dove la funzione $L : \mathbf{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + U(\mathbf{q}, t)$$

è la *funzione di Lagrange* (o *Lagrangiana*) del sistema; le equazioni (3.9) sono dette le *equazioni di Lagrange per sollecitazione conservativa*.

Osservazione. Utilizzando come per la configurazione e lo spostamento virtuale una scrittura di tipo vettoriale, può essere comodo introdurre una notazione più sintetica anche per le derivate parziali: data una funzione $f = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, useremo allora la notazione seguente

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} := \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n} \right) , \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{q}}} := \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_n} \right) .$$

Con tale notazione, le equazioni di Lagrange (3.9) si scrivono allora nella forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.10)$$

(nel seguito, useremo sia la notazione con gli indici che la notazione vettoriale). \diamond

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema di Lagrange; a tal fine, premettiamo tre Lemmi, i primi due dei quali riguardano la derivata di una funzione

$$f : \mathbf{R}^{n+1} \mapsto \mathbf{R} \quad f = f(\mathbf{q}, t) .$$

Se le \mathbf{q} sono n variabili indipendenti, ciascuna dipendente da t , la derivata totale di f rispetto al parametro t è

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} , \quad (3.11)$$

ed è quindi una funzione lineare (affine) delle $\dot{\mathbf{q}}$; si ha quindi

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{df}{dt} \right) = \frac{\partial f}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{df}{dt} \right) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}. \quad (3.12)$$

Vale allora il seguente Lemma.

3.2 Lemma. *Dato un sistema di N punti materiali P_i , con velocità \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, \dots, N$), si ha*

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.13)$$

Dimostrazione. La (3.12) vale evidentemente anche per una qualunque funzione \mathbf{f} a valori vettoriali; basta allora considerare nella (3.12) $\mathbf{f} = P_i$, per cui $d\mathbf{f}/dt = dP_i/dt = \mathbf{v}_i$. \square

Applichiamo ora la (3.11) alla funzione $f = \partial g / \partial q_j$, con $g = g(\mathbf{q}, t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), e consideriamo le \mathbf{q} e le $\dot{\mathbf{q}}$ come *variabili indipendenti*: con tale ipotesi, e ricordando la ben nota proprietà di commutabilità delle derivate parziali seconde, abbiamo che anche la derivata totale d/dt commuta con la derivata parziale $\partial/\partial q$, essendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_j} (g \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial g}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{dg}{dt} \right); \end{aligned}$$

questo risultato si scrive anche in forma vettoriale

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{dg}{dt} \right). \quad (3.14)$$

Vale allora il seguente Lemma.

3.3 Lemma. *Dato un sistema di N punti materiali P_i , con velocità \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, \dots, N$), si ha*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.15)$$

Dimostrazione. La (3.14) vale evidentemente anche per una qualunque funzione \mathbf{g} a valori vettoriali; basta allora considerare nella (3.14) $\mathbf{g} = P_i$, per cui $d\mathbf{g}/dt = dP_i/dt = \mathbf{v}_i$. \square

Consideriamo infine l'energia cinetica T , che è una funzione quadratica omogenea di secondo grado nelle velocità \mathbf{v}_i dei punti del sistema; se \mathbf{v}_i dipende da un parametro λ , si ha

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(\lambda) \cdot \mathbf{v}_i(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(\lambda) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i(\lambda)}{\partial \lambda}. \quad (3.16)$$

Applicando tale equazione con $\lambda = \dot{q}_j$ e con $\lambda = q_j$ otteniamo allora il seguente risultato.

3.4 Lemma. Dato un sistema di N punti materiali P_i , con masse m_i e velocità \mathbf{v}_i , l'energia cinetica T soddisfa le seguenti relazioni

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.17)$$

Tenendo presenti questi risultati preliminari, la dimostrazione del teorema di Lagrange è ora immediata.

Dimostrazione del teorema di Lagrange 3.1. Le (3.6) derivano dalla seguente catena di uguaglianze ($j = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \tau_j &:= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \right) \\ &\stackrel{(3.13)(3.15)}{=} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \stackrel{(3.17)}{=} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \quad \square \end{aligned}$$

Equazioni di Lagrange e costanti del moto.

Diamo un breve cenno al problema delle costanti del moto in ambito lagrangiano, nell'ipotesi che il sistema meccanico ammetta una sollecitazione conservativa e quindi che le equazioni di moto siano deducibili da una funzione di Lagrange $L = T + U$, con $U = U(\mathbf{q}, t)$. A questo scopo, è utile introdurre i *momenti cinetici* \mathbf{p} definiti da:

$$\mathbf{p} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} : \quad p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.18)$$

(i) *Coordinate cicliche e conservazione dei momenti cinetici.* Supponiamo che la funzione L non dipenda da una coordinata q_m , e quindi che $\partial L / \partial q_m = 0$: diremo che tale coordinata è *ciclica* o *ignorabile*; scrivendo allora la m -sima equazione di Lagrange abbiamo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = \text{costante}.$$

Pertanto, se il sistema ammette una coordinata ignorabile, il momento cinetico corrispondente è una costante del moto:

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_m = \text{costante}. \quad (3.19)$$

Esempio. Un classico esempio è dato dal moto centrale, che come noto è un moto piano; supponendo la forza di tipo posizionale, e descrivendo il moto con le coordinate polari ϱ e ϑ , si ha allora un potenziale $U = U(\varrho)$ ed una funzione di Lagrange

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\vartheta}^2) + U(\varrho). \quad (3.20)$$

L'angolo ϑ è quindi una coordinata ciclica, a cui corrisponde la conservazione del momento cinetico p_ϑ

$$p_\vartheta = m \rho^2 \dot{\vartheta} ;$$

tale conservazione corrisponde alla ben nota legge di conservazione del momento della quantità di moto ovvero, a meno di costanti moltiplicative, della velocità areolare. \diamond

(ii) *Energia generalizzata e sua conservazione.* Un secondo risultato è il seguente. Introduciamo la funzione $J = J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, che chiamiamo *energia generalizzata o di Jacobi*, data da

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) ; \quad (3.21)$$

si dimostra allora come conseguenza delle equazioni di Lagrange che la derivata temporale della funzione J è data da ⁽³⁾

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} .$$

Segue allora da tale identità che se L non dipende esplicitamente dal tempo l'energia generalizzata è una costante del moto:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad J = \text{costante} .$$

La conservazione dell'energia meccanica (che nell'ambito delle equazioni cardinali è una conseguenza del teorema dell'energia cinetica) può essere ottenuta come caso particolare da questo risultato, sotto l'ulteriore ipotesi che i vincoli siano fissi; si dimostra infatti che se i vincoli sono fissi la funzione di Jacobi è uguale all'energia meccanica ⁽⁴⁾

$$\text{vincoli fissi} \quad \Rightarrow \quad J = T - U$$

per cui se i vincoli sono fissi la conservazione di J , che sussiste essendo in tal caso L indipendente da t , corrisponde alla conservazione dell'energia meccanica.

Esempio. Consideriamo, in un piano orizzontale, un punto materiale P , di massa m , scorrevole senza attrito lungo un'asta OA , collegato ad O da una molla di costante k ; supponiamo che l'asta ruoti attorno all'estremo O con moto rotatorio uniforme di velocità angolare ω . Se consideriamo come sistema meccanico il solo punto P , si tratta di un sistema vincolato con vincolo liscio e bilatero ma *mobile*, per cui anche se la forza elastica applicata al punto è conservativa non si ha conservazione dell'energia meccanica. La funzione di Lagrange del punto è

$$L(s, \dot{s}, t) = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + \omega^2 s^2) - \frac{1}{2} k s^2 ,$$

³Ricordando che per una funzione $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è $df/dt = \partial f/\partial t + \partial f/\partial \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \partial f/\partial \dot{\mathbf{q}} \cdot \ddot{\mathbf{q}}$ si ha infatti

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \frac{dL}{dt} \\ &\stackrel{(3.10)}{=} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} . \end{aligned}$$

⁴Se i vincoli sono fissi $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ è una funzione omogenea di secondo grado nelle velocità lagrangiane $\dot{\mathbf{q}}$, per cui, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, $\sum_k (\partial T/\partial \dot{q}_k) \dot{q}_k = \sum_k (\partial T/\partial \dot{q}_k) \dot{q}_k = 2T$, e quindi $J = 2T - L = T - U$.

avendo assunto come coordinata libera $s = \overline{OP}$. Poichè la funzione di Lagrange non dipende esplicitamente dal tempo, l'energia generalizzata si conserva: è immediato verificare che

$$J := \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \dot{s} - L = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 s^2 + \frac{1}{2} k s^2.$$

Osserviamo che, essendo $T - U = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + \omega^2 s^2) + \frac{1}{2} k s^2$, l'energia generalizzata non è l'energia meccanica: $J \neq T - U$. In questo caso, la conservazione di J ha però un immediato significato; se infatti descriviamo il moto dal punto di vista dell'osservatore non inerziale solidale all'asta girevole, per tale osservatore il punto è vincolato con un vincolo liscio, bilatero e *fisso*, sotto l'azione delle forze elastica e centrifuga, entrambe conservative: per tale osservatore si ha quindi conservazione dell'energia meccanica, ed è immediato constatare che $(T - U)_{rel} = J$.

Osservazione. Come l'esempio ora proposto pone in evidenza, anche la conservazione dell'energia, al pari dell'esistenza di altri integrali primi del moto (quantità di moto, momento delle quantità di moto, momenti cinetici) non ha quindi significato intrinseco: l'esistenza di integrali primi (o di leggi di conservazione) dipende in generale dall'osservatore rispetto al quale si descrive il moto e anche dalla scelta delle coordinate usate per scrivere le equazioni differenziali di moto. ◇

4 Sollecitazione conservativa e potenziale.

Diamo una breve sintesi dei diversi modi in cui in Meccanica Newtoniana (teorema dell'energia) e in Meccanica Analitica (teorema della stazionarietà del potenziale ed equazioni di Lagrange) si introduce ed utilizza la nozione di potenziale.

Potenziale di una forza posizionale.

Il primo modo di introdurre il concetto di potenziale è partendo da un singolo campo di forza di tipo posizionale: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P)$; in tal caso dire che il campo di forze \mathbf{F} è conservativo corrisponde ad una delle seguenti affermazioni, tra loro equivalenti *nell'ipotesi che il campo di forze \mathbf{F} sia definito in una regione semplicemente connessa di R^3* :

(i) il lavoro infinitesimo della forza \mathbf{F} è un differenziale esatto, cioè esiste una funzione $U = U(P)$ tale che

$$d^*L(P) := \mathbf{F}(P) \cdot dP = dU(P) ; \quad (4.1)$$

(ii) il lavoro della forza \mathbf{F} lungo un qualunque cammino regolare γ da P_0 a P è funzione solo di P_0 e P , ma non di γ , per cui possiamo introdurre una funzione U tale che

$$\int_{P_0}^P \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = U(P) - U(P_0) \quad \Rightarrow \quad U(P) = U(P_0) + \int_{P_0}^P \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} , \quad (4.2)$$

essendo l'integrale calcolato lungo un *qualunque* cammino tra P_0 e P ;

(iii) il lavoro lungo un percorso chiuso (ciclo) è nullo: $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

(iv) la potenza $\Pi := \mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{v}_P$ della forza \mathbf{F} è la derivata totale rispetto al tempo t di una funzione $U(P)$:

$$\Pi = dU(P)/dt ;$$

(v) la forza \mathbf{F} del campo è il gradiente di una funzione U : $\mathbf{F} = \text{grad}U$;

(vi) la forza \mathbf{F} del campo è irrotazionale: $\text{rot } \mathbf{F} = 0$.

Esempi ben noti di campi di forze con tali proprietà sono i campi centrali e posizionali (gravitazionale, elettrostatico, elastico), il campo di forze peso e più in generale i campi di forze costanti, e, per un osservatore non inerziale uniformemente ruotante rispetto ad un osservatore inerziale, il campo di forze centrifughe.

Potenziale di una sollecitazione posizionale.

