

C.Morosi

Appunti integrativi di Meccanica Razionale: a.a. 2008-2009

Indice

1. La formula fondamentale dell'atto di moto rigido.
2. Analisi dell'atto di moto rigido.
3. Moto rigido piano. Base e rulletta.
4. Distribuzione delle accelerazioni.
5. Cinematica relativa. Ipotesi e risultati.
6. Complementi di cinematica del corpo rigido.
7. Oscillatore armonico.
8. Equazioni cardinali.
9. Analisi delle forze applicate al corpo rigido.
10. Centro di forze parallele e baricentro.
11. Corpo rigido piano: calcolo delle quantità meccaniche.
12. Alcuni casi notevoli di dinamica del corpo rigido.
13. Relazione simbolica della dinamica.
14. Principio dei lavori virtuali.
15. Equazioni di Lagrange.
16. Sollecitazione conservativa e potenziale.
17. Introduzione al formalismo canonico.
18. Formulazione variazionale delle equazioni di moto.
19. Introduzione alla stabilità.
20. Stabilità dell'equilibrio di sistemi olonomi.
21. Oscillazioni attorno a configurazioni stabili.
22. Elementi di meccanica dei fili e delle verghe.
23. Continui deformabili: postulati generali.
24. Stato di sforzo.
25. Equazioni di moto ed equilibrio.
26. La relazione costitutiva dei fluidi perfetti e viscosi.
27. Il teorema dell'energia.
28. Meccanica analitica e meccanica dei continui.

©2003 C. Morosi. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore; pertanto, essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto.

1 La formula fondamentale dell'atto di moto rigido.

Dato un corpo rigido (c.r.), visto come un insieme di punti la cui distanza è costante nel tempo, si definisce *atto di moto rigido all'istante t* l'insieme delle velocità dei punti del corpo a tale istante. Per semplicità di notazione, indicheremo il campo di velocità, invece che con $\mathbf{v}(P)$, con \mathbf{v}_P , ed analogamente faremo con il *campo di accelerazioni*, indicato con \mathbf{a}_P . Vale il seguente risultato.

1.1 Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente perchè un atto di moto sia rigido è che per ogni coppia di punti A e B del c.r. le velocità \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B soddisfino la condizione*

$$(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \cdot (B - A) = 0, \quad (1.1)$$

cioè che i due punti abbiano ugual componente della velocità lungo la loro congiungente.

Dimostrazione. Ricordiamo che dalla definizione di velocità segue che per ogni coppia di punti A e B è

$$\frac{d}{dt}(B - A) = \frac{d}{dt}((B - O) - (A - O)) = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A \quad (1.2)$$

(essendo O un punto fisso, ad esempio l'origine di un riferimento cartesiano $(O; X, Y, Z)$). Vale allora, per la simmetria del prodotto scalare, la seguente identità :

$$\frac{d}{dt}|B - A|^2 = \frac{d}{dt}((B - A) \cdot (B - A)) = 2(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \cdot (B - A);$$

pertanto se $|B - A| = \text{costante}$ segue la (1.1); viceversa, se vale la (1.1) segue che $|B - A| = \text{costante}$. \square

La condizione (1.1) non è sempre comoda per il calcolo delle velocità; a tal fine, è utile il seguente fondamentale risultato, che segue direttamente dalla proprietà di rigidità.

1.2 Teorema. *In ogni istante esiste, ed è unico, un vettore $\boldsymbol{\omega}$ (la velocità angolare del c.r.) tale che per ogni coppia di punti A e B del c.r. le velocità \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B sono legate dalla relazione*

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A). \quad (1.3)$$

Per dimostrare tale teorema, premettiamo una definizione ed un lemma.

1.3 Definizione. *Sia A un punto del c.r. e $(A; x, y, z)$ una terna cartesiana ortogonale destra solidale al c.r., con versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Diciamo che un vettore $\boldsymbol{\ell}$ è solidale al c.r. se le sue componenti rispetto a tale terna sono costanti, cioè se*

$$\boldsymbol{\ell}(t) = \ell_x \mathbf{i}(t) + \ell_y \mathbf{j}(t) + \ell_z \mathbf{k}(t) \quad \ell_x, \ell_y, \ell_z = \text{costanti}.$$

È immediato dimostrare, utilizzando la definizione di rigidità, che la proprietà di essere solidale non dipende dalla scelta della particolare terna associata al c.r.; esempi di vettori solidali, che utilizzeremo tra breve, sono ovviamente i versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ e più in generale ogni vettore $(B - A)$, se A e B sono due punti del c.r.

1.4 Lemma. *Esiste ed è unico un vettore ω tale che per ogni vettore ℓ solidale al c.r. si ha*

$$\frac{d\ell}{dt} = \omega \wedge \ell .$$

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che, se ω esiste, è unico; infatti se esistessero due vettori ω e ω' tali che

$$\frac{d\ell}{dt} = \omega \wedge \ell, \quad \frac{d\ell}{dt} = \omega' \wedge \ell$$

sarebbe anche $(\omega - \omega') \wedge \ell = 0$, da cui $\omega = \omega'$, per l'arbitrarietà di ℓ .

Per dimostrare l'esistenza, siano ℓ e ℓ' due vettori solidali al c.r., arbitrari. La condizione di rigidità implica allora che

$$\ell \cdot \ell = \text{costante} \quad \ell' \cdot \ell' = \text{costante} \quad \ell \cdot \ell' = \text{costante} ; \quad (1.4)$$

le prime due traducono l'invarianza delle lunghezze e la terza degli angoli. Derivando le prime due relazioni (1.4) rispetto al tempo si ha allora

$$\frac{d\ell}{dt} \cdot \ell = 0, \quad \frac{d\ell'}{dt} \cdot \ell' = 0,$$

cioè la derivata temporale di un vettore solidale è ortogonale al vettore stesso. Possiamo esprimere tale risultato dicendo che esistono due vettori ω_ℓ e $\omega_{\ell'}$, a priori dipendenti da ℓ e ℓ' (e con le componenti lungo ℓ e rispettivamente ℓ' arbitrarie), tali che

$$\frac{d\ell}{dt} = \omega_\ell \wedge \ell, \quad \frac{d\ell'}{dt} = \omega_{\ell'} \wedge \ell' ; \quad (1.5)$$

se ora deriviamo rispetto al tempo la terza relazione (1.4) (e utilizziamo la proprietà ciclica del prodotto misto) otteniamo

$$0 = \frac{d\ell}{dt} \cdot \ell' + \ell \cdot \frac{d\ell'}{dt} = \omega_\ell \wedge \ell \cdot \ell' + \ell \cdot \omega_{\ell'} \wedge \ell' = \ell \wedge \ell' \cdot (\omega_\ell - \omega_{\ell'}). \quad (1.6)$$

Poichè ℓ e ℓ' sono arbitrari, lo è anche $\ell \wedge \ell'$, e quindi la (1.6) implica che

$$\omega_\ell = \omega_{\ell'} :$$

pertanto *il vettore ω non dipende dal particolare vettore solidale, ma è caratteristico del c.r.* \square

Dimostrazione del Teorema 1.2. Segue direttamente dal Lemma precedente, scegliendo come vettore solidale ℓ il vettore $(B - A)$ e ricordando la (1.2). \square

Osservazioni.

(i) Scegliendo come vettori solidali i versori della terna si hanno le cosiddette *formule di Poisson*:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \omega \wedge \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \omega \wedge \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \omega \wedge \mathbf{k} \quad (1.7)$$

che danno la velocità di variazione dei versori della terna mobile.

(ii) Per ottenere l'espressione esplicita della velocità angolare, noto il moto del c.r., cioè $\mathbf{i}(t)$, $\mathbf{j}(t)$, $\mathbf{k}(t)$, osserviamo che

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k} = \omega \wedge \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} \cdot \omega = \mathbf{i} \cdot \omega = \omega_x .$$

Analogamente si ha per le altre due componenti: $\omega_y = d\mathbf{k}/dt \cdot \mathbf{i}$, $\omega_z = d\mathbf{i}/dt \cdot \mathbf{j}$; pertanto, rispetto ad una terna solidale, $\boldsymbol{\omega}$ può scriversi nella forma cartesiana

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j} \right) \mathbf{k} . \quad (1.8)$$

In modo equivalente, $\boldsymbol{\omega}$ può anche essere scritto nella forma

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{i} \wedge \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \mathbf{j} \wedge \frac{d\mathbf{j}}{dt} + \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right) . \quad (1.9)$$

In conclusione: noto il moto della terna solidale, $\boldsymbol{\omega}$ è determinato dalle (1.8) o (1.9); viceversa, data la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ è noto il moto della terna solidale al c.r., ottenuto integrando il sistema di equazioni differenziali in \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} dato dalle formule di Poisson (1.7). \diamond

2 Analisi dell'atto di moto rigido.

Premettiamo alcune definizioni. L'atto di moto rigido si dice **traslatorio** se tutti i punti hanno ugual velocità, **rotatorio** se esiste almeno un punto con velocità nulla. Come dimostreremo dall'analisi della formula fondamentale (1.3), questi due tipi di atto di moto non esauriscono però tutte le possibilità. Per analizzare quindi i possibili tipi di atto di moto rigido, osserviamo che moltiplicando ambo i membri della (1.3) scalarmente per $\boldsymbol{\omega}$ si ha

$$\mathbf{v}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_B \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \forall A, B$$

cioè la componente delle velocità dei punti lungo la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ è uguale per tutti i punti. È allora utile introdurre la definizione di *invariante scalare dell'atto di moto rigido*

$$I := \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} ; \quad (2.1)$$

osserviamo in particolare che se ad un certo istante è $I \neq 0$ non esiste alcun punto del c.r. con velocità nulla e, viceversa, l'invariante scalare è senz'altro nullo se esiste un punto con velocità nulla.

Fatte tali premesse, supponiamo ora che in un dato istante sia $\boldsymbol{\omega} = 0$; segue allora dalla (1.3) che tutti i punti hanno uguale velocità e quindi, per quanto detto, l'atto di moto è traslatorio; viceversa, se tutti i punti hanno ugual velocità dalla (1.3) segue che

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (B - A) = 0 \quad \forall A, B$$

per cui, per l'arbitrarietà del vettore $(B - A)$, deve essere $\boldsymbol{\omega} = 0$. In conclusione, abbiamo il seguente risultato.

2.1 Teorema. *L'atto di moto è traslatorio se e solo se $\boldsymbol{\omega} = 0$.*

Sia ora $\boldsymbol{\omega} \neq 0$; si dimostra allora il seguente risultato.

2.2 Teorema. *Se $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, esiste un asse (detto asse di moto o di Mozzi) diretto come $\boldsymbol{\omega}$ e di equazione*

$$P(\lambda) - A = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_A}{\omega^2} + \lambda \boldsymbol{\omega} , \quad (2.2)$$

i cui punti $P(\lambda)$ hanno velocità

$$\mathbf{v}_{P(\lambda)} = \frac{I}{\omega} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} , \quad (2.3)$$

cioè diretta come $\boldsymbol{\omega}$, di modulo I/ω e uguale per tutti i punti dell'asse.

Dimostrazione. Inserendo la definizione (2.2) dell'asse di moto nella formula fondamentale (1.3) si ottiene

$$\mathbf{v}_{P(\lambda)} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (P(\lambda) - A) = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_A}{\omega^2} + \lambda \boldsymbol{\omega} \right) = \mathbf{v}_A + \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_A) ;$$

il risultato (2.3) segue allora immediatamente applicando l'identità del doppio prodotto vettore

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} \quad (2.4)$$

con $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{c} = \mathbf{v}_A$, e ricordando che $\mathbf{v}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = I$. \square

Nella (2.2), A è un qualunque punto del c.r., con velocità \mathbf{v}_A , e $P(\lambda)$ è il generico punto dell'asse; per la (2.3), la velocità $\mathbf{v}_{P(\lambda)}$ non dipende da λ , per cui *tutti i punti dell'asse hanno ugual velocità*.

Interpretiamo ora il teorema.

Se $I = 0$, i punti dell'asse di moto hanno velocità nulla; l'atto di moto è quindi **rotatorio** e l'asse di moto si chiama in tal caso *asse di istantanea rotazione*. Il teorema dice quindi che se esiste un punto con velocità nulla ne esistono infiniti, disposti lungo l'asse di istantanea rotazione; i punti non appartenenti all'asse hanno velocità non nulla, data dalla (1.3) in cui sia A un punto dell'asse

$$\mathbf{v}_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A) . \quad (2.5)$$

Detta r la distanza di B dall'asse di istantanea rotazione, è poi

$$v_B = |\boldsymbol{\omega} \wedge (B - A)| = \omega r .$$

La (2.5) è la formula dell'atto di moto rotatorio.

Se $I \neq 0$, non esistono punti con velocità nulla, e quindi l'atto di moto non è rotatorio; i punti dell'asse di moto hanno però velocità uguale tra loro e minima rispetto a tutti gli altri punti del c.r.; infatti se un punto D non appartiene all'asse, ma è a distanza r da esso, dalla (1.3) scritta nella forma $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \wedge (D - B)$ segue immediatamente che $v_D^2 = (I/\omega)^2 + \omega^2 r^2$. In tal caso, l'asse di moto prende il nome di *asse elicoidale* e l'atto di moto si dice **elicoidale**.

In conclusione, un generico atto di moto rigido si può sempre ricondurre a tre soli casi:

Atto di moto traslatorio ($\boldsymbol{\omega} = 0$): tutti i punti hanno ugual velocità.

Atto di moto rotatorio ($\boldsymbol{\omega} \neq 0$, $I = 0$): esiste un asse, di equazione (2.2), i cui punti hanno velocità nulla, mentre i punti esterni all'asse hanno velocità ortogonale all'asse, di modulo crescente linearmente con la distanza r da esso.

Atto di moto elicoidale ($\boldsymbol{\omega} \neq 0$, $I \neq 0$): esiste un asse, di equazione (2.2), i cui punti hanno velocità parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ e di modulo minimo.

Osservazioni.

(i) In base all'analisi precedente, la formula (1.3) può essere interpretata nel modo seguente: la velocità \mathbf{v}_B di un qualunque punto B del c.r. è la somma vettoriale di due contributi: il vettore \mathbf{v}_A , cioè la velocità che il punto B avrebbe se l'atto di moto fosse traslatorio con tale velocità, e il vettore $\boldsymbol{\omega} \wedge (B - A)$, che per la (2.5) rappresenta la velocità che B avrebbe se l'atto di moto fosse rotatorio attorno ad un asse parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ e passante per A ; per questa ragione, l'atto di moto rigido si dice anche **rototraslatorio**. È importante ricordare però che mentre la decomposizione ora descritta si può fare in infiniti modi (corrispondenti a diverse scelte del punto A), è comunque *unica* la velocità angolare, che non dipende dal punto ma solo dal c.r.

(ii) La definizione (2.2) di asse di Mozzi potrebbe sembrare dipendere dalla scelta del punto A ; in effetti non è così, poiché se consideriamo un secondo asse, definito a partire da un punto B ,

$$Q(\mu) - B = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_B}{\omega^2} + \mu \boldsymbol{\omega} , \quad (2.6)$$

confrontando le (2.2) e (2.6) otteniamo

$$P(\lambda) - Q(\mu) = A - B + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega^2} \wedge (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) + (\lambda - \mu) \boldsymbol{\omega} = A - B + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega^2} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (A - B)) + (\lambda - \mu) \boldsymbol{\omega} \quad (2.7)$$

$$\stackrel{(2.4)}{=} (A - B) - (A - B) + \boldsymbol{\omega} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot (A - B)}{\omega^2} + (\lambda - \mu) \boldsymbol{\omega} = \sigma \boldsymbol{\omega} \quad \left(\sigma = \lambda - \mu + \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot (A - B)}{\omega^2} \right).$$

Pertanto $P(\lambda) - Q(\mu)$ è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ e quindi l'asse è unico.