Nell'applicazione del teorema dell'energia cinetica a sistemi estesi (sistemi di punti, corpo rigido, sistemi articolati), è utile introdurre una generalizzazione della precedente nozione di potenziale, suggerita dalla definizione (i). Consideriamo una generica sollecitazione posizionale \mathcal{S} applicata al sistema, costituita da un insieme di forze \mathbf{F}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) applicate in punti P_i e dipendenti solo dalle posizioni dei punti del sistema, e da coppie di momenti \mathbf{C}_j applicate a corpi rigidi del sistema; diciamo allora che la sollecitazione \mathcal{S} è conservativa se il lavoro infinitesimo complessivo della sollecitazione è un differenziale esatto, cioè se esiste una funzione U della configurazione del sistema tale che:

$$d^*L := \sum_i \mathbf{F}_i \cdot dP_i + \sum_j \mathbf{C}_j \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j = dU \quad (4.3)$$

($\boldsymbol{\epsilon}_j$ è la rotazione infinitesima del corpo rigido a cui la j -sima coppia \mathbf{C}_j è applicata).

Un primo esempio di tale generalizzazione del concetto di potenziale si ha considerando due punti liberi A e B collegati da una molla di costante elastica k ; le due forze elastiche scambiate tra A e B non sono singolarmente conservative, ma se si considera il loro lavoro infinitesimo complessivo, esso è il differenziale della funzione $U = -(1/2)k\overline{AB}^2$, che è il *potenziale della molla*.

Un secondo esempio è quello di una coppia applicata ad un corpo rigido piano che si muove in un piano, di normale \mathbf{k} ; se $\mathbf{C} = C(\vartheta)\mathbf{k}$ è il momento della coppia e $\boldsymbol{\epsilon} = d\vartheta\mathbf{k}$ il vettore rotazione infinitesima del corpo, il lavoro infinitesimo della coppia è $d^*L = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = C(\vartheta)d\vartheta$, per cui la coppia è conservativa secondo la definizione ora introdotta, con potenziale

$$U(\vartheta) = \int^\vartheta C(\xi) d\xi ; \quad (4.4)$$

in particolare per una coppia di momento costante C_0 si ha $U = C_0\vartheta$, per una coppia elastica di momento $C = -\alpha\vartheta$ si ha $U = -(1/2)\alpha\vartheta^2$ (in entrambi i casi, a meno di inessenziali costanti additive).

Potenziale in Meccanica analitica.

Utilizzando i metodi della meccanica analitica è utile introdurre una ulteriore generalizzazione del concetto di potenziale, essenzialmente basata sul fatto che si considera ora il lavoro virtuale e non più il lavoro corrispondente a spostamenti effettivi.

Senza analizzare il caso di un singolo campo di forze, consideriamo direttamente un generico sistema olonomo, con n gradi di libertà e con vincoli bilateri, eventualmente mobili; per ogni punto P_i del sistema si ha allora $P_i = P_i(\mathbf{q}; t)$, dove $\mathbf{q} := (q_1, \dots, q_n)$ sono le coordinate libere del sistema; supponiamo che sui punti agiscano delle forze \mathbf{F}_i dipendenti dalla configurazione del sistema ed eventualmente dal tempo: $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{q}; t)$ (non si richiede quindi che si tratti di una sollecitazione posizionale). In queste ipotesi, le componenti della sollecitazione attiva del sistema (cioè i coefficienti Q_k nell'espressione del lavoro virtuale $\delta^*L = \sum_k Q_k \delta q_k$) risultano genericamente dipendere dalle coordinate e dal tempo, per cui

$$\delta^*L = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(\mathbf{q}; t) \cdot \delta P_i = \mathbf{Q}(\mathbf{q}; t) \cdot \delta \mathbf{q} . \quad (4.5)$$

Generalizzando la precedente definizione di potenziale, diremo allora che la sollecitazione attiva applicata al sistema è complessivamente conservativa, con potenziale U , se il lavoro virtuale è il *differenziale virtuale* (cioè rispetto alle sole coordinate \mathbf{q}) di una funzione $U = U(\mathbf{q}; t)$:

$$\delta^*L(\mathbf{q}; t) = \delta U(\mathbf{q}; t) \quad \text{ovvero} \quad Q_k(\mathbf{q}; t) = \frac{\partial U(\mathbf{q}; t)}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, n) . \quad (4.6)$$

È questo il potenziale che entra nella scrittura delle equazioni di Lagrange in forma conservativa, con Lagrangiana $L = T + U$.

Come esempio, consideriamo in un riferimento cartesiano $(O; x, y)$ un punto materiale A vincolato con vincolo bilatero all'asse x , la cui posizione è data da: $(A - O) = x \mathbf{i}$. Supponiamo che A sia collegato, tramite una molla di costante k , all'estremo B di un'asta OB , di lunghezza ℓ , incernierata in O e ruotante nel piano con legge di moto assegnata $\vartheta = \vartheta(t)$, essendo ϑ l'angolo che l'asta forma con l'asse x . Considerando come sistema meccanico il solo punto A , si tratta allora di un sistema con un grado di libertà e vincolo fisso e bilatero (l'asse x), soggetto alla forza elastica esercitata dalla molla, che è una forza *dipendente dal tempo*:

$$\mathbf{F} = -k(A - B) \quad \Rightarrow \quad F_x = -k(x - \ell \cos \vartheta(t)), \quad F_y = k \ell \sin \vartheta(t) .$$

Essendo lo spostamento virtuale del punto A dato da $\delta A = \delta x \mathbf{i}$, il lavoro virtuale della forza è

$$\delta^* L = \mathbf{F} \cdot \delta A = F_x \delta x = -k(x - \ell \cos \vartheta(t)) \delta x \quad \Rightarrow \quad Q_x(x, t) = -k(x - \ell \cos \vartheta(t)) .$$

Osserviamo che

$$Q_x = -k(x - \ell \cos \vartheta(t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} k(x - \ell \cos \vartheta(t))^2 \right) ;$$

pertanto la forza \mathbf{F} , dipendente dal tempo, ammette potenziale nel senso della precedente definizione (4.6), con

$$U(x, t) = -\frac{1}{2} k(x - \ell \cos \vartheta(t))^2 . \quad (4.7)$$

Tale risultato può scriversi in una forma più semplice osservando che, come ogni potenziale dipendente solo dalle coordinate \mathbf{q} è definito a meno di costanti additive (cioè di quantità che hanno derivata nulla rispetto alle coordinate), così il potenziale dipendente dal tempo non cambia sommando ad esso arbitrarie funzioni del tempo; aggiungendo all'espressione (4.7) la funzione $-(1/2)k(\ell \sin \vartheta(t))^2$ otteniamo allora

$$U(x, t) = -\frac{1}{2} k[(x - \ell \cos \vartheta(t))^2 + (\ell \sin \vartheta(t))^2] = -\frac{1}{2} k \overline{AB}^2 . \quad (4.8)$$

Pertanto ritroviamo, in questo esempio, un risultato generale, utile nelle applicazioni: *nello studio della meccanica di un generico sistema (ad esempio nello scrivere le equazioni di Lagrange), ad una molla di costante k , di estremi A e B , possiamo sempre associare il potenziale $U = -(1/2)k \overline{AB}^2$; tale potenziale può dipendere dal tempo se il moto di un estremo della molla è assegnato, mentre dipende solo dalle coordinate se gli estremi sono liberi o se più in particolare un estremo è fisso.*

Osservazione. Accenniamo ad una ulteriore possibile generalizzazione della nozione di potenziale, che consente di scrivere le equazioni di Lagrange in forma conservativa in presenza di particolari campi di forze dipendenti, oltre che dalle coordinate \mathbf{q} e dal tempo, anche (linearmente) dalle velocità $\dot{\mathbf{q}}$. A tal fine, se $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t)$ è la sollecitazione attiva, è facile verificare che se esiste una funzione $U = U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t)$ tale che

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) , \quad (4.9)$$

allora le equazioni di Lagrange (3.7) ammettono la formulazione conservativa (3.9) in termini di una funzione Lagrangiana $L := T + U$. Anche in tal caso, diremo che la sollecitazione attiva con la proprietà (4.9) è conservativa con potenziale U ; sollecitazioni di tale tipo si incontrano ad esempio in meccanica relativa (forza di Coriolis) e in elettromagnetismo (forza di Lorentz). \diamond

5 Formulazione variazionale delle equazioni di moto.

Rimandando a quanto noto dai corsi di Analisi per una trattazione più completa e rigorosa del calcolo variazionale, ci poniamo direttamente nelle ipotesi restrittive che sono sufficienti ad ottenere la formulazione variazionale delle equazioni di Lagrange e delle equazioni di Hamilton.

Stazionarietà di una funzione.

Ricordiamo brevemente la nozione di stazionarietà di una funzione reale di n variabili, $f = f(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, che supponiamo dotata di *derivate parziali prime continue*.

In un generico punto \mathbf{x} si definisce la variazione prima della funzione rispetto all'incremento \mathbf{h} come l'operatore lineare $f'_\mathbf{x}$ che ad ogni vettore $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n$ associa la funzione

$$\delta f(\mathbf{x}; \mathbf{h}) \equiv f'_\mathbf{x} \mathbf{h} := \text{grad } f \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i ; \quad (5.1)$$

se $|\mathbf{h}| = 1$, la (5.1) è la derivata direzionale della funzione nella direzione di \mathbf{h} , indicata anche con $\partial f / \partial h$ ⁽⁵⁾.

Diciamo che f è stazionaria in \mathbf{x} (ovvero, che \mathbf{x} è un punto di stazionarietà per f) se la sua variazione prima valutata in \mathbf{x} è nulla

$$f'_\mathbf{x} \mathbf{h} = 0 \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbf{R}^n .$$

In modo equivalente, fissati \mathbf{x} e \mathbf{h} , si consideri la funzione $\Phi = \Phi(\epsilon)$ definita da $\Phi(\epsilon) := f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h})$; la variazione prima definita dalla (5.1) può allora calcolarsi considerando il termine del primo ordine in ϵ dello sviluppo di Taylor di Φ , ovvero calcolando la derivata prima di Φ in $\epsilon = 0$

$$f'_\mathbf{x} \mathbf{h} = \left. \frac{d\Phi}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h}) \right|_{\epsilon=0} .$$

(Come noto, se poi il punto \mathbf{x} è un punto di massimo locale e se $f \in C^2$, esiste un intorno di \mathbf{x} in cui la forma quadratica $\sum_{i,j=1}^n (\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(\mathbf{x}) h_i h_j$ associata a f è $\leq 0 \forall \mathbf{h}$; se \mathbf{x} è un punto di minimo locale la forma quadratica è $\geq 0 \forall \mathbf{h}$).

Stazionarietà di un funzionale.

Invece di considerare funzioni di n variabili, introduciamo ora un insieme di funzioni \mathcal{D} che chiamiamo *funzioni di confronto*, e consideriamo delle applicazioni da \mathcal{D} a \mathbf{R} che ad ogni funzione di confronto u associano un numero reale $\mathcal{F}(u)$; tali applicazioni si chiamano *funzionali*. Si tratta quindi di applicazioni a valori in \mathbf{R} definite non più sullo spazio vettoriale finito-dimensionale \mathbf{R}^n , ma sull'insieme delle funzioni di confronto \mathcal{D} .

Nel seguito considereremo sempre *funzionali definiti attraverso integrali*, cioè ad esempio della forma

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x), x) dx ; \quad (5.2)$$

⁵La (5.1) è anche detta la derivata di Lie di f lungo il campo \mathbf{h} , ed indicata con $L_\mathbf{h}(f)(\mathbf{x})$.

più in generale, f può dipendere da una funzione $\mathbf{u} : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ e dalla sue derivate parziali sino ad un ordine k .

Grossolanamente, il calcolo delle variazioni analizza le proprietà di massimo e minimo dei funzionali. Qui, ci limiteremo a considerare il problema della loro *stazionarietà*; a tal fine, è sufficiente introdurre la nozione di *variazione prima* di un funzionale.

Nel calcolo della stazionarietà di un funzionale risulta molto utile il seguente risultato preliminare, detto il *Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni*.

5.1 Lemma. *Se $G : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ è continua e se per ogni funzione h continua su $[a, b]$ è*

$$\int_a^b G(t) h(t) dt = 0, \quad (5.3)$$

allora G è identicamente nulla: $G(t) = 0$.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo, supponendo che in un punto $t_0 \in (a, b)$ sia $G(t_0) \neq 0$, ad esempio $G(t_0) > 0$; allora per la continuità della funzione esiste un intorno $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ in cui $G(t) > 0$, per esempio $G(t) > G(t_0)/2$. Introduciamo una funzione continua χ_ϵ , non nulla in $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ e con integrale uguale ad uno, per cui si ha

$$\int_a^b \chi_\epsilon(t) dt = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \chi_\epsilon(t) dt = 1;$$

come funzione h , scegliamo ora $h(t) = \chi_\epsilon(t)$, per cui

$$\int_a^b G(t) h(t) dt = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} G(t) \chi_\epsilon(t) dt > \frac{G(t_0)}{2} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \chi_\epsilon(t) dt = \frac{G(t_0)}{2} > 0$$

in contraddizione con l'ipotesi (5.3). □

Tornando ad un funzionale della forma (5.2), sia \mathcal{D} dato dalle funzioni di confronto $u = u(x)$ continue per $x \in (a, b)$ insieme con la loro derivata $u'(x)$, e che verificano le condizioni al bordo

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta, \quad \alpha, \beta \text{ assegnati.}$$

Accanto alle funzioni di confronto consideriamo lo spazio vettoriale \mathcal{D}_0 (lo spazio delle *variazioni ammissibili*) delle funzioni h continue e con derivata continua in $[a, b]$, nulle in a e b :

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Fissati u e h , consideriamo la funzione $\Phi = \Phi(\epsilon)$ definita da $\Phi(\epsilon) := \mathcal{F}(u + \epsilon h)$; chiamiamo allora *variazione prima* del funzionale \mathcal{F} in u rispetto alla variazione h il funzionale $\delta\mathcal{F}(u; h)$ ⁽⁶⁾ definito da

$$\delta\mathcal{F}(u; h) := \left. \frac{d\Phi(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \int_a^b f(u(x) + \epsilon h(x), u'(x) + \epsilon h'(x), x) dx \right|_{\epsilon=0}$$

(formalmente, il calcolo della variazione prima può essere ottenuto considerando nello sviluppo di Taylor della funzione $\Phi(\epsilon)$ i termini del primo ordine in ϵ).

Diciamo che una funzione di confronto $u \in \mathcal{D}$ è un punto di stazionarietà per \mathcal{F} , ovvero che \mathcal{F} è *stazionario* in u , se la variazione prima in u è nulla:

$$\delta\mathcal{F}(u; h) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}_0.$$

⁶In analogia con la (5.1) possiamo anche indicare il funzionale $\delta\mathcal{F}(u; h)$ con $\mathcal{F}'_u h$.

Equazioni di Eulero-Lagrange di un funzionale $\mathcal{F}(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x), x) dx$.

Sia \mathcal{F} definito da

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x), x) dx, \quad \mathcal{D} = \{u : [a, b] \mapsto \mathbf{R}, u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \quad (5.4)$$

dove f ha derivate seconde continue e α e β sono fissati. Sia \mathcal{D}_0 lo spazio vettoriale delle funzioni con condizioni di annullamento al bordo

$$\mathcal{D}_0 = \{h : [a, b] \mapsto \mathbf{R}, h(a) = h(b) = 0\}.$$

Si ha allora (per semplificare la notazione, nell'integrale scriveremo u e u' invece di $u(x)$ e $u'(x)$, e lo stesso per h e h')

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u + \epsilon h) - \mathcal{F}(u) &= \int_a^b (f(u + \epsilon h, u' + \epsilon h', x) - f(u, u', x)) dx \\ &= \epsilon \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, u', x) h + \frac{\partial f}{\partial u'}(u, u', x) h' \right) dx + O(\epsilon^2); \end{aligned}$$

integrando per parti nel secondo termine dell'integrando, e tenendo conto dell'annullamento di h in a e b , segue che

$$\mathcal{F}(u + h) - \mathcal{F}(u) = \epsilon \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, u', x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right) (u, u', x) \right) h dx + O(\epsilon^2)$$

e quindi la variazione prima del funzionale è data da

$$\delta \mathcal{F}(u; h) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, u', x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right) (u, u', x) \right) h dx. \quad (5.5)$$

Pertanto dalla definizione precedentemente introdotta di stazionarietà di un funzionale segue che u è stazionario per \mathcal{F} se e solo se

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, u', x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right) (u, u', x) \right) h dx = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}_0.$$

Utilizzando il Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, risulta così provato il seguente risultato.

5.2 Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente perchè il funzionale \mathcal{F} dato dalla (5.4) sia stazionario in u è che u soddisfi l'equazione (di Eulero-Lagrange)*

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right) = \frac{\partial f}{\partial u} \quad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \quad (5.6)$$

Osservazioni.

(i) Il risultato si generalizza al caso in cui \mathcal{F} dipende da n funzioni $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ed è quindi della forma

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \int_a^b f(\mathbf{u}(x), \mathbf{u}'(x), x) dx; \quad (5.7)$$

la (5) diventa allora

$$\mathcal{F}(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{h}) - \mathcal{F}(\mathbf{u}) = \epsilon \int_a^b \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u_k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', x) \right) \right) h_k dx + O(\epsilon^2) .$$

ovvero con notazione vettoriale (e sottintendendo la dipendenza di f da \mathbf{u}, \mathbf{u}' e x)

$$\mathcal{F}(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{h}) - \mathcal{F}(\mathbf{u}) = \epsilon \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}'} \right) \right) \cdot \mathbf{h} dx + O(\epsilon^2) .$$

Per l'arbitrarietà di $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, il Teorema 5.2 si enuncia dicendo che condizione necessaria e sufficiente di stazionarietà del funzionale \mathcal{F} in \mathbf{u} è che le n funzioni (u_1, u_2, \dots, u_n) soddisfino il sistema di n equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}'} \right) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \quad \mathbf{u}(a) = \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{u}(b) = \boldsymbol{\beta} . \quad (5.8)$$

(ii) Come visto considerando le equazioni di Lagrange di un sistema meccanico, se non si ha dipendenza esplicita dalla variabile indipendente x , se cioè $f = f(\mathbf{u}(x), \mathbf{u}'(x))$, dalle equazioni (5.8) segue l'esistenza dell'integrale primo

$$J = \text{costante} : \quad J := \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u'_k} \right) u'_k - f ; \quad (5.9)$$

si ha infatti

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dx} &= \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_k} \right) u'_k + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u'_k} \right) u''_k - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} \right) u'_k - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u'_k} \right) u''_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_k} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} \right) \right) u'_k \stackrel{(5.8)}{=} 0 . \end{aligned}$$

L'esistenza di tale integrale primo è particolarmente utile nel caso $n = 1$, in quanto consente di risolvere il problema di stazionarietà utilizzando la sola equazione $J = \text{costante}$. \diamond

Formulazione variazionale delle equazioni di Lagrange: il principio di Hamilton.

Come diretta applicazione del teorema ora dimostrato, consideriamo un sistema meccanico con n gradi di libertà, nelle ipotesi in cui valgano le equazioni di Lagrange in forma conservativa. Usando le notazioni tipiche della meccanica, il parametro indipendente è ora il tempo t , e la derivata $f' = f'(t)$ di una generica funzione rispetto al tempo t è indicata con $\dot{f} = \dot{f}(t)$; le funzioni di confronto sono i movimenti $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$, con velocità $\dot{\mathbf{q}}(t)$.

Il moto del sistema, soluzione delle equazioni di Lagrange, può allora essere caratterizzato attraverso la stazionarietà di un opportuno funzionale. Se \mathcal{Q} è lo spazio di configurazione del sistema, consideriamo come funzioni di confronto i moti $\mathbf{q}(t) = \{q_k(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) con estremi fissi, cioè il sottoinsieme $\mathcal{D} \subset \mathcal{Q}$ definito da

$$\mathcal{D} = \{ \mathbf{q} : [t_0, t_1] \mapsto \mathbf{R}^n \mid \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1 \} ;$$

sia inoltre $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{Q}$ lo spazio vettoriale dei moti variati, che indichiamo con $\delta\mathbf{q}(t)$, con condizioni iniziali e finali omogenee:

$$\mathcal{D}_0 = \{ \delta\mathbf{q} : [t_0, t_1] \mapsto \mathbf{R}^n \mid \delta\mathbf{q}(t_0) = 0, \delta\mathbf{q}(t_1) = 0 \} .$$

Introduciamo il funzionale (detto *azione Hamiltoniana*)

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) := \int_a^b L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt \quad (5.10)$$

che è della forma generale (5.7) con f data dalla funzione di Lagrange del sistema; per $\mathcal{S}(\mathbf{q})$ si ha

$$\mathcal{S}(\mathbf{q} + \epsilon \delta\mathbf{q}) - \mathcal{S}(\mathbf{q}) = \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt + O(\epsilon^2) ,$$

e la variazione prima è data da

$$\delta\mathcal{S}(\mathbf{q}; \delta\mathbf{q}) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt .$$

Il teorema precedentemente dimostrato può allora essere riformulato, con terminologia più meccanica, nella forma seguente:

5.3 Principio di Hamilton. *Il moto naturale del sistema, soluzione delle equazioni di Lagrange, caratterizza la stazionarietà dell'azione Hamiltoniana $\mathcal{S}(\mathbf{q})$, rispetto ai moti con configurazioni fissate agli istanti iniziale e finale:*

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) \text{ stazionario} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} .$$

Il principio di Hamilton afferma quindi che le soluzioni delle equazioni di Lagrange caratterizzano la stazionarietà del funzionale (5.10) rispetto ai moti possibili da una assegnata *configurazione iniziale* $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ ad una assegnata *configurazione finale* $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$; le variazioni $\delta\mathbf{q}$ sono quindi arbitrarie per $t_0 < t < t_1$ e sono soggette al vincolo (configurazioni iniziali e finali fissate)

$$\delta\mathbf{q}(t_0) = 0, \quad \delta\mathbf{q}(t_1) = 0 . \quad (5.11)$$

Altri esempi di formulazione variazionale di problemi fisici.

Presentiamo schematicamente tre classici esempi di formulazioni variazionali di problemi fisici.

(1) Brachistocrona.

Un punto materiale P , di massa m , cade in un piano verticale $(O; x, y)$, con y verticale verso il basso, lungo una linea di equazione cartesiana $y = y(x)$, dal punto $O = (0, 0)$ sino al punto $A = (a, b)$; inizialmente P ha velocità di modulo v_0 .

Si vuole determinare l'equazione cartesiana $y = y(x)$ della curva γ per cui il tempo di percorrenza da O ad A sia minimo.

Dall'equazione di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m v^2 - mgy = \frac{1}{2}m v_0^2$$

segue che $v = \sqrt{v_0^2 + 2gy}$, e quindi

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}} dx \quad (ds = \sqrt{1+y'^2} dx, \quad y' = \frac{dy}{dx});$$

il tempo di percorrenza lungo γ è allora

$$\mathcal{T}(\gamma) = \int_{\gamma} dt = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}} dx$$

ed è quindi un funzionale sullo spazio delle curve nel piano.

Il funzionale ha (con ovvi cambiamenti di notazione) la forma generale (5.2) con

$$f(y, y', x) = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}};$$

poichè in realtà f non dipende esplicitamente da x , la curva γ è determinabile (anzichè dalla (5.6)) direttamente dall'integrale primo

$$J = \text{costante} : \quad J = \frac{\partial f}{\partial y'} y' - f \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}} = \frac{1}{c}$$

con c costante arbitraria. Esplicitando rispetto a y' si ha così l'equazione differenziale (a variabili separabili)

$$y'^2 = \frac{c^2}{v_0^2 + 2gy} - 1 \quad (5.12)$$

nella funzione incognita $y = y(x)$; si dimostra che la soluzione $y = y(x)$ di tale equazione rappresenta un tratto di *cicloide* tra O ed A ⁽⁷⁾.

⁷Indichiamo brevemente il procedimento: cerchiamo la soluzione delle (5.12) in forma parametrica $x = x(u)$, $y = y(u)$, con

$$x = x(u) = \mu + \beta(u - \sin u), \quad y = y(u) = \alpha + \beta \cos u$$

essendo α , β e μ costanti da determinarsi; essendo $dx/du = \beta(1 - \cos u)$, $dy/du = -\beta \sin u$, segue che

(2) Catenaria omogenea.

Consideriamo un filo omogeneo pesante, di peso specifico p e lunghezza costante ℓ , in equilibrio in un piano verticale $(O; x, y)$, con y verticale volto verso l'alto. Supponiamo che il filo abbia estremi fissi posti alla stessa quota e a distanza $2a$ (è quindi $\ell > 2a$); senza perdita di generalità scegliamo allora l'asse x passante per A e B e l'asse y come asse mediano, per cui $A = (-a, 0)$ e $B = (a, 0)$.