◇

3 Moto rigido piano. Base e ruletta.

Se le velocità dei punti del c.r. sono tutte parallele ad un piano fisso (detto *piano direttore del moto*) si parla di *moto rigido piano* ⁽¹⁾.

Senza perdita di generalità, supponiamo che il piano direttore sia il piano XY in un riferimento cartesiano $(O; X, Y, Z)$; scelta una *qualunque coppia* di punti A e B del c.r., essendo per ipotesi il vettore $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ parallelo al piano direttore ed arbitrario, la formula fondamentale (1.3) implica allora che la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ è perpendicolare al piano, per cui

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{K} .$$

Possiamo allora scegliere la terna solidale al c.r. come una terna congruente alla terna fissa nel modo seguente:

$$\mathbf{i}(t) = \cos \alpha(t) \mathbf{I} + \sin \alpha(t) \mathbf{J} , \quad \mathbf{j}(t) = -\sin \alpha(t) \mathbf{I} + \cos \alpha(t) \mathbf{J} , \quad \mathbf{k}(t) = \mathbf{K} \quad (3.1)$$

essendo $\alpha(t)$ l'angolo tra l'asse x solidale al c.r. e l'asse fisso X (*misurato dall'asse fisso X verso l'asse mobile x*), detto l'angolo di rotazione del c.r.; dalle (1.8) o (1.9) segue allora

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\alpha}{dt} \mathbf{k} = \frac{d\alpha}{dt} \mathbf{K} , \quad |\boldsymbol{\omega}| = \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| .$$

Pertanto *nel moto rigido piano la velocità angolare ha direzione costante, e misura la velocità di variazione nel tempo dell'angolo di rotazione del c.r.* ⁽²⁾.

Per il moto rigido piano vale il seguente risultato.

3.1 Teorema (Eulero). *Nel moto rigido piano l'atto di moto è traslatorio o rotatorio.*

Dimostrazione. Se l'atto di moto non è traslatorio, si ha $\boldsymbol{\omega} \neq 0$. Poichè le velocità sono parallele ad un piano e $\boldsymbol{\omega}$ è perpendicolare a tale piano, l'invariante scalare $I = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}$ è nullo; pertanto l'atto di moto è rotatorio, e l'asse di istantanea rotazione è perpendicolare al piano. \square

Consideriamo in particolare il moto di una lamina piana in moto nel proprio piano. Per il teorema di Eulero, se l'atto di moto non è traslatorio esiste un punto, intersezione tra il piano e l'asse di istantanea rotazione, che ha velocità nulla; tale punto è detto *centro di istantanea rotazione (C.I.R.)* (lo indicheremo spesso nel seguito con C).

In generale, la posizione del *C.I.R.* varia nel tempo; il luogo descritto dal *C.I.R.*, rispetto ad un osservatore fisso, è detto la *base* del moto, che è quindi una linea fissa; lo stesso luogo, descritto

¹Il moto rigido piano è ad esempio quello di una lamina piana in moto nel proprio piano, che possiamo sempre assumere come piano XY in un riferimento cartesiano $(O; X, Y, Z)$, ma può appartenere anche ad un corpo tridimensionale, ad esempio in moto con una asse fisso; dalla proprietà di rigidità segue che il moto rigido piano è determinato se è noto il moto di un qualunque piano del c.r. parallelo al piano direttore.

²Val la pena di ricordare che, nelle applicazioni, l'angolo di rotazione può essere scelto anche nel verso opposto a quello naturale associato agli assi cartesiani, per cui in generale è $\boldsymbol{\omega} = \pm \dot{\alpha} \mathbf{k} = \pm \dot{\alpha} \mathbf{K}$. Ricordiamo ancora che, se $\boldsymbol{\omega}$ è ortogonale al piano e \mathbf{u} è un qualunque vettore nel piano, l'operazione $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$ dà luogo ad un vettore nel piano, ortogonale ad \mathbf{u} e di modulo $|\dot{\alpha}|u$; il verso è quello ("orario" o "antiorario") indotto dal verso scelto per l'angolo di rotazione. L'operazione $\boldsymbol{\omega} \wedge \cdot$ è quindi l'operazione di rotazione piana di un angolo di $\pi/2$.

da un osservatore solidale con il c.r., è detto la *rulletta* del moto, che è quindi una linea mobile, solidale al c.r.; si dimostra che base e rulletta hanno in comune un punto e la tangente (contatto del secondo ordine), per cui il moto della rulletta è un moto di puro rotolamento sulla base ⁽³⁾.

Nelle applicazioni, può essere utile determinare il C.I.R. senza dover prima calcolare il moto; ciò si può fare in tre casi:

(i) se esiste un punto fisso O , esso è evidentemente il C.I.R.

(ii) se sono note le direzioni, non parallele, delle velocità \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B di due punti A e B , il C.I.R. è il punto di intersezione tra le perpendicolari a \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B condotte per A e B (teorema di Chasles).

(iii) se il c.r. rotola senza strisciare su una guida fissa, il punto di contatto del c.r. con la guida è il C.I.R. (in tal caso, la guida è la base del moto, il profilo del c.r. la rulletta).

In generale, per avere le equazioni della base e della rulletta, osserviamo dall'equazione (2.2) dell'asse di istantanea rotazione che il punto C intersezione dell'asse con il piano si ottiene per $\lambda = 0$, per cui la posizione del C.I.R. rispetto ad un punto A è data da

$$C - A = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_A}{\omega^2}. \quad (3.2)$$

Indicando con (X_C, Y_C) e (X_A, Y_A) le coordinate di C ed A rispetto alla terna fissa $(O; X, Y, Z)$, con $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{K}$ la velocità angolare e con $\mathbf{v}_A = v_{Ax}(t)\mathbf{I} + v_{Ay}(t)\mathbf{J}$ la velocità di A , dalla (3.2) segue allora che le equazioni parametriche (in funzione del parametro t) della base sono date da:

$$X_C = X_A - \frac{v_{Ay}}{\omega}, \quad Y_C = Y_A + \frac{v_{Ax}}{\omega}. \quad (3.3)$$

Consideriamo invece una terna solidale con il c.r., di origine A e versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} = \mathbf{K}$, data dalla (3.1), rispetto alla quale le coordinate di C sono (x_C, y_C) ; proiettando la (3.2) sugli assi x, y della terna solidale al c.r. segue che le equazioni parametriche (in funzione del parametro t) della rulletta sono

$$x_C = -\frac{v_{Ax}}{\omega} \sin \alpha - \frac{v_{Ay}}{\omega} \cos \alpha, \quad y_C = -\frac{v_{Ax}}{\omega} \cos \alpha + \frac{v_{Ay}}{\omega} \sin \alpha, \quad (3.4)$$

essendo α l'angolo di rotazione del c.r. ($\omega = \pm \dot{\alpha}$).