Vogliamo determinare la curva γ , nella forma cartesiana $y = y(x)$, secondo cui si dispone il filo in equilibrio.

Essendo il peso una forza posizionale e conservativa, per il teorema della stazionarietà del potenziale la configurazione di equilibrio rende stazionario il potenziale del peso, rispetto a tutte le configurazioni che rispettano il vincolo che la lunghezza ℓ sia costante; essendo U e ℓ dati rispettivamente da

$$U = - \int_{\gamma} p y ds = - \int_{-a}^a p y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \ell = \int_{\gamma} ds = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx$$

possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e studiare la stazionarietà del funzionale

$$\mathcal{F}(y) = - \int_{-a}^a p y \sqrt{1 + y'^2} dx + \lambda \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \Rightarrow \quad f(y, y', x) = (\lambda - p y) \sqrt{1 + y'^2}$$

dove λ (moltiplicatore di Lagrange) è una costante incognita.

Anche in questo caso, f non dipende esplicitamente dalla variabile indipendente x , per cui possiamo utilizzare l'esistenza dell'integrale primo (5.9)

$$J = \text{costante} : \quad J = \frac{\partial f}{\partial y'} y' - f \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda - p y}{\sqrt{1 + y'^2}} = \beta$$

con β costante arbitraria. Esplicitando rispetto a y' si ottiene allora l'equazione differenziale

$$y'^2 = \frac{1}{\beta^2} (\lambda - p y)^2 - 1 ; \tag{5.13}$$

$y'(x) = -\sin u / (1 - \cos u)$; sostituendo y e y' nell'equazione differenziale (5.12) ed imponendo che sia soddisfatta identicamente per ogni u otteniamo per α e β le espressioni

$$\alpha = \frac{c^2}{4g} - \frac{v_0^2}{2g}, \quad \beta = -\frac{c^2}{4g}$$

mentre μ e c sono indeterminati. La soluzione generale è così data dalla curva di equazioni parametriche

$$x(u) = \mu - \frac{c^2}{4g} (u - \sin u) \quad y(u) = -\frac{v_0^2}{4g} + \frac{c^2}{4g} (1 - \cos u) .$$

Le costanti c , μ ed i valori u_0 , u_1 del parametro u corrispondenti ai punti O ed A si determinano infine imponendo il passaggio per O ed A , cioè dal sistema delle quattro condizioni

$$\begin{array}{ll} \text{passaggio per } O & \mu - \frac{c^2}{4g} (u_0 - \sin u_0) = 0, \quad -\frac{v_0^2}{4g} + \frac{c^2}{4g} (1 - \cos u_0) = 0, \\ \text{passaggio per } A & \mu - \frac{c^2}{4g} (u_1 - \sin u_1) = a, \quad -\frac{v_0^2}{4g} + \frac{c^2}{4g} (1 - \cos u_1) = b. \end{array}$$

si tratta di un'equazione a variabili separabili, la cui soluzione generale (*catenaria omogenea*) è

$$y(x) = \frac{\lambda}{p} + \frac{\beta}{p} \cosh\left(\frac{px}{\beta} + c\right).$$

Nell'esempio ora considerato, le costanti λ e c si determinano in funzione della costante β imponendo le condizioni al contorno $y(-a) = 0$, $y(a) = 0$, cioè il passaggio della catenaria per A e B ; abbiamo così $c = 0$ e $\lambda = -\beta \cosh(pa/\beta)$, per cui la configurazione del filo è data da

$$y(x) = \frac{\beta}{p} \left(\cosh\left(\frac{px}{\beta}\right) - \cosh\left(\frac{pa}{\beta}\right) \right) :$$

se supponiamo che il filo sia appeso, la condizione $y(x) \leq 0$ per $-a \leq x \leq a$ implica che sia $\beta > 0$, se viceversa abbiamo un arco compresso con $y(x) \geq 0$ allora deve essere $\beta < 0$.

La costante β si ottiene infine dalla condizione che la lunghezza del filo è assegnata: $\ell = \int_0^\ell ds = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx$, da cui segue l'equazione trascendente in β

$$\ell = (2\beta/p) \sinh(pa/\beta) ;$$

tenendo presente la condizione $\ell > 2a$, si dimostra che tale equazione ha una sola soluzione (sia per β positivo che per β negativo).

(3) Il principio di Fermat e l'ottica geometrica.

Nell'approssimazione dell'ottica geometrica, consideriamo la propagazione di un raggio luminoso in un mezzo materiale di *indice di rifrazione* n , da un punto A ad un punto B , lungo una curva γ . Come noto, se c è la velocità di propagazione nel vuoto, la velocità v di propagazione nel mezzo è $v = c/n$.

Essendo $dt = ds/v = (n/c)ds$ il tempo impiegato dal raggio per percorrere un tratto ds di curva, il tempo di percorrenza tra A e B lungo la curva γ è dato dal funzionale

$$\mathcal{T}(\gamma) = \frac{1}{c} \int_\gamma n ds . \quad (5.14)$$

Secondo il principio di Fermat, *la propagazione del raggio luminoso tra A e B avviene lungo quella curva γ per cui il tempo \mathcal{T} è minimo.*

Le leggi dell'ottica geometrica sono quindi in linea di principio deducibili dal principio di stazionarietà

$$\delta\mathcal{T}(\gamma; \delta\gamma) = 0 . \quad (5.15)$$

Applicando la (5.15) si ottengono ad esempio noti risultati, tra i quali:

(i) se il mezzo è otticamente omogeneo, cioè se ha indice di rifrazione costante, le (5.14) e (5.15) implicano il minimo della lunghezza, per cui si ha propagazione lungo rette;

(ii) se il raggio si propaga in un mezzo omogeneo (indice di rifrazione costante), riflettendosi su una superficie piana, utilizzando la (5.15) si deduce la nota legge dell'uguaglianza dell'angolo di incidenza i e di riflessione r ;

(iii) se il raggio si propaga passando da un mezzo omogeneo di indice di rifrazione n_1 ad un mezzo omogeneo di indice di rifrazione n_2 , dalla (5.15) segue la legge di Snell: $n_1 \sin i = n_2 \sin r$, essendo i e r gli angoli di incidenza e rifrazione.

(iv) se consideriamo un mezzo piano non omogeneo, con indice di rifrazione $n = n(x, y)$, il raggio segue una traiettoria di equazione cartesiana $y = y(x)$, soluzione dell'equazione differenziale

$$n y'' = (1 + y'^2) \left(\frac{\partial n}{\partial y} - y' \frac{\partial n}{\partial x} \right), \quad n = n(x, y), \quad y = y(x).$$

Tale equazione può essere scritta in modo più intrinseco nella forma

$$n c = |\text{grad } n \wedge \mathbf{t}| \tag{5.16}$$

essendo $c = c(x)$ la curvatura della curva $y = y(x)$ e \mathbf{t} il versore tangente della curva stessa. Dalla (5.16) riotteniamo il risultato (i), corrispondente alla soluzione particolare $c = 0$, $n = \text{costante}$; abbiamo anche la soluzione particolare $c = 0$ e \mathbf{t} parallelo a $\text{grad } n$: in un mezzo “stratificato” (in cui l’indice di rifrazione varia solo lungo una direzione, per cui $\text{grad } n$ ha direzione costante) il raggio luminoso si propaga lungo rette parallele al gradiente di n .

6 Introduzione alla stabilità.

Richiami sui sistemi dinamici.

L'analisi della stabilità del moto e dell'equilibrio si può effettuare utilizzando il modello di sistema dinamico. Come esempio introduttivo, consideriamo un sistema olonomo con n gradi di libertà, per il quale si possano scrivere le equazioni di Lagrange in forma conservativa; sotto ipotesi del tutto generali, la Lagrangiana assume la forma

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathcal{T}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + c(\mathbf{q}, t) . \quad (6.1)$$

Evidenziando i termini con le derivate seconde $\ddot{\mathbf{q}}$, le equazioni di Lagrange si possono allora scrivere come sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine, lineari nel vettore $\ddot{\mathbf{q}}$ delle accelerazioni:

$$\mathcal{T}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) . \quad (6.2)$$

Essendo \mathcal{T} invertibile, tali equazioni si possono porre in forma normale, e quindi scrivere anche come sistema di $2n$ equazioni del primo ordine in forma normale, ad esempio introducendo, accanto alle n variabili \mathbf{q} , n nuove variabili $\mathbf{w} := \dot{\mathbf{q}}$; si ha allora

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{w}} = \mathcal{T}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{w}, t) \end{cases} \quad (6.3)$$

Generalizzando l'esempio del caso lagrangiano, si definisce *sistema dinamico* un sistema di m equazioni differenziali del primo ordine in forma normale nell'incognita $\mathbf{x} \in \mathcal{S}^m$, con \mathcal{S}^m varietà m -dimensionale (nel caso lagrangiano, $m = 2n$)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) . \quad (6.4)$$

Il sistema dinamico è *autonomo* se $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ (questo fatto si verifica ad esempio per un sistema lagrangiano con vincoli fissi). Per un sistema autonomo, *punto critico* (o punto di equilibrio con linguaggio meccanico) è ogni soluzione $\bar{\mathbf{x}}$ dell'equazione $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = 0$.

Geometricamente, possiamo quindi rappresentare lo stato del sistema come un punto \mathbf{x} in una varietà m -dimensionale \mathcal{S}^m , detta lo *spazio degli stati* (o delle fasi) del sistema. Ad esempio, nel caso lagrangiano considerato prima le equazioni di Lagrange (6.3) corrispondono al sistema dinamico (6.4) con

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathcal{T}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{w}, t) \end{pmatrix} .$$

Sempre nel caso lagrangiano, introdotto un piano cartesiano in cui sull'asse delle ascisse rappresentiamo \mathbf{q} e sull'asse delle ordinate $\dot{\mathbf{q}}$ (ovviamente, tale rappresentazione è realistica solo per $n = 1$, mentre per sistemi con più di un grado di libertà aiuta solo l'intuizione), possiamo vedere l'evoluzione del sistema come una curva $\mathbf{x}(t)$ nel piano, mentre le eventuali configurazioni di equilibrio $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{q}}, 0)$ sono date da punti sull'asse delle ascisse.

Per dare una definizione precisa di stabilità, è opportuno precisare quantitativamente la nozione di vicinanza tra due stati \mathbf{x} e \mathbf{x}' del sistema; a questo scopo, introduciamo la **norma** $\| \cdot \|$ dello stato

$$\|\mathbf{x}\| := \max_{1 \leq k \leq m} |x_k| \quad (6.5)$$

e la **distanza** $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ tra due stati \mathbf{x} e \mathbf{x}'

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \max_{1 \leq k \leq m} |x_k - x'_k|. \quad (6.6)$$

Un intorno $\mathcal{B}_\varrho(\mathbf{x}_0)$ di \mathbf{x}_0 di raggio ϱ è l'insieme degli stati \mathbf{x} con $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \varrho$.

Osservazione. Come noto, questa non è l'unica definizione di norma possibile, ma per spazi finito-dimensionali si possono introdurre differenti norme tra loro equivalenti (cioè, se d e \tilde{d} sono le distanze associate a due norme, è sempre possibile determinare due costanti positive α e β tali che $\alpha d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \leq \tilde{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \leq \beta d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$).

Ad esempio, se come seconda norma consideriamo quella euclidea

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}, \quad \tilde{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x'_k)^2}, \quad (6.7)$$

le due distanze \tilde{d} e d sono equivalenti in \mathbf{R}^n , con $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{n}$.

Per $m = 2$, $\mathcal{B}_\varrho(\mathbf{x}_0)$ è, nello spazio degli stati \mathcal{S}^2 , un quadrato di centro \mathbf{x}_0 e lato 2ϱ utilizzando la norma (6.5), mentre è un disco con lo stesso centro e raggio ϱ utilizzando la norma euclidea (6.7): la generalizzazione a dimensioni maggiori è ovvia. \diamond

Stabilità secondo Liapunov.

Ricordiamo che, sotto ipotesi sufficientemente generali, il problema di Cauchy

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

ha una ed una sola soluzione, dipendente con continuità dai dati iniziali,

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$$

in un intervallo $[t_0, T)$. Nel seguito *supporremo invece che la soluzione esista globalmente*, cioè per ogni $t \geq t_0$.

Grossolanamente, il problema della stabilità di una particolare soluzione $\bar{\mathbf{x}}(t)$ (con linguaggio meccanico, il problema della stabilità del moto) corrispondente ad un dato iniziale $\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0$ è il problema di determinare il comportamento delle soluzioni del sistema dinamico corrispondenti a dati iniziali vicini a $\bar{\mathbf{x}}_0$, per ogni tempo $t \geq t_0$: ci si chiede cioè se, partendo “vicini”, gli stati del sistema rimangono “vicini” per ogni tempo.

Seguendo l'impostazione di Liapunov, possiamo ora dare la seguente definizione di stabilità di una generica soluzione.

6.1 Definizione. La soluzione di (6.4) con dato iniziale \mathbf{x}_0 è stabile se per ogni $\epsilon > 0$ è possibile determinare $\delta_\epsilon = \delta(\epsilon, t_0)$ tale che per ogni soluzione $\mathbf{x}'(t)$, con condizione iniziale $\mathbf{x}'_0 \in \mathcal{B}_{\delta_\epsilon}(\mathbf{x}_0)$, si ha $\mathbf{x}'(t) \in \mathcal{B}_\epsilon(\mathbf{x}(t))$ per $t \geq t_0$.

La soluzione $\mathbf{x}(t)$ di (6.4) è asintoticamente stabile se è stabile e se $d(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t)) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

Una soluzione $\mathbf{x}(t)$ non stabile è instabile.

Evidentemente, la definizione di stabilità ora introdotta è nella maggior parte dei casi poco operativa, poiché richiede l'integrazione completa delle equazioni di moto, anche quando si voglia

analizzare la stabilità di punti critici (configurazioni di equilibrio). Per questo sorge l'esigenza di avere dei criteri che consentano, eventualmente sotto ipotesi restrittive, di dare risposta al problema della stabilità senza dover risolvere completamente il problema del moto.

Accenniamo qui a due tecniche, chiamate *il primo ed il secondo metodo di Liapunov*, che forniscono delle condizioni sufficienti per determinare la stabilità o l'instabilità delle soluzioni di un sistema dinamico, in particolare dei suoi punti critici.

Il primo metodo si basa sulla linearizzazione delle equazioni (6.4) nell'intorno della soluzione che si intende analizzare, e consente di ottenere informazioni sulla stabilità di soluzioni del sistema non lineare dall'analisi del sistema linearizzato; il secondo metodo (che vale per sistemi dinamici autonomi) è invece basato sulla determinazione di una funzione con particolari proprietà di evoluzione durante il moto del sistema.

Primo metodo di Liapunov.

Sia dato il sistema del primo ordine della forma (6.4), che ammette una soluzione $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(t)$, con $\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0$. Sia inoltre $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ la soluzione del sistema corrispondente al dato iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Introducendo per comodità la variabile

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) := \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (6.8)$$

che misura la differenza tra le due soluzioni, abbiamo allora

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) + \boldsymbol{\epsilon}(t)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\epsilon}, t) - \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, t) \\ \Rightarrow \dot{\epsilon}_i &= \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right|_{x_k = \bar{x}_k} \epsilon_k + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

dove ... indicano termini di ordine ≥ 2 in $\|\boldsymbol{\epsilon}\|$. Introducendo la matrice Jacobiana \mathcal{J} del campo \mathbf{X} , di componenti

$$J_{ik} := \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right|_{x_k = \bar{x}_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

si ha così il *sistema linearizzato* associato al sistema (6.4)

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathcal{J} \boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{ovvero} \quad \dot{\epsilon}_i = \sum_{k=1}^n J_{ik} \epsilon_k \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6.9)$$

con dato iniziale $\boldsymbol{\epsilon}_0 = \mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0$, costituito da n equazioni differenziali lineari del primo ordine, omogenee. Alla soluzione $\bar{\mathbf{x}}(t)$ di (6.4) corrisponde la soluzione $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(t) = 0$ di (6.9).

Supporremo d'ora in poi che la matrice Jacobiana sia costante: tale ipotesi è sicuramente soddisfatta se il sistema è autonomo e si considerano i suoi punti critici $\bar{\mathbf{x}}$, soluzioni dell'equazione $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = 0$ (ma può essere verificata anche nel caso di sistemi non autonomi): il sistema linearizzato è quindi un sistema del primo ordine, lineare e a coefficienti costanti. Sussiste allora il seguente risultato (di cui non diamo la dimostrazione).

6.2 Teorema (Liapunov). Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori della matrice Jacobiana \mathcal{J} , soluzioni dell'equazione (algebraica di grado n)

$$\det(\mathcal{J} - \lambda I) = 0. \quad (6.10)$$

Allora:

(i) Se gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa: $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), la soluzione $\bar{\mathbf{x}}$ del sistema non lineare (6.4) è asintoticamente stabile.

(ii) Se almeno un autovalore $\bar{\lambda}$ ha $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > 0$, la soluzione $\bar{\mathbf{x}}$ del sistema non lineare (6.4) è instabile.

(iii) Se $\operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), la soluzione $\bar{\mathbf{e}} = 0$ del sistema linearizzato (6.9) è stabile, ma non si può dire nulla sulla stabilità o instabilità della soluzione $\bar{\mathbf{x}}$ del sistema non lineare (6.4).

Secondo metodo di Liapunov.

Dato il sistema dinamico autonomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$, che ammette un punto critico $\bar{\mathbf{x}}$, sia $H = H(\mathbf{x})$ una funzione definita sullo spazio degli stati; senza perdita di generalità, supponiamo poi che $H(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

La derivata totale di H rispetto al tempo (detta anche la derivata lungo il flusso del campo vettoriale \mathbf{X}) è definita da

$$\frac{dH}{dt} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_k} \dot{x}_k \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_k} X_k(\mathbf{x}) = \mathbf{X} \cdot \operatorname{grad} H \quad (6.11)$$

ed è quindi anch'essa una funzione definita sullo spazio degli stati.

Diamo la seguente definizione.

6.3 Definizione. Una funzione $H = H(\mathbf{x})$ definita sullo spazio degli stati, con $H(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, è una funzione di Liapunov del sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ se esiste un intorno $\mathcal{B}(\bar{\mathbf{x}})$ tale che:

(i) $H \in C^1(\mathcal{B}(\bar{\mathbf{x}}))$;

(ii) H ha in $\bar{\mathbf{x}}$ un minimo locale isolato (cioè, $H(\mathbf{x}) > 0$ per $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbf{x}})$, $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$);

(iii) per $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbf{x}})$ la derivata lungo il flusso è non positiva: $dH/dt \leq 0$.

Vale allora il seguente risultato.

6.4 Teorema (Liapunov). Sia $\bar{\mathbf{x}}$ un punto critico del sistema dinamico autonomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$.

(i) Se il sistema ammette una funzione di Liapunov H , il punto critico $\bar{\mathbf{x}}$ è stabile.

(ii) Se la funzione H è strettamente decrescente lungo il flusso: $dH/dt < 0$, il punto critico $\bar{\mathbf{x}}$ è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Dimostriamo solo la parte (i) del teorema, cioè la parte concernente la stabilità.

Per semplicità di notazione, nella dimostrazione assumiamo, senza perdita di generalità, che il punto critico sia l'origine nello spazio degli stati: $\bar{\mathbf{x}} = 0$, e che sia $H(\bar{\mathbf{x}}) = 0$; per ogni $a > 0$, indichiamo inoltre con \mathcal{B}_a l'intorno del punto critico di raggio a : $\mathcal{B}_a = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < a\}$.

Sia \mathcal{B}_h l'intorno in cui H è, per ipotesi, di classe C^1 e con un minimo isolato in $\bar{\mathbf{x}} = 0$. Fissato allora arbitrariamente ϵ , con $0 < \epsilon < h$, sia $m_\epsilon > 0$ il minimo di H sulla frontiera di \mathcal{B}_ϵ . Poichè H ha un minimo isolato nell'origine ed è continua, fissato arbitrariamente $k < m_\epsilon$ si può trovare δ_ϵ con $0 < \delta_\epsilon < \epsilon$ tale che $H(\mathbf{x}) < k$ per $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\delta_\epsilon}$.

Consideriamo ora una generica condizione iniziale $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}_{\delta_\epsilon}$, da cui segue che $H(\mathbf{x}_0) < k$; poichè per l'ipotesi (iii) H non cresce lungo il flusso, per ogni $t \geq t_0$ è allora $H(\mathbf{x}) < k$; questo fatto ci permette di concludere che per ogni t si ha $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}_\epsilon$: se infatti ad un istante t' fosse $\|\mathbf{x}(t')\| > \epsilon$, dovrebbe per la continuità del flusso esistere un tempo $t'' < t'$ in cui $\mathbf{x}(t'')$ è sulla frontiera di \mathcal{B}_ϵ , ma allora si avrebbe $H(\mathbf{x}(t'')) \geq m_\epsilon > k$.

In conclusione, per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni condizione iniziale $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}_{\delta_\epsilon}$ si ha $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}_\epsilon$ per ogni $t \geq t_0$, e quindi $\bar{\mathbf{x}} = 0$ è un punto critico stabile secondo la definizione di Liapunov. \square

Esempi. Diamo ora alcuni esempi di applicazione dei due metodi di Liapunov.

(1) Equazione di Van der Pol.

Consideriamo l'oscillatore non lineare di equazione

$$\ddot{y} + y = a(1 - y^2)\dot{y} \quad (a > 0) ; \quad (6.12)$$

la (6.12) è l'equazione di Van der Pol, importante nella teoria dei circuiti non lineari. Questa equazione può scriversi in forma di sistema dinamico autonomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \text{con } \mathbf{x} := \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ a(1 - y^2)\dot{y} - y \end{pmatrix},$$

ed ha chiaramente come unico punto critico $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$.

Dalla forma del campo \mathbf{X} segue che la matrice Jacobiana è data da

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2ay\dot{y} - 1 & a(1 - y^2) \end{pmatrix},$$

e quindi corrisponde, valutata nel punto critico, alla matrice costante

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

L'equazione agli autovalori per \mathcal{J} ha soluzioni

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

da cui risulta che per ogni $a > 0$ entrambi gli autovalori (reali per $a \geq 2$, complessi per $a < 2$) hanno parte reale positiva: in base al primo metodo di Liapunov, concludiamo allora che il punto critico è instabile per ogni $a > 0$. \diamond

(2) Sistema di Lotka-Volterra.

Consideriamo il sistema dinamico dato da due equazioni non lineari nelle variabili $u, v \geq 0$,

$$\begin{cases} \dot{u} = u(a - bv) \\ \dot{v} = v(du - c) \end{cases} \quad (a, b, c, d > 0) \quad (6.13)$$

(in un ecosistema *preda-predatore*, u rappresenta la popolazione di prede, v la popolazione di predatori, i punti critici le popolazioni delle due specie all'equilibrio).

Definendo $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, la (6.13) corrisponde al sistema dinamico autonomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u(a - bv) \\ v(du - c) \end{pmatrix}$$

che ha due punti critici:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0), \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = (c/d, a/b).$$

Dalla forma del campo \mathbf{X} segue che la matrice Jacobiana è data da

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a - bv & -bu \\ dv & du - c \end{pmatrix}.$$

Analisi del punto critico $\bar{\mathbf{x}}_1$. Valutando $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ nel punto critico $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$, otteniamo la matrice costante

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = -c :$$

essendo per ipotesi $a > 0$, in base al primo metodo di Liapunov concludiamo allora che il punto critico $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$ è instabile.

Analisi del punto critico $\bar{\mathbf{x}}_2$. Valutando $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ nel punto critico $\bar{\mathbf{x}}_2 = (c/d, a/b)$, otteniamo la matrice costante

$$\mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -cb/d \\ ad/b & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = \mp \sqrt{-ac};$$

essendo per ipotesi $a, c > 0$, gli autovalori sono immaginari puri, e quindi con parte reale nulla: il primo metodo di Liapunov non consente allora conclusioni sulla stabilità o instabilità del punto critico $\bar{\mathbf{x}}_2$.

Possiamo analizzare questo caso con il secondo metodo di Liapunov; a questo fine, consideriamo la funzione

$$H(\mathbf{x}) := du + bv - c \log u - a \log v - a - c + c \log \frac{c}{d} + a \log \frac{a}{b}, \quad (6.14)$$

in cui i termini additivi costanti sono stati inseriti in modo che sia $H(\bar{\mathbf{x}}_2) = 0$.