³Per dimostrare che base e rulletta hanno tangente comune, siano A un generico punto del c.r., con velocità \mathbf{v}_A all'istante t , e $(A; x, y)$ un riferimento cartesiano solidale al c.r., con versori \mathbf{i}, \mathbf{j} . Sia $C = C(t)$ un punto che si muove sulla base: la sua velocità \mathbf{v}_C dà la direzione della tangente alla base. Il punto C ha nel riferimento solidale coordinate (x, y) e velocità $\mathbf{v}_r = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$, che dà la direzione della tangente alla rulletta. Abbiamo allora la rappresentazione

$$C(t) - A(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

da cui derivando

$$\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (C - A),$$

essendo $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del c.r. all'istante t . D'altra parte poiché A appartiene al corpo rigido e l'atto di moto all'istante t è rotatorio attorno ad un punto C' che coincide con il punto $C(t)$ della base è anche

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \wedge (A - C') = \boldsymbol{\omega} \wedge (A - C);$$

confrontando allora le due espressioni precedenti otteniamo che $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_r$: poiché come detto la direzione dei due vettori è quella della tangente alla base e alla rulletta, le due curve hanno quindi la stessa tangente.

4 Distribuzione delle accelerazioni.

Dalla formula fondamentale (1.3), derivata rispetto al tempo, segue che le accelerazioni di due punti A e B del c.r. sono legate dalla relazione $\mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (B - A) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$ per cui, esprimendo le velocità ancora tramite la (1.3), si ha

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (B - A) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (B - A)) . \quad (4.1)$$

Utilizzando l'identità (2.4) del doppio prodotto vettore (con $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{c} = (B - A)$), la (4.1) può allora scriversi nella forma equivalente

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (B - A) - \omega^2 (B - A) + ((B - A) \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} . \quad (4.2)$$

Accelerazioni nel moto rigido piano. Nel caso di una lamina piana in moto nel proprio piano, l'ultimo termine della (4.2) è identicamente nullo, per cui, ponendo $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{K}$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega} \mathbf{K}$, segue che

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\omega} \mathbf{K} \wedge (B - A) - \omega^2 (B - A) . \quad (4.3)$$

In stretta analogia con l'interpretazione dell'atto di moto rigido $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A)$ come rototraslatorio, possiamo analizzare tale relazione dicendo che *nel caso piano* l'accelerazione di un generico punto B è ottenibile componendo l'accelerazione di un punto A , arbitrariamente scelto, con l'accelerazione che B avrebbe nell'atto di moto rotatorio attorno ad A , data dal secondo e terzo termine nella (4.3) (rispettivamente, l'accelerazione tangenziale e l'accelerazione centripeta).

Sempre nel caso piano, si dimostra infine che esiste (ed è unico) un punto C_a (*centro delle accelerazioni*), che ha accelerazione nulla. A tal fine, poniamo nella (4.3) $B = C_a$ e $\mathbf{a}_B = 0$; proiettando l'equazione vettoriale così ottenuta lungo le due direzioni ortogonali di \mathbf{a}_A e $\mathbf{K} \wedge \mathbf{a}_A$, otteniamo che la posizione del centro delle accelerazioni rispetto ad A è data da

$$C_a - A = \frac{\omega^2}{\dot{\omega}^2 + \omega^4} \mathbf{a}_A + \frac{\dot{\omega}}{\dot{\omega}^2 + \omega^4} \mathbf{K} \wedge \mathbf{a}_A .$$

In generale, il centro delle accelerazioni C_a non coincide con il *C.I.R.*

5 Cinematica relativa: ipotesi e risultati.

Il problema della Cinematica Relativa è quello di porre in relazione le misure delle grandezze cinematiche (posizione, velocità ed accelerazione) effettuate da due osservatori *arbitrariamente scelti*; è sufficiente a tal fine prendere come sistema meccanico un punto materiale; i risultati si estendono poi ai sistemi di punti ed ai corpi rigidi.

Assumiamo che entrambi gli osservatori facciano uso della geometria euclidea e misurino il tempo con orologi uguali. Dal punto di vista strettamente cinematico, ai fini della descrizione del moto tutti gli osservatori sono equivalenti; *in modo del tutto convenzionale*, chiameremo *fisso* o *assoluto* il primo osservatore (indicando con $(O; X, Y, Z)$ una terna destra associata ad esso), e *mobile* o *relativo* il secondo osservatore (indicando con $(o; x, y, z)$ una terna destra associata ad esso, di versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$). Sia infine $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare dell'osservatore relativo, cioè della terna mobile rispetto alla terna fissa.

I risultati della cinematica relativa sono una conseguenza diretta dei seguenti due postulati.

Tempo assoluto. *Se in un generico punto P un evento ha durata Δt per l'osservatore fisso, e $\Delta t'$ per l'osservatore mobile, si ha*

$$\Delta t = \Delta t' . \quad (5.1)$$

Fissando la stessa origine dei tempi, segue dal postulato che $t = t'$. A parole, tale postulato ci dice quindi che tutti gli osservatori fanno uso dello stesso tempo t , che è quindi indipendente dall'osservatore.

Spazio assoluto. *Dati allo stesso istante di tempo t due punti A e B , siano ℓ e ℓ' le distanze (euclidee) dei due punti, misurate dai due osservatori; risulta*

$$\ell = \ell' \quad (5.2)$$

per cui la distanza di due punti è indipendente dall'osservatore che la misura.

Osservazione. Segue quindi dal secondo postulato che la proprietà di rigidità è anch'essa assoluta, cioè indipendente dall'osservatore. \diamond

Ciò premesso, consideriamo un punto materiale P , la cui posizione assoluta è data dal vettore $(P - O)$; come visto in precedenza, la velocità assoluta \mathbf{V} e l'accelerazione assoluta \mathbf{A} sono allora date dai vettori derivato primo e secondo della posizione assoluta rispetto al tempo:

$$\mathbf{V} := \frac{d}{dt}(P - O) \quad \mathbf{A} := \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}(P - O) . \quad (5.3)$$

Per quanto riguarda l'osservatore relativo, che in ogni istante misura la posizione ed il moto di P tramite le coordinate x, y, z e le loro variazioni nel tempo, risulta del tutto naturale introdurre la seguente definizione.

5.1 Definizione. *La posizione relativa \mathbf{r} , la velocità relativa \mathbf{v}_r e l'accelerazione relativa \mathbf{a}_r di P sono date dai vettori*

$$\mathbf{r} := x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} , \quad \mathbf{v}_r := \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} , \quad \mathbf{a}_r := \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} . \quad (5.4)$$

La velocità di trascinamento \mathbf{V}_s e l'accelerazione di trascinamento \mathbf{A}_s sono date dai vettori

$$\mathbf{V}_o + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - o) , \quad \mathbf{A}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - o) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - o)) . \quad (5.5)$$

Osservazioni.

(i) La posizione relativa è data, in ogni istante, dal vettore $(P - o)$, per cui è $\mathbf{r}(t) = (P - o)(t)$; usiamo la lettera \mathbf{r} solo per sottolineare che consideriamo questo vettore scritto sulla base data dai versori della terna mobile: questa rappresentazione è utile nel seguito. È importante osservare che la velocità relativa \mathbf{v}_r non è la derivata della posizione relativa \mathbf{r} , e che l'accelerazione relativa \mathbf{a}_r non è la derivata della velocità relativa; infatti derivando rispetto al tempo il vettore \mathbf{r} , e tenendo conto delle formule di Poisson (1.7) che danno le derivate temporali dei versori della terna mobile, si ha

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} := \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} + x\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} + y\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j} + z\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k}$$

da cui

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - o). \quad (5.6)$$

Procedendo in modo del tutto simile, derivando rispetto al tempo la velocità relativa $\mathbf{v}_r = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$ si ottiene

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r. \quad (5.7)$$

(ii) Le relazioni tra accelerazione, velocità e posizione relative sono casi particolari di un *risultato più generale, utile nelle applicazioni, che riguarda l'espressione della derivata di un generico vettore scritta rispetto agli assi di una terna mobile*. Sia data una terna mobile con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ e sia \mathbf{u} un generico vettore; utilizziamo la rappresentazione cartesiana di \mathbf{u} rispetto agli assi della terna mobile: $\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$ e definiamo *derivata relativa* del vettore \mathbf{u} il vettore

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_r := \dot{u}_x\mathbf{i} + \dot{u}_y\mathbf{j} + \dot{u}_z\mathbf{k}. \quad (5.8)$$

Tenendo allora conto delle formule di Poisson, derivando il vettore si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \dot{u}_x\mathbf{i} + \dot{u}_y\mathbf{j} + \dot{u}_z\mathbf{k} + u_x\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} + u_y\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j} + u_z\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k} \\ &= \dot{u}_x\mathbf{i} + \dot{u}_y\mathbf{j} + \dot{u}_z\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}; \end{aligned}$$

utilizzando la definizione di derivata relativa, abbiamo così il seguente risultato generale

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}. \quad (5.9)$$

Possiamo allora interpretare i precedenti risultati (5.6) e (5.7) dicendo che la velocità relativa è la derivata relativa della posizione relativa, e l'accelerazione relativa è la derivata relativa della velocità relativa.