Osserviamo ora che:

- (i) in un intorno di $\bar{\mathbf{x}}_2$ tale funzione è ovviamente di classe C^1 ;
(ii) H ha in $\bar{\mathbf{x}}_2$ un minimo isolato (dall'analisi della funzione $H(u, v)$ si deduce infatti che in $\bar{\mathbf{x}}_2$ è $H_u = 0, H_v = 0, \det H > 0, H_{uu} > 0$);
(iii) H è una costante del moto per il sistema dinamico, essendo nulla la sua derivata temporale lungo il flusso del campo vettoriale:

$$\frac{dH}{dt} = H_u \dot{u} + H_v \dot{v} \stackrel{(6.13)}{=} \left(d - \frac{c}{u}\right)(au - buv) + \left(b - \frac{a}{v}\right)(duv - cv) = 0.$$

La funzione è quindi una funzione di Liapunov per il sistema, per cui il secondo metodo di Liapunov ci assicura che il punto critico $\bar{\mathbf{x}}_2$ è un punto critico stabile ⁽⁸⁾. \diamond

(3) Sistema di Lorenz.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali nelle variabili u, v, w

$$\begin{cases} \dot{u} = a(v - u), \\ \dot{v} = bu - v - uw \\ \dot{w} = uv - cw \end{cases} \quad (6.15)$$

con $a, b, c > 0$ ⁽⁹⁾. Il sistema (6.15) si scrive quindi nella forma di sistema dinamico con

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a(v - u) \\ bu - v - uw \\ uv - cw \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Se $b \leq 1$ si ha un solo punto critico:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

mentre per $b > 1$ oltre a \mathbf{x}_0 si hanno altri due punti critici:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{c(b-1)} \\ \sqrt{c(b-1)} \\ b-1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{c(b-1)} \\ -\sqrt{c(b-1)} \\ b-1 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Dalla forma (6.16) del campo \mathbf{X} segue che la matrice Jacobiana è

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ b-w & -1 & -u \\ v & u & -c \end{pmatrix}.$$

⁸Se si considerano le equazioni per il moto linearizzato attorno a questo punto critico, ponendo $u = c/d + \epsilon, v = a/b + \eta$, otteniamo dal sistema (6.13) il sistema linearizzato $\dot{\epsilon} = -(bc/d)\eta, \dot{\eta} = (ad/b)\epsilon$, da cui segue che $\ddot{\epsilon} + ac\epsilon = 0, \ddot{\eta} + ac\eta = 0$: ϵ ed η sono quindi soluzioni dell'equazione dell'oscillatore armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{ac}$.

⁹Con $a = 10, c = 8/3$, questo sistema fu proposto da Lorenz per modellizzare fenomeni convettivi nella circolazione atmosferica; la fenomenologia più interessante si ha poi per valori di b maggiori di 1.

Analisi di \mathbf{x}_0 : indicando con \mathcal{J}_0 la matrice ottenuta valutando \mathcal{J} in corrispondenza al punto \mathbf{x}_0 abbiamo che gli autovalori di \mathcal{J}_0 sono:

$$\lambda_1 = -c, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-(a+1) \mp \sqrt{(a+1)^2 + 4a(b-1)}}{2};$$

pertanto per $b \leq 1$ gli autovalori sono reali e negativi, e il punto critico è asintoticamente stabile, per $b > 1$ il terzo autovalore è positivo e quindi il punto critico è instabile ⁽¹⁰⁾.

Analisi di \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 . Indicando con \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 le matrici ottenute valutando \mathcal{J} in corrispondenza ai punti critici \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 (che esistono per $b > 1$), si verifica che le due matrici hanno gli stessi autovalori, soluzioni dell'equazione algebrica di terzo grado

$$\lambda^3 + (1+a+c)\lambda^2 + c(a+b)\lambda + 2ac(b-1) = 0.$$

A titolo di esempio, se

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 1$$

gli autovalori sono

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2},$$

ed hanno quindi parte reale negativa: pertanto \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 sono asintoticamente stabili.

(4) Oscillatore smorzato, lineare e non lineare.

Consideriamo anzitutto un oscillatore smorzato lineare, di equazione

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (\alpha > 0) \quad (6.19)$$

(ricordiamo che nel caso meccanico il termine lineare nella velocità rappresenta una forza di smorzamento viscoso). Risolvendo direttamente l'equazione differenziale, che in questo caso si integra banalmente, o scrivendola in forma di sistema dinamico autonomo

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{X}(\mathbf{u}), \quad \text{con } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -\alpha \dot{x} - \omega^2 x \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

si deduce che gli autovalori relativi all'unico punto critico $\bar{\mathbf{u}} = (0, 0)$ sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}}{2} \quad (6.21)$$

ed hanno quindi parte reale negativa, per ogni valore di ω : il primo metodo di Liapunov consente allora di affermare che il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.

Allo stesso risultato si perviene con il secondo metodo di Liapunov. Come funzione di Liapunov, introduciamo la funzione

$$H(\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}) + \Lambda(\mathbf{u}) \quad (6.22)$$

$$E(\mathbf{u}) = E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2, \quad \Lambda(\mathbf{u}) = \Lambda(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(\dot{x} + \alpha x)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

¹⁰Al variare del parametro b , il punto critico \mathbf{x}_0 è l'unico punto per $b < 1$ ed è stabile, mentre per $b > 1$ diventa instabile, mentre esistono altri punti critici: è questo un esempio di una fenomenologia frequente, detta del *cambio di stabilità*.

(E rappresenta l'energia meccanica dell'oscillatore non smorzato). È anzitutto immediato osservare che il punto di equilibrio è un minimo isolato di H , essendo

$$H(0,0) = 0, \quad H(x,\dot{x}) > 0 \quad \text{per } x \neq 0, \dot{x} \neq 0.$$

Per quanto riguarda la derivata lungo il flusso, calcoliamo separatamente le derivate dE/dt e $d\Lambda/dt$. Si ha rispettivamente

$$\frac{dE}{dt} \stackrel{(6.22)}{=} \dot{x}\ddot{x} + \omega^2 x \dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} + \omega^2 x) \stackrel{(6.19)}{=} \dot{x}(-\alpha \dot{x}) = -\alpha \dot{x}^2 \leq 0$$

($dE/dt = 0$ nei punti di inversione del moto, in cui $x \neq 0, \dot{x} = 0$) e

$$\frac{d\Lambda}{dt} \stackrel{(6.22)}{=} (\dot{x} + \alpha x)(\ddot{x} + \alpha \dot{x}) + \omega^2 x \dot{x} \stackrel{(6.19)}{=} (\dot{x} + \alpha x)(-\omega^2 x) + \omega^2 x \dot{x} = -\alpha \omega^2 x^2 \leq 0$$

($d\Lambda/dt = 0$ quando il sistema passa per l'origine, in cui $x = 0, \dot{x} \neq 0$).

Sommando ora questi due risultati abbiamo

$$\frac{dH}{dt} = -\alpha(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

per cui $dH/dt < 0$ durante il moto. H è quindi effettivamente una funzione di Liapunov del sistema con derivata lungo il flusso strettamente negativa, e permette quindi di stabilire la stabilità asintotica della posizione di equilibrio (le funzioni E e Λ sono anch'esse funzioni di Liapunov, ma prese separatamente ci assicurerebbero solo la stabilità e non la stabilità asintotica).

Osservazione. Se nell'equazione ora analizzata consideriamo invece del termine $\alpha \dot{x}$ il termine $-\alpha \dot{x}$ (meccanicamente, invece di uno smorzamento viscoso consideriamo una forza repulsiva lineare nella velocità), con considerazioni del tutto simili alle precedenti deduciamo che gli autovalori sono dati da

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}}{2}$$

per cui, per ogni valore di ω , hanno parte reale positiva: in base al primo metodo di Liapunov, la posizione di equilibrio è quindi instabile.

Considerando la funzione H data dalla (6.22), essa ha ora derivata temporale strettamente positiva: $dH/dt = \alpha(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) > 0$; la funzione H (inizialmente positiva per ogni dato iniziale nell'intorno dello stato di equilibrio $(0,0)$) cresce quindi indefinitamente per $t > 0$, e questo è sufficiente per concludere che il punto di equilibrio è instabile; in caso contrario, se cioè per ogni $\epsilon > 0$ esistesse δ_ϵ tale che $\|\mathbf{u}(t)\| < \epsilon$ per ogni dato iniziale $\|\mathbf{u}_0\| < \delta_\epsilon$, H dovrebbe rimanere limitata. \diamond

Il caso non lineare.

Consideriamo ora un oscillatore di equazione

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x}^{2p+1} + \omega^2 x = 0 \quad (p \geq 1) \tag{6.23}$$

corrispondente ad uno smorzamento dato da una forza (per unità di massa) $F(\dot{x}) = -\alpha \dot{x}^{2p+1}$ non lineare nella velocità; il punto critico è ancora $\bar{\mathbf{u}} = (0,0)$.

Consideriamo il primo metodo di Liapunov. L'equazione linearizzata attorno a $\bar{\mathbf{u}}$ è data da

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{6.24}$$

per cui gli autovalori sono immaginari puri: $\lambda = \pm i\omega$: il primo metodo di Liapunov non ci consente quindi di trarre conclusioni sulla stabilità del punto di equilibrio.

Applichiamo il secondo metodo, considerando la funzione

$$H(\mathbf{u}) = H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 . \quad (6.25)$$

Si ha

$$H(0, 0) = 0, \quad H(x, \dot{x}) > 0 \quad \text{per } x \neq 0, \quad \dot{x} \neq 0 \quad (6.26)$$

ed inoltre la derivata lungo il flusso è non crescente, essendo

$$\frac{dH}{dt} \stackrel{(6.25)}{=} \dot{x}\ddot{x} + \omega^2 x\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} + \omega^2 x) \stackrel{(6.23)}{=} \dot{x}(-\alpha\dot{x}^{2p+1}) = -\alpha\dot{x}^{2p+2} \leq 0 ; \quad (6.27)$$

Pertanto H è una funzione di Liapunov del sistema e, per il secondo metodo di Liapunov, il punto di equilibrio è stabile (la funzione (6.25) non ci consente però di dedurre che si tratti di stabilità asintotica).

(5) Un esempio di analisi di stabilità del moto.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali nelle variabili y , z dato dalle due equazioni non lineari

$$\begin{cases} \ddot{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}, \\ \dot{y} = \frac{1}{z} \end{cases} \quad (6.28)$$

ed il problema di Cauchy corrispondente alle condizioni iniziali

$$z(0) = -1, \quad \dot{z}(0) = 0, \quad y(0) = y_0 .$$

Come è immediato verificare, la soluzione è data da

$$\begin{cases} z(t) = -1 \\ y(t) = y_0 - t . \end{cases} \quad (6.29)$$

Per analizzare la stabilità di questa soluzione con il primo metodo di Liapunov, scriviamo la (6.28) come sistema del primo ordine; introducendo la variabile $p = \dot{z}$, il sistema (6.28) si può porre nella forma di sistema dinamico in tre variabili, con

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} z \\ p \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} p \\ 1/z + 1/z^2 \\ 1/z \end{pmatrix}; \quad (6.30)$$

la soluzione di cui vogliamo discutere la stabilità è la (6.29), cioè

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ y_0 - t \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

Dalla forma (6.30) del campo \mathbf{X} segue che la matrice Jacobiana è data da

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/z^2 - 2/z^3 & 0 & 0 \\ -1/z^2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

valutata in corrispondenza della soluzione $\bar{\mathbf{x}}(t)$, tale matrice è costante

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di \mathcal{J} sono $-1, 0, 1$; l'esistenza di un autovalore positivo consente quindi di concludere che la soluzione (6.31), e quindi la (6.29), è instabile ⁽¹¹⁾. \diamond

¹¹L'instabilità della soluzione è in questo caso intuibile considerando il sistema linearizzato associato alla (6.28): ponendo $z = -1 + \epsilon$ e $y = y_0 - t + \eta$ si ha

$$\ddot{\epsilon} = \epsilon, \quad \dot{\eta} = -\epsilon$$

per cui $\epsilon(t)$, soluzione della prima equazione, cresce esponenzialmente nel tempo.

7 Stabilità dell'equilibrio di sistemi olonomi.

Vogliamo applicare l'analisi precedentemente introdotta per un generico sistema dinamico al caso particolare di configurazioni di equilibrio di un sistema olonomo con n gradi di libertà. Come già detto, scelta una n -pla di coordinate libere, lo stato del sistema è individuato dalla configurazione $\mathbf{q} := (q_1, \dots, q_n)$ e dall'atto di moto $\dot{\mathbf{q}} := (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, e si può quindi rappresentare come un punto \mathbf{x} in una varietà $2n$ -dimensionale \mathcal{S}^{2n} , detta lo spazio degli stati

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{S}^{2n} . \quad (7.1)$$

Da questo punto di vista, una configurazione di equilibrio $\bar{\mathbf{q}}$ è quindi un punto critico $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{q}}, 0)$ di un sistema dinamico autonomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$. L'idea intuitiva di equilibrio stabile (partendo vicino all'equilibrio, con piccole velocità, il sistema si muove rimanendo vicino all'equilibrio, con velocità piccole) può precisarsi dicendo che una configurazione di equilibrio è stabile se, fissato un suo intorno \mathcal{B}_ϵ , è possibile determinare un secondo intorno $\mathcal{B}_{\delta_\epsilon}$, tale che il sistema, posto inizialmente in $\mathcal{B}_{\delta_\epsilon}$, evolve rimanendo sempre entro \mathcal{B}_ϵ ; se ciò non avviene, diremo che la configurazione è instabile; più formalmente, possiamo riesprimere la precedente definizione generale di stabilità nel caso dell'equilibrio.

7.1 Definizione. Una configurazione di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ è stabile se per ogni $\epsilon > 0$ è possibile determinare $\delta_\epsilon = \delta(\epsilon)$ tale che per ogni stato iniziale $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}_{\delta_\epsilon}$ si ha $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}_\epsilon$ per ogni $t \geq t_0$. La configurazione è asintoticamente stabile se è stabile e inoltre $d(\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{x}}) \mapsto 0$ per $t \mapsto \infty$. Chiamiamo instabile ogni configurazione di equilibrio non stabile.

Osservazioni.

(i) Nella definizione di stabilità non si fa alcuna ipotesi sul tipo particolare di moto del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio, ma si richiede solo che $\mathbf{x}(t)$ rimanga vicino a $\bar{\mathbf{x}}$ per ogni $t \geq t_0$. Ad esempio, il sistema potrebbe compiere oscillazioni di ampiezza costante (oscillatore armonico libero e non smorzato: $\ddot{s} + \omega^2 s = 0$, $\bar{s} = 0$ è posizione di equilibrio stabile), oppure tendere all'equilibrio in un tempo infinito (oscillatore armonico libero e smorzato, con equazione: $\ddot{s} + \alpha \dot{s} + \omega^2 s = 0$; in tal caso la posizione di equilibrio $\bar{s} = 0$ è asintoticamente stabile), oppure ancora arrestarsi in un tempo finito in una posizione vicina a quella di equilibrio (punto pesante vincolato con attrito ad una circonferenza; la posizione di minima quota è di equilibrio stabile).

(ii) Secondo la definizione data, sono instabili tutte le configurazioni non stabili; sono quindi da considerarsi instabili le cosiddette configurazioni di equilibrio indifferente (si pensi ad un punto pesante appoggiato su una linea liscia orizzontale).

(iii) Si definisce attrattore uno stato di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ se esiste un intorno $\mathcal{B}(\bar{\mathbf{x}})$ tale che per le soluzioni $\mathbf{x}(t)$ del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ corrispondenti a stati iniziali $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}(\bar{\mathbf{x}})$ è $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$. Un punto di equilibrio asintoticamente stabile è sempre un attrattore; un attrattore non è però, necessariamente, un punto di stabilità, perchè non si richiede che $\mathbf{x}(t)$ sia nell'intorno di $\bar{\mathbf{x}}$ per ogni t , ma solo che vi tenda per $t \mapsto \infty$. \diamond

Ripetiamo che se si volesse determinare la stabilità di una configurazione attraverso la definizione occorrerebbe risolvere il problema del moto; la definizione di Liapunov non fornisce quindi, in generale, un criterio operativo. Sorge allora il problema di avere delle condizioni, almeno sufficienti, per determinare la stabilità o l'instabilità dell'equilibrio senza passare attraverso la soluzione delle equazioni di moto; questo non si può fare per sistemi del tutto generali, ma esistono molti criteri validi sotto opportune ipotesi restrittive.

L'ipotesi che facciamo è che *la configurazione di equilibrio corrisponda ad un punto di stazionarietà del potenziale: supporremo quindi i vincoli non dissipativi, fissi, bilateri, olonomi, e la sollecitazione attiva conservativa, con un potenziale $U = U(\mathbf{q})$* ⁽¹²⁾.

Nelle ipotesi assunte, si ha allora la seguente *condizione sufficiente di stabilità*:

7.2 Teorema (Dirichlet). *Se il potenziale U è una funzione continua in un intorno della configurazione di equilibrio ed ha un massimo isolato in tale configurazione, la configurazione di equilibrio è stabile.*

Dimostrazione. Nell'ipotesi che U sia di classe C^1 , la dimostrazione è una applicazione diretta del secondo metodo di Liapunov. Usiamo nella dimostrazione l'energia potenziale $V = -U$, e supponiamo, senza perdita di generalità, che nel punto di equilibrio sia $V(\bar{\mathbf{q}}) = 0$. Alla configurazione di equilibrio $\bar{\mathbf{q}}$ corrisponde quindi il punto critico $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{q}}, 0)$.

Consideriamo la funzione $H = T + V$ (energia meccanica del sistema); è allora $H(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, $H(\mathbf{x}) > 0$ per $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$, essendo ovviamente $T(\mathbf{x}) > 0$, e $V(\mathbf{x}) > 0$ poichè $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto di minimo isolato per V . È poi $dH/dt = 0$ per il teorema di conservazione dell'energia.

La funzione H è allora una funzione di Liapunov del sistema, e quindi il punto critico $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{q}}, 0)$ è stabile. \square

Un problema di evidente interesse è il cosiddetto problema della *inversione della condizione di Dirichlet*, cioè il problema di determinare la stabilità o instabilità nelle situazioni in cui il teorema di Dirichlet non sia applicabile, e quindi nel caso in cui il potenziale non abbia un massimo isolato nella configurazione di equilibrio.

Tra i numerosi risultati parziali, citiamo il seguente teorema, che fornisce una *condizione sufficiente di instabilità* :

7.3 Teorema (Liapunov). *Se il potenziale U è di classe C^2 in un intorno della configurazione di equilibrio e la matrice Hessiana del potenziale, valutata in tale configurazione, ha almeno un autovalore positivo, allora la configurazione di equilibrio è instabile.*

Dimostrazione. È una conseguenza diretta del primo metodo di Liapunov; si può infatti dimostare che se la matrice Hessiana del potenziale U ha un autovalore positivo, la matrice Jacobiana del sistema dinamico linearizzato associato al sistema lagrangiano di Lagrangiana $L = T + U$ ha anch'essa un autovalore reale e positivo. \square

¹²Usiamo anche in questo contesto la funzione potenziale U , come fatto sino ad ora parlando di conservazione dell'energia, di sollecitazione conservativa, di descrizione lagrangiana del moto, ... ; in parte della letteratura sulla stabilità si preferisce però fare riferimento all'energia potenziale $V = -U$.

Osservazioni.

(i) Mentre per dimostrare il teorema di Dirichlet è sufficiente supporre la continuità della funzione U , per la validità del teorema di Liapunov occorre invece richiedere che U sia una funzione di classe C^2 , la dimostrazione essendo basata sullo studio degli autovalori della matrice Hessiana del potenziale (ovvero dei termini del secondo ordine nello sviluppo di Taylor della funzione U nell'intorno della configurazione di equilibrio).

(ii) Se gli autovalori della matrice Hessiana sono tutti negativi, il punto di equilibrio è un punto di massimo isolato del potenziale: il teorema di Dirichlet ci assicura allora che si ha stabilità. Come già detto parlando del primo metodo di Liapunov, l'analisi sulla stabilità condotta in base agli autovalori della matrice Hessiana del potenziale U non è quindi conclusiva nel caso in cui gli autovalori siano tutti non positivi. \diamond

Quadro dei risultati per sistemi con 1 e 2 gradi di libertà.

Riassumiamo qui i risultati per il caso, di frequente applicazione, di sistemi con uno e due gradi di libertà. Nell'ipotesi di potenziale analitico, ed utilizzando oltre al teorema di Dirichlet e di Liapunov altri risultati, che non citiamo per brevità, abbiamo la situazione seguente.

Sistema con un grado di libertà: $n = 1$.

Siano: x la coordinata libera; \bar{x} la posizione di equilibrio, soluzione dell'equazione $U'(x) = 0$; $\ell \geq 2$ l'ordine della prima derivata di U diversa da zero in \bar{x} . È allora:

ℓ pari, $U^{(\ell)}(\bar{x}) < 0$	(\bar{x} massimo isolato)	\Rightarrow	Stabilità
ℓ pari, $U^{(\ell)}(\bar{x}) > 0$	(\bar{x} minimo isolato)	\Rightarrow	Instabilità
ℓ dispari	(\bar{x} flesso orizzontale)	\Rightarrow	Instabilità

Sistema con due gradi di libertà: $n = 2$.

Siano: (x, y) le coordinate libere; (\bar{x}, \bar{y}) la configurazione di equilibrio, determinata dalle equazioni $U_x = U_y = 0$ (indichiamo con indici le derivazioni parziali).

Se U_{xx} , U_{xy} e U_{yy} sono le derivate parziali seconde valutate nella posizione di equilibrio e H è la matrice Hessiana di U , valutata anch'essa in (\bar{x}, \bar{y}) , si ha allora ⁽¹³⁾:

$$\det H > 0, \quad U_{xx} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Stabilità} \quad (7.2)$$

$$\det H > 0, \quad U_{xx} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Instabilità} \quad (7.3)$$

$$\det H < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Instabilità} \quad (7.4)$$

$$\det H = 0, \quad U_{xx} \text{ (o } U_{yy}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Instabilità} \quad (7.5)$$

¹³Dal punto di vista geometrico, nei primi due casi il potenziale U ha nel punto di equilibrio, rispettivamente, un massimo isolato e un minimo isolato; nel terzo caso U ha un punto di sella.

Osservazioni.

(i) Come detto, per un sistema con un grado di libertà, se il potenziale è analitico la condizione di massimo isolato è necessaria e sufficiente per la stabilità. Se invece il potenziale non è analitico, la condizione è solo sufficiente: si possono cioè avere posizioni di equilibrio stabile a cui non corrisponde un massimo isolato del potenziale.

Come esempio, consideriamo il potenziale

$$U(x) = -e^{-1/x^2} \sin^2(1/x) \quad \text{per } x \neq 0, \quad U(0) = 0;$$

essendo $x = 0$ un punto di massimo assoluto, il teorema della stazionarietà del potenziale ci assicura che si tratta di una configurazione di equilibrio. Per quanto riguarda la stabilità di tale configurazione, essa discende immediatamente dal teorema di conservazione dell'energia e dall'analisi del grafico dell'energia potenziale.

Osserviamo ora che la funzione U è chiaramente C^∞ su R , ma non è analitica (le derivate di ogni ordine sono nulle per $x = 0$); inoltre $x = 0$ non è un punto di massimo isolato, essendo punto di accumulazione di punti di massimo in cui la funzione si annulla.