(iii) Come è evidente dalla (5.5), e ricordando la formula dell'atto di moto rigido, la velocità di trascinamento rappresenta la velocità che il punto avrebbe se fosse solidale alla terna mobile nella posizione P , dovuta al *moto di trascinamento* della terna mobile; la velocità di trascinamento non è quindi la velocità dell'origine della terna mobile, data da \mathbf{V}_o , nè della terna mobile (la terna mobile non è un punto ma un c.r., quindi non ha una velocità, ma un atto di moto).

In modo del tutto simile, segue ancora dalla (5.5) e dalla formula dell'accelerazione per il c.r. che l'accelerazione di trascinamento è l'accelerazione che il punto avrebbe se fosse solidale alla terna mobile nella posizione P , dovuta al *moto di trascinamento* della terna mobile.

Osserviamo infine che l'accelerazione di trascinamento non è la derivata della velocità di trascinamento, essendo $\mathbf{A}_s = d\mathbf{V}_s/dt + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$. \diamond

Tornando al problema della cinematica relativa, tenendo conto di tali premesse la relazione tra le grandezze cinematiche misurate dai due osservatori è ora facilmente deducibile. Anzitutto la relazione tra le posizioni assolute e relative di P segue dall'identità vettoriale

$$(P(t) - O) = (P(t) - o(t)) + (o(t) - O) \quad (5.10)$$

dove $(o - O)$ è la posizione assoluta dell'origine o della terna mobile; derivando tale relazione rispetto al tempo si ottiene

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - o) + \mathbf{V}_o \stackrel{(5.5)}{=} \mathbf{v}_r + \mathbf{V}_s . \quad (5.11)$$

Abbiamo così il seguente risultato.

5.2 Teorema (Galileo). *La velocità assoluta di un punto P è la somma vettoriale della velocità relativa e della velocità di trascinamento*

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_r + \mathbf{V}_s . \quad (5.12)$$

Consideriamo ora un c.r. in moto rispetto ai due osservatori, con velocità angolare assoluta $\boldsymbol{\Omega}$ rispetto all'osservatore fisso e velocità angolare relativa $\boldsymbol{\omega}_r$ rispetto all'osservatore mobile; sia inoltre, come detto in precedenza, $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare della terna mobile rispetto a quella fissa ($\boldsymbol{\omega}$ è quindi la velocità angolare di trascinamento del c.r.); applicando il teorema di Galileo ai punti del c.r. si dimostra allora il seguente risultato.

5.3 Corollario. *La velocità angolare assoluta di un c.r. è la somma vettoriale della velocità angolare relativa e della velocità angolare della terna mobile*

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega} . \quad (5.13)$$

Dimostrazione. Ricordiamo che la proprietà di rigidità è invariante per tutti gli osservatori. Consideriamo un c.r. che ha velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$ rispetto all'osservatore fisso e $\boldsymbol{\omega}_r$ rispetto all'osservatore mobile, di origine o , ed indichiamo con $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare dell'osservatore mobile rispetto a quello fisso; dati due generici punti A e B del c.r., si ha allora

$$\mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A = \boldsymbol{\Omega} \wedge (B - A) \quad (5.14)$$

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_r \wedge (B - A) \quad (5.15)$$

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{v}_B + (\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \wedge (B - o)), \quad \mathbf{V}_A = \mathbf{v}_A + (\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \wedge (A - o)), \quad (5.16)$$

dove la prima relazione esprime l'atto di moto rigido per l'osservatore fisso, la seconda l'atto di moto rigido per l'osservatore mobile e la terza il teorema di Galileo per i punti B e A . Si ha allora

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge (B - A) \stackrel{(5.14)}{=} \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A \stackrel{(5.16)}{=} \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A) \stackrel{(5.15)}{=} \boldsymbol{\omega}_r \wedge (B - A) + \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A)$$

e quindi $(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}_r - \boldsymbol{\omega}) \wedge (B - A) = 0$; il risultato (5.13) segue allora dall'arbitrarietà del vettore $B - A$. \square

Il passo successivo riguarda la relazione tra le accelerazioni; per questo è sufficiente derivare ambo i membri della relazione (5.11) tra le velocità; si ha così

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = (\mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - o) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - o)) + \mathbf{A}_o. \quad (5.17)$$

Tenendo conto della definizione (5.5) di accelerazione di trascinamento otteniamo allora

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r + \mathbf{A}_s + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r ;$$

Definiamo inoltre *accelerazione complementare o di Coriolis* il termine $2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$

$$\mathbf{a}_c := 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r ;$$

otteniamo allora il seguente risultato.

5.4 Teorema (Coriolis). *L'accelerazione assoluta di un punto P è la somma vettoriale dell'accelerazione relativa, dell'accelerazione di trascinamento e dell'accelerazione di Coriolis*

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r + \mathbf{A}_s + \mathbf{a}_c . \quad (5.18)$$

Osservazioni.

(i) L'accelerazione di Coriolis del punto P è nulla se l'osservatore relativo ha un atto di moto traslatorio ($\boldsymbol{\omega} = 0$) rispetto all'osservatore assoluto. È inoltre nulla se P è fermo rispetto all'osservatore mobile ($\mathbf{v}_r = 0$): questa circostanza si verifica senz'altro nei cosiddetti problemi di statica relativa.

(ii) Dal teorema di Coriolis segue poi che due osservatori misurano sempre la stessa accelerazione di P ($\mathbf{A} = \mathbf{a}_r$ in ogni istante) *qualunque sia il moto di P se e solo se si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme.* \diamond

6 Complementi di cinematica del corpo rigido.

Matrice di rotazione e angoli di Eulero. L'orientazione di un c.r. nello spazio può essere caratterizzata, oltre che dai versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di una terna cartesiana $(A; x, y, z)$ solidale al c.r., anche dalla matrice \mathcal{R} dei coseni direttori della terna solidale rispetto ad una terna fissa $(O; X, Y, Z)$

$$\mathcal{R} : \quad \mathcal{R}_{ij} := \cos \widehat{x_i X_j} \quad (x_1 = x, x_2 = y, \dots, X_3 = Z) . \quad (6.1)$$

Come noto dalla geometria, tale matrice è una matrice ortogonale, cioè verifica ad ogni istante t la relazione

$$\mathcal{R} \mathcal{R}^T = \mathcal{R}^T \mathcal{R} = I_3 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^T , \quad (6.2)$$

essendo I_3 la matrice identità (3×3) ⁽⁴⁾.

La proprietà di ortogonalità implica che la matrice \mathcal{R} è individuata da tre parametri indipendenti. Un modo per introdurre tali parametri è il seguente. Consideriamo per semplicità due terne con origine in comune $(A = O)$. Sia ϑ ($0 \leq \vartheta \leq \pi$) (angolo di *nutazione*) l'angolo che z forma con Z ; definiamo poi l'asse dei nodi come l'asse intersezione del piano xy con il piano XY , e sia \mathbf{N} il versore di tale asse, con il verso tale che nella rotazione che sovrappone Z a z una vite destra avanza nel verso di \mathbf{N} . Introduciamo l'angolo ψ ($0 \leq \psi \leq 2\pi$) (detto *angolo di precessione*) che l'asse dei nodi forma con l'asse X e l'angolo φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) (detto *angolo di rotazione propria*) che l'asse x forma con l'asse dei nodi. Gli angoli $(\psi, \vartheta, \varphi)$ sono detti gli *angoli di Eulero*.

Indichiamo con $\mathcal{R}(\beta; \mathbf{n})$ la matrice di rotazione di un angolo β attorno ad un asse \mathbf{n} ; si può allora dimostrare che vale la seguente fattorizzazione della matrice di rotazione \mathcal{R}

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\varphi; \mathbf{k}) \mathcal{R}(\vartheta; \mathbf{N}) \mathcal{R}(\psi; \mathbf{K}) , \quad (6.3)$$

cioè la rotazione del c.r. che porta la terna (X, Y, Z) a sovrapporsi alla terna (x, y, z) può essere ottenuta come composizione di tre rotazioni successive, di un angolo ψ attorno all'asse Z (che porta l'asse X a sovrapporsi all'asse dei nodi), di ϑ attorno all'asse dei nodi (che porta Z a sovrapporsi a z) e infine di φ attorno all'asse z .

Dalla (6.3) segue allora che, noti gli angoli di Eulero, la matrice \mathcal{R} è data da

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta & \sin \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \cos \psi - \sin \psi \cos \varphi \cos \vartheta & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta \sin \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix} . \quad (6.4)$$

Viceversa, data una matrice ortogonale \mathcal{R} gli angoli di Eulero sono determinati, ad esempio dalle relazioni

$$\cos \vartheta = \mathcal{R}_{33}, \quad \tan \varphi = \frac{\mathcal{R}_{13}}{\mathcal{R}_{23}}, \quad \tan \psi = -\frac{\mathcal{R}_{31}}{\mathcal{R}_{32}} .$$

Segue immediatamente dalla rappresentazione (6.4) della matrice di rotazione che gli elementi della prima riga sono le componenti di \mathbf{i} rispetto alla terna fissa, quelli della seconda riga le componenti di \mathbf{j} e quelli della terza riga le componenti di \mathbf{k} .

⁴Dalla (6.2) segue che $\det \mathcal{R} = \pm 1$; considereremo nel seguito matrici ortogonali con $\det \mathcal{R} = 1$, corrispondenti a rotazioni che mandano terne destre ancora in terne destre, ed escludendo quindi le riflessioni spaziali.

Matrice di rotazione e velocità angolare. Poiché le componenti dei versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sulla terna fissa sono date dalle righe della matrice \mathcal{R} , partendo dall'espressione (1.8) si può esprimere $\boldsymbol{\omega}$ in funzione degli angoli di Eulero e delle loro derivate. Alla fattorizzazione (6.3) della matrice di rotazione come prodotto di tre matrici caratterizzanti tre rotazioni successive corrisponde la seguente semplice espressione di $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{K} + \dot{\vartheta} \mathbf{N} + \dot{\varphi} \mathbf{k}$$

come somma di tre vettori (si noti però che ci si riferisce a tre direzioni non ortogonali, per cui $\dot{\vartheta}, \dot{\psi}$ e $\dot{\varphi}$ non sono componenti cartesiane ortogonali di $\boldsymbol{\omega}$).

Le rappresentazioni cartesiane ortogonali di $\boldsymbol{\omega}$ sulla terna fissa e sulla terna solidale al c.r. sono date rispettivamente da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{I} + \omega_y \mathbf{J} + \omega_z \mathbf{K} &\Rightarrow \begin{cases} \omega_x = \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \\ \omega_y = \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{cases} \\ \boldsymbol{\omega} = p \mathbf{i} + q \mathbf{j} + r \mathbf{k} &\Rightarrow \begin{cases} p = \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi \\ q = -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta \end{cases} . \end{aligned}$$

I risultati sulla formula fondamentale dell'atto di moto rigido, dedotti con il formalismo vettoriale attraverso le formule di Poisson, si possono ottenere a partire dalla matrice di rotazione e dalle sue proprietà; questa diversa deduzione mostrerà in effetti che l'interpretazione della velocità angolare in termini vettoriali è essenzialmente dovuta al fatto che si è nello spazio vettoriale tridimensionale \mathbf{R}^3 .

Consideriamo un corpo rigido ed un suo punto A , arbitrariamente scelto; sia $(O; X, Y, Z)$ una terna cartesiana fissa di origine O , $(A; x, y, z)$ una terna di origine A e solidale al c.r.; in ogni istante t , la posizione di un generico punto P del c.r. è allora individuata dalle sue coordinate (X, Y, Z) rispetto alla terna fissa, che sono funzioni di t , o dalle sue coordinate (x, y, z) rispetto alla terna solidale, *che sono costanti essendo il corpo rigido*. Si ha la seguente corrispondenza

$$P - O = X \mathbf{I} + Y \mathbf{J} + Z \mathbf{K} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{X}_P = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$P - A = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad \Leftrightarrow \quad x_P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Analogamente per la velocità abbiamo

$$\mathbf{v}_P = \dot{X} \mathbf{I} + \dot{Y} \mathbf{J} + \dot{Z} \mathbf{K} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{V}_P = \dot{\mathcal{X}}_P = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} .$$

Se \mathcal{R} è la matrice di rotazione (6.1), la relazione che lega le coordinate di P rispetto alle due terne è data, ad ogni istante t , dalla ben nota formula della rototraslazione degli assi cartesiani

$$x_P = a + \mathcal{R} \mathcal{X}_P \quad a = -\mathcal{R} \mathcal{X}_A \quad (6.5)$$

con

$$A - O = X_A \mathbf{I} + Y_A \mathbf{J} + Z_A \mathbf{K} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{X}_A = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$$

(l'espressione di a si ottiene immediatamente ponendo nella (6.5), valida per ogni punto del c.r., $P = A$, per cui $x_P = x_A = 0$). Si ha quindi

$$x_P = \mathcal{R}(\mathcal{X}_P - \mathcal{X}_A) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X}_P - \mathcal{X}_A = \mathcal{R}^T x_P, \quad (6.6)$$

dove si è tenuto conto del fatto che la matrice di rotazione è una matrice ortogonale. Derivando ora rispetto al tempo la seconda delle (6.6), e ricordando che P appartiene al c.r. e quindi $\dot{x}_P = 0$, si ottiene

$$\mathcal{V}_P - \mathcal{V}_A = \dot{\mathcal{R}}^T x_P \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}_P - \mathcal{V}_A = \dot{\mathcal{R}}^T \mathcal{R}(\mathcal{X}_P - \mathcal{X}_A) = \Omega(\mathcal{X}_P - \mathcal{X}_A)$$

dove si è introdotta la matrice

$$\Omega := \dot{\mathcal{R}}^T \mathcal{R}$$

detta la *matrice velocità angolare (o di spin)* del c.r.

La condizione di ortogonalità della matrice di rotazione \mathcal{R} implica che

$$\Omega + \Omega^T = \dot{\mathcal{R}}^T \mathcal{R} + \mathcal{R}^T \dot{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}(\mathcal{R}^T \mathcal{R}) = \frac{dI_3}{dt} = 0$$

per cui la matrice velocità angolare Ω è *antisimmetrica*.