(ii) Il teorema di Liapunov 7.3 può essere anche enunciato in modo equivalente: se il potenziale $U(q)$ ammette lo sviluppo

$$U(\mathbf{q}) - U(\bar{\mathbf{q}}) = U_2 + \dots$$

dove

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \Big|_{\bar{\mathbf{q}}} \epsilon_i \epsilon_k \quad (\epsilon = \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})$$

sono i termini del secondo ordine in ϵ (i termini del primo ordine essendo ovviamente nulli per il teorema della stazionarietà del potenziale), allora l'esistenza di almeno un autovalore con parte reale positiva implica che *l'assenza del massimo per U può essere dedotta dall'analisi dei termini del secondo ordine.*

Questo risultato è stato esteso da Chetayev. Assumiamo che il potenziale $U = U(\mathbf{q})$ sia analitico nell'intorno della configurazione di equilibrio $\bar{\mathbf{q}}$, e che ammetta lo sviluppo

$$U(\mathbf{q}) - U(\bar{\mathbf{q}}) = U_m + \dots \quad (m \geq 2)$$

dove

$$U_m = \frac{1}{m!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} \frac{\partial^m U}{\partial q_{i_1} \dots \partial q_{i_m}} \Big|_{\bar{\mathbf{q}}} \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_m} \quad (\epsilon = \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})$$

indica il primo termine diverso da zero nello sviluppo di Taylor nell'intorno del punto di equilibrio. Vale allora il seguente risultato (Chetayev): *se l'assenza di massimo del potenziale nel punto di equilibrio è determinabile dall'analisi del termine U_m , allora la posizione di equilibrio è instabile.* \diamond

8 Oscillazioni attorno a configurazioni stabili.

Consideriamo un sistema olonomo con n gradi di libertà, e sia $\bar{\mathbf{q}}$ una configurazione di equilibrio stabile, corrispondente, nelle ipotesi del teorema di Dirichlet, ad un massimo isolato del potenziale U . In base a tale teorema, se consideriamo una configurazione iniziale $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$ vicina a $\bar{\mathbf{q}}$, con atto di moto iniziale $\dot{\mathbf{q}}(t_0)$ piccolo, sappiamo che durante il moto, per ogni $t \geq t_0$, la configurazione $\mathbf{q}(t)$ sarà nell'intorno della configurazione di equilibrio, con atto di moto piccolo. Vogliamo studiare più in dettaglio il moto del sistema nell'intorno di tale configurazione, nella seguente *ipotesi più restrittiva*: consideriamo la matrice Hessiana del potenziale, valutata nella configurazione di equilibrio, ed introduciamo la matrice \mathcal{B} data da

$$\mathcal{B}_{ij} := - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}} ; \quad (8.1)$$

l'ipotesi che introduciamo è che la matrice \mathcal{B} sia definita positiva, cioè che per ogni vettore $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ non identicamente nullo sia

$$\mathbf{v} \cdot \mathcal{B} \mathbf{v} := \sum_{i,j=1}^n \mathcal{B}_{ij} v_i v_j > 0 . \quad (8.2)$$

Introdotte allora per comodità le variabili

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) := \mathbf{q}(t) - \bar{\mathbf{q}}, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(t) := \dot{\mathbf{q}}(t) , \quad (8.3)$$

vogliamo considerare le equazioni di moto linearizzate, cioè al primo ordine in $\|\boldsymbol{\epsilon}\|$ e $\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|$ (con $\|\boldsymbol{\epsilon}\| = \sqrt{\sum_k |\epsilon_k|^2}$ e $\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\| = \sqrt{\sum_k |\dot{\epsilon}_k|^2}$)⁽¹⁴⁾.

A tal fine, dall'ipotesi precedentemente introdotta segue che, a meno di termini di ordine superiore al secondo in $\|\boldsymbol{\epsilon}\|$, il potenziale U può essere scritto nella forma

$$U(\mathbf{q}) = U(\bar{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\epsilon}) = U(\bar{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathcal{B} \boldsymbol{\epsilon} + \dots , \quad (8.4)$$

dove si è tenuto conto del fatto che le derivate prime del potenziale nella configurazione di equilibrio sono nulle, per il teorema della stazionarietà del potenziale. Essendo il primo termine dello sviluppo una costante (ininfluente nella scrittura delle equazioni di moto), il primo termine significativo dello sviluppo di U è il termine quadratico. Nella scrittura della funzione di Lagrange $L = T + U$, anche nell'energia cinetica possiamo allora trascurare termini dell'ordine di $\|\boldsymbol{\epsilon}\| \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|^2$, per cui si ha

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathcal{T}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathcal{T}(\bar{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\epsilon}) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathcal{A} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \dots , \quad (8.5)$$

¹⁴Il fatto che si consideri $\boldsymbol{\epsilon}$ dello stesso ordine di $\boldsymbol{\epsilon}$ corrisponde a questa ipotesi: cerchiamo soluzioni delle equazioni di moto della forma $\boldsymbol{\epsilon}(t) = \sigma \boldsymbol{\varphi}(t)$, con $\boldsymbol{\varphi}$ indipendente da σ : la derivata k -sima è allora $\boldsymbol{\epsilon}^{(k)}(t) = \sigma \boldsymbol{\varphi}^{(k)}(t)$ per ogni k , per cui $\boldsymbol{\epsilon}$ è dell'ordine di σ con tutte le sue derivate. Questa ipotesi è sufficiente per il risultato che si intende dimostrare, ma non copre ovviamente la situazione più generale, perché una funzione "piccola" può non avere derivata "piccola": si pensi ad esempio a $f(t) = \sigma \sin(t/\sigma)$, che è $O(\sigma)$, la cui derivata $f'(t) = \cos(t/\sigma)$ è $O(1)$.

dove con $\mathcal{A} := \mathcal{T}(\bar{\mathbf{q}})$ indichiamo la matrice dell'energia cinetica valutata nella configurazione di equilibrio. Essendo l'energia cinetica di ogni sistema meccanico una funzione definita positiva, si dimostra che anche la matrice \mathcal{A} è *definita positiva*.

Possiamo quindi ottenere le equazioni di moto linearizzate a partire dalla Lagrangiana

$$L^*(\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathcal{A} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathcal{B} \boldsymbol{\epsilon} , \quad (8.6)$$

dove le matrici \mathcal{A} e \mathcal{B} sono:

- (i) reali,
- (ii) simmetriche,
- (iii) definite positive.

L'equazione di moto corrispondente è

$$\mathcal{A} \ddot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathcal{B} \boldsymbol{\epsilon} = 0 , \quad (8.7)$$

ovvero

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{A}_{ki} \ddot{\epsilon}_i + \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_{ki} \epsilon_i = 0 \quad (k = 1, \dots, n) ;$$

si tratta di un sistema di n equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. La soluzione generale delle (8.7) è data da una combinazione lineare di moti periodici, le cui pulsazioni ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sono ottenibili direttamente dall'analisi delle matrici costanti \mathcal{A} e \mathcal{B} . Consideriamo infatti l'equazione algebrica di grado n in ω^2

$$\det(\mathcal{B} - \omega^2 \mathcal{A}) = 0 \quad (8.8)$$

che chiamiamo equazione (generalizzata) agli autovalori, o equazione agli autovalori di \mathcal{B} rispetto ad \mathcal{A} . Essendo le matrici \mathcal{A} e \mathcal{B} reali, simmetriche e definite positive, da noti risultati di algebra lineare sappiamo che le n radici dell'equazione sono reali e positive: $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$; supporremo inoltre che siano distinte. Chiamiamo autovalori tali soluzioni, ed indichiamo con $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ i corrispondenti autovettori normalizzati: ogni \mathbf{X}_k è cioè soluzione dell'equazione

$$(\mathcal{B} - \omega_k^2 \mathcal{A}) \mathbf{X}_k = 0$$

con la condizione

$$\sum_{i=1}^n X_{ki}^2 = 1 .$$

Valgono allora i seguenti risultati.

8.1 Teorema. *La soluzione delle equazioni di moto (8.7) è data da*

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k (C_{1k} \cos(\omega_k t) + C_{2k} \sin(\omega_k t)) \quad (8.9)$$

dove C_{1k} e C_{2k} sono $2n$ costanti reali arbitrarie (da determinarsi con le condizioni iniziali), ω_k e \mathbf{X}_k sono gli autovalori e i corrispondenti autovettori normalizzati.

(Gli autovalori ω_k sono detti le *pulsazioni* del sistema; in modo equivalente, possiamo considerare le *frequenze proprie* o *caratteristiche* $\nu_k = \omega_k/2\pi$ o i *periodi* $\tau_k = 1/\nu_k$.)

8.2 Teorema. *Esiste una trasformazione di variabili $\epsilon \mapsto \xi$ (ξ coordinate normali del sistema) tale che le equazioni di moto (8.7), scritte in termini delle ξ , assumono la forma separata di n equazioni dell'oscillatore armonico, ciascuna in una coordinata normale:*

$$\ddot{\xi} + \Omega \xi = 0, \quad \Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2) \Rightarrow \ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (8.10)$$

Riassumendo, le frequenze proprie di un sistema possono essere determinate attraverso i seguenti passi:

(1) Determinata la posizione di equilibrio $\bar{\mathbf{q}}$ attraverso il teorema della stazionarietà del potenziale, e verificato che si tratta di equilibrio stabile attraverso il teorema di Dirichlet, si determina la matrice Hessiana del potenziale; tale matrice, valutata per $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$ e cambiata di segno, è la matrice \mathcal{B} .

(2) Si calcola l'energia cinetica T del sistema, che è sempre una forma quadratica omogenea di secondo grado nelle $\dot{\mathbf{q}}$ (essendo i vincoli fissi per ipotesi) e se ne determina la matrice \mathcal{T} corrispondente; tale matrice, valutata per $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$, è la matrice \mathcal{A} .

(3) Note le matrici \mathcal{A} e \mathcal{B} , se ne calcolano gli autovalori risolvendo la (8.8), che è un'equazione algebrica di grado n nel quadrato delle pulsazioni. Nelle ipotesi fatte, tali autovalori sono reali e positivi: le loro radici aritmetiche sono le pulsazioni cercate.

Osservazioni.

(i) L'ipotesi fatta nello scrivere il risultato (8.9) è che gli n autovalori ω_k^2 siano distinti, abbiano cioè molteplicità algebrica uguale ad uno. Si dimostra però che la caratteristica del moto di essere quasi-periodico sussiste anche se l'equazione agli autovalori (8.8) ha radici multiple; infatti nelle ipotesi assunte sulle matrici \mathcal{A} e \mathcal{B} la molteplicità algebrica degli autovalori coincide con la loro molteplicità geometrica (cioè se un autovalore è soluzione di ordine m_k dell'equazione agli autovalori, m_k è anche la dimensione del suo autospazio, e quindi l'autovalore possiede m_k autovettori indipendenti): la (8.9) è allora sostituita da

$$\epsilon(t) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^{m_k} \mathbf{X}_{ki} (C_{1ki} \cos(\omega_k t) + C_{2ki} \sin(\omega_k t)) \right), \quad \left(\sum_{k=1}^p m_k = n \right).$$

(ii) In generale, le pulsazioni ω_k , e quindi i periodi $\tau_k = 2\pi / \omega_k$, non sono in rapporto razionale, per cui il moto del sistema non è periodico: si parla in questo caso di *moto quasi-periodico*. Se però i periodi τ_k sono in rapporto razionale, allora il moto è periodico, con un periodo che è il minimo comune multiplo degli n periodi τ_k .

(iii) L'esistenza di coordinate normali, e quindi la possibilità di descrivere il moto attraverso un sistema di n equazioni dell'oscillatore armonico, chiarisce maggiormente la caratteristica del moto di essere quasi-periodico, cioè il comportamento del sistema come un insieme ideale di n oscillatori armonici. Tuttavia per determinare le caratteristiche salienti di tale moto, che sono le pulsazioni ω_k , non è necessario passare a coordinate normali, ma è sufficiente risolvere un problema algebrico, cioè determinare le soluzioni dell'equazione agli autovalori (8.8), di grado n in ω^2 .

(iv) L'uso delle coordinate normali consente di verificare agevolmente che la stabilità di un punto di equilibrio che sia un massimo isolato del potenziale (teorema di Dirichlet), che abbiamo

dimostrato come applicazione del secondo metodo di Liapunov, non è invece deducibile dal primo metodo di Liapunov: per sistemi di tipo lagrangiano tale metodo consente in effetti di individuare solo posizioni di equilibrio asintoticamente stabili. Utilizzando le coordinate normali, consideriamo infatti le equazioni di Lagrange linearizzate nell'intorno della configurazione di equilibrio; come visto in precedenza, abbiamo allora il sistema di equazioni del secondo ordine

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \Omega \boldsymbol{\xi} = 0 \quad \Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2) .$$

A tale sistema corrisponde il sistema dinamico lineare

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) , \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ -\Omega \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} ,$$

la cui matrice Jacobiana \mathcal{J} è

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} .$$

Si dimostra che per una matrice con questa forma a blocchi si ha

$$\det(\mathcal{J} - \lambda I) = \prod_{k=1}^n (\lambda^2 + \omega_k^2) ,$$

per cui gli autovalori di \mathcal{J} sono immaginari puri: $\lambda_k = \pm i \omega_k \Rightarrow \text{Re}(\lambda_k) = 0$. ◇