Abbiamo in conclusione la seguente corrispondenza tra descrizione vettoriale e matriciale dell'atto di moto rigido

$$\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{V}_P - \mathcal{V}_A = \Omega(\mathcal{X}_P - \mathcal{X}_A) \quad (\Omega = -\Omega^T).$$

La relazione tra la matrice Ω ed il vettore $\boldsymbol{\omega}$ è chiarita osservando che per matrici 3×3 antisimmetriche possiamo stabilire la seguente corrispondenza biunivoca con i vettori di \mathbf{R}^3

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{I} + \omega_y \mathbf{J} + \omega_z \mathbf{K}; \quad (6.7)$$

tale corrispondenza è in effetti un *isomorfismo* se al prodotto (righe per colonne) di una matrice per un vettore facciamo corrispondere il prodotto (vettore) per $\boldsymbol{\omega}$

$$\Omega \leftrightarrow \boldsymbol{\omega}, \quad \mathcal{X}_P \leftrightarrow (P - O), \quad \Omega \mathcal{X}_P \leftrightarrow \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O).$$

Osserviamo infine che tale isomorfismo è possibile in \mathbf{R}^3 , ove le matrici antisimmetriche (al pari delle matrici ortogonali) sono caratterizzate da tre parametri indipendenti, così come i vettori: in uno spazio vettoriale di dimensione generica $n > 3$, lo spazio delle matrici antisimmetriche (al pari delle matrici ortogonali) ha invece dimensione $n(n-1)/2 > n$, per cui *in dimensione generica la velocità di rotazione del corpo è caratterizzata da una matrice antisimmetrica e non da un vettore*.

Come semplice applicazione, consideriamo infine il caso dell'atto di moto rigido piano di un c.r. posto nel piano XY e in moto con un punto fisso $A = O$. Scegliendo $z = Z$ fisso, si ha $\vartheta = 0$;

inoltre i piani xy e XY coincidono e l'asse dei nodi è indeterminato, per cui l'orientazione della terna solidale rispetto a quella fissa è individuata dall'angolo α che x forma con X (α è il limite di $\varphi + \psi$ quando $\vartheta \rightarrow 0$). La matrice di rotazione è semplicemente

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ed è ottenibile dalla matrice (6.4) facendo il limite per $\vartheta \rightarrow 0$ e ponendo $\alpha := \lim(\varphi + \psi)$ per $\vartheta \rightarrow 0$). La matrice velocità angolare è allora

$$\Omega = \dot{\mathcal{R}}^T \mathcal{R} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \sin \alpha & -\dot{\alpha} \cos \alpha & 0 \\ \dot{\alpha} \cos \alpha & -\dot{\alpha} \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, per la (6.7), ritroviamo il ben noto risultato $\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha} \mathbf{K} = \dot{\alpha} \mathbf{k}$. La velocità di un punto $P = (X, Y, 0)$ è allora data da

$$\mathcal{V}_P = \Omega \mathcal{X}_P = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} Y \\ \dot{\alpha} X \\ 0 \end{pmatrix}$$

a cui corrisponde il vettore

$$\mathbf{v}_P = -\dot{\alpha} Y \mathbf{I} + \dot{\alpha} X \mathbf{J} = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) .$$

Atto di moto rigido e matrice velocità di deformazione. Consideriamo la formula fondamentale (1.3) dell'atto di moto rigido; in ogni istante, fissato un punto A di velocità \mathbf{v}_A , la velocità \mathbf{v}_P di ogni altro punto P , di coordinate (x, y, z) , è una funzione affine delle coordinate del punto; utilizzando per comodità le notazioni

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z ,$$

$$\omega_1 = \omega_x, \quad \omega_2 = \omega_y, \quad \omega_3 = \omega_z , \quad v_{Ax} = a_1, \quad v_{Ay} = a_2, \quad v_{Az} = a_3$$

otteniamo infatti

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - A) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1 = a_1 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ v_2 = a_2 + \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ v_3 = a_3 + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{cases} . \quad (6.8)$$

Se ora introduciamo la matrice simmetrica \mathcal{D} , di componenti

$$\mathcal{D}_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.9)$$

è immediato verificare che il campo di velocità (6.8) annulla identicamente la matrice.

Viceversa, se consideriamo la distribuzione di velocità \mathbf{v} per un corpo continuo, si può dimostrare che la soluzione più generale del sistema di 6 equazioni a derivate parziali nelle incognite v_i

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

che esprimono l'annullamento di \mathcal{D} è data dal campo di velocità (6.8), e corrisponde quindi ad un atto di moto rigido: pertanto *l'annullamento della matrice \mathcal{D} è condizione necessaria e sufficiente perchè l'atto di moto sia rigido*, e questo fatto giustifica la definizione di *matrice velocità di deformazione* attribuita a \mathcal{D} .

La matrice \mathcal{D} misura quindi la deformabilità del continuo: in particolare si può dimostrare che gli elementi diagonali

$$\mathcal{D}_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \mathcal{D}_2 = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \mathcal{D}_3 = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

misurano la velocità di allungamento (o accorciamento) di un segmento di lunghezza unitaria lungo x, y, z , e sono detti gli *allungamenti*, mentre gli elementi fuori diagonale

$$\mathcal{D}_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad \mathcal{D}_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad \mathcal{D}_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$$

misurano la velocità con cui variano gli angoli tra gli assi coordinati, e vengono detti gli *scorrimenti*. Osserviamo infine che $\text{Tr } \mathcal{D} = \text{div } \mathbf{v}$, per cui l'atto di moto rigido ha $\text{div } \mathbf{v} = 0$, cioè è solenoidale.

Il significato della matrice velocità di deformazione può essere ulteriormente chiarito dalle seguenti considerazioni. Dato un generico continuo, consideriamo un punto P di posizione $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ed un punto P' in un intorno di P , di posizione $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$; supponendo il campo di velocità sufficientemente regolare, possiamo allora scrivere

$$\mathbf{v}_{P'} - \mathbf{v}_P = \mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} dx_j + O(|d\mathbf{x}|^2) = \mathcal{G} d\mathbf{x} + O(|d\mathbf{x}|^2) \quad (6.10)$$

dove si è introdotta la matrice *gradiente di velocità* \mathcal{G} , di componenti

$$\mathcal{G}_{ij} := \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

e si è indicato con $\mathcal{G} d\mathbf{x}$ il vettore di componenti

$$(\mathcal{G} d\mathbf{x})_i := \sum_{k=1}^3 \mathcal{G}_{ik} dx_k.$$

Utilizzando la ben nota decomposizione di ogni matrice quadrata nella sua parte simmetrica e antisimmetrica è allora $\mathcal{G} = \mathcal{D} + \Omega$, con

$$\mathcal{D} := \frac{1}{2}(\mathcal{G} + \mathcal{G}^T), \quad \mathcal{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (6.11)$$

$$\Omega := \frac{1}{2}(\mathcal{G} - \mathcal{G}^T), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.12)$$

La matrice antisimmetrica Ω è associata, per quanto detto in precedenza, ad un atto di moto rigido con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ (si verifica facilmente che la matrice Ω data dalla (6.12) assume la forma (6.7) in corrispondenza al campo di velocità (6.8)). Al primo ordine in $|d\mathbf{x}|$, la (6.10) si scrive quindi nella forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = (\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \Omega d\mathbf{x}) + \mathcal{D} d\mathbf{x} ;$$

la distribuzione di velocità nell'intorno di un generico punto di un continuo può cioè essere analizzata come la composizione di un atto di moto rigido, con velocità angolare Ω , e di un atto di moto non rigido con velocità di deformazione \mathcal{D} : l'atto di moto è rigido se e solo se $\mathcal{D} = 0$.

7 Oscillatore armonico.

L'equazione dell'oscillatore armonico è data da:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad (7.1)$$

con $b \geq 0$ e ω costanti: il termine noto f è detto la *forzante* applicata all'oscillatore.

[A titolo di esempio, se l'oscillatore è dato da un punto di massa m mobile lungo l'asse x , soggetto all'azione di una forza elastica di costante k , ad una forza viscosa di costante h e ad una generica forza applicata F dipendente da t , nella (7.1) è:

$$x = \text{ascissa del punto} \quad 2b = \frac{h}{m} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}. \quad (7.2)$$

Se l'oscillatore è un oscillatore elettrico (circuito RCL), nella (7.1) è:

$$x = \text{carica elettrica nel circuito} \quad 2b = \frac{R}{L} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f(t) = \frac{E(t)}{L} \quad (7.3)$$

dove $E(t)$ è la forza elettromotrice nel circuito (l'equazione è anche l'equazione dell'intensità di corrente $I(t)$ ponendo $x = I$ e $f(t) = \dot{E}(t)/L$.]

Oscillatore libero ($f = 0$).

La soluzione della (7.1) è riportata qui di seguito, separando per comodità il caso dell'oscillatore non smorzato da quello dell'oscillatore smorzato; C_1 e C_2 sono costanti di integrazione arbitrarie, che devono essere determinate con le condizioni iniziali del moto $x(t_0) = x_0$ e $\dot{x}(t_0) = v_0$.

oscillatore libero non smorzato ($f = 0$, $b = 0$):

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \quad (7.4)$$

oscillatore libero smorzato ($f = 0$, $b \neq 0$):

$$\text{sottosmorzato} \quad b < \omega \quad x(t) = e^{-bt}(C_1 \sin \tilde{\omega} t + C_2 \cos \tilde{\omega} t) \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - b^2} \quad (7.5)$$

$$\text{criticamente smorzato} \quad b = \omega \quad x(t) = e^{-\omega t}(C_1 + C_2 t) \quad (7.6)$$

$$\text{sovrasmorzato} \quad b > \omega \quad x(t) = e^{-bt}(C_1 \sinh \bar{\omega} t + C_2 \cosh \bar{\omega} t) \quad \bar{\omega} = \sqrt{b^2 - \omega^2} \quad (7.7)$$

(si noti che, in ogni caso, $x(t) \mapsto 0$ per $t \mapsto +\infty$).

Oscillatore forzato ($f \neq 0$).

Come noto, la soluzione generale dell'equazione (7.1) è data dalla somma della soluzione generale dell'equazione omogenea, data dalle (7.4)-(7.7), e di una soluzione particolare \bar{x} , che dipende dal termine forzante f ; senza riportare il risultato generale per f qualunque, consideriamo, a titolo di esempio, solo i casi di forzante costante, con dipendenza polinomiale dal tempo e armonica:

(i) forzante costante:

$$f(t) = f_0 (\text{costante}) \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = f_0/\omega^2$$

(ii) forzante polinomiale:

$$f(t) = p_n(t) (\text{polinomio di grado } n) \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = q_n(t) (\text{polinomio completo di grado } n)$$

(i) i coefficienti di $q_n(t)$ si determinano sostituendo $x(t) = q_n(t)$ nella (7.1) con $f(t) = p_n(t)$ ed applicando il principio di identità dei polinomi, cioè uguagliando in ambo i membri i coefficienti di uguali potenze di t .

(iii) forzante armonica:

$$f(t) = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t .$$

Distinguiamo, per maggior semplicità nella scrittura esplicita dei risultati, il caso smorzato $b = 0$ dal caso non smorzato $b \neq 0$, anche se il primo può essere ottenuto dal secondo considerando il limite per $b \rightarrow 0$.

Nel caso non smorzato ($b = 0$) la soluzione particolare \bar{x} è data da:

$$\lambda \neq \omega : \quad f(t) = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{A}{\omega^2 - \lambda^2} \sin \lambda t + \frac{B}{\omega^2 - \lambda^2} \cos \lambda t \quad (7.8)$$

$$\lambda = \omega : \quad f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{B}{2\omega} t \sin \omega t - \frac{A}{2\omega} t \cos \omega t ; \quad (7.9)$$

il caso (7.9), in cui il termine forzante ha una pulsazione uguale alla pulsazione propria dell'oscillatore libero è quello ben noto della *risonanza*: la soluzione particolare $\bar{x} = \bar{x}(t)$ non è limitata, ma ha massimi e minimi che in valore assoluto crescono linearmente nel tempo.

Nel caso smorzato ($b \neq 0$), e per λ generico, la soluzione particolare $\bar{x}(t)$ è data da

$$\bar{x} = \frac{(\omega^2 - \lambda^2) A + 2b\lambda B}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4b^2\lambda^2} \sin \lambda t + \frac{(\omega^2 - \lambda^2) B - 2b\lambda A}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4b^2\lambda^2} \cos \lambda t = C \sin(\lambda t + \varphi) , \quad (7.10)$$

$$C = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4b^2\lambda^2}} , \quad \tan \varphi = \frac{(\omega^2 - \lambda^2) B - 2b\lambda A}{(\omega^2 - \lambda^2) A + 2b\lambda B} :$$

si tratta quindi ancora di una funzione armonica, di ampiezza C e di pulsazione uguale a quella del termine forzante.

Per ω e b fissati, con $b < \omega/\sqrt{2}$, l'ampiezza C ha un massimo $C = \bar{C}$ per $\lambda = \bar{\lambda}$, ed è :

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\omega^2 - 2b^2} , \quad \bar{C} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{2b \sqrt{\omega^2 - b^2}} ;$$

fissata l'ampiezza $\sqrt{A^2 + B^2}$ del termine forzante, l'ampiezza C della soluzione particolare è quindi tanto maggiore quanto più la pulsazione λ è vicina a $\bar{\lambda}$ e quanto più piccolo è b : per $\lambda = \bar{\lambda}$ si parla anche in questo caso di *condizioni di risonanza*.

8 Equazioni cardinali.

Questa è una breve sintesi delle equazioni che, secondo l'impostazione della meccanica newtoniana (o vettoriale), caratterizzano il moto e l'equilibrio del punto materiale, del corpo rigido e dei sistemi di corpi rigidi liberi o tra loro vincolati (sistemi articolati); tali sistemi si possono formalmente analizzare come insiemi di punti (schema particellare) o come insiemi di corpi continui. In effetti, lo schema formale e concettuale adottato nella formulazione delle equazioni di seguito descritte viene mantenuto anche per formulare le equazioni di moto e di equilibrio dei *continui deformabili*.

Lo scopo di questa sintesi è solo di fissare alcune notazioni e definizioni: si rimanda ai testi per una trattazione più completa.

- Rispetto ad un osservatore inerziale, le equazioni di moto e di equilibrio di un punto materiale P sono date da

$$\mathbf{F} + \mathbf{\Phi} = m\mathbf{a} , \quad \mathbf{F} + \mathbf{\Phi} = 0 \quad (8.1)$$

dove m è la massa del punto, \mathbf{F} è la forza attiva applicata, $\mathbf{\Phi}$ la reazione vincolare, cioè la forza esercitata dal vincolo cui è eventualmente soggetto il punto. Rispetto ad un osservatore non inerziale, la prima equazione continua a valere annoverando tra le forze \mathbf{F} anche la forza apparente di trascinamento e la forza di Coriolis, la seconda vale ancora aggiungendo a \mathbf{F} la forza apparente di trascinamento (la forza di Coriolis essendo identicamente nulla in condizioni di equilibrio relativo).

Nota la forza \mathbf{F} , le equazioni (8.1) contengono come incognite la posizione P del punto e la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}$. Se quindi il punto è vincolato (ad una linea o ad una superficie) ed il problema è quello di determinare il moto o l'equilibrio, si deve pervenire ad *equazioni pure* (contenenti cioè la sola posizione), eliminando la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}$.

- Consideriamo un sistema esteso, visto come un insieme di punti materiali P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) o come un continuo che occupa un volume $\tau \subset \mathbf{R}^3$. Dalle (8.1) scritte per ogni punto P_i o per ogni elemento continuo di massa $dm = \rho d\tau$ (ρ densità materiale del sistema) si perviene, tenendo conto del principio di azione e reazione (come conseguenza del quale il risultante ed il momento risultante delle forze interne in un qualunque sistema meccanico sono identicamente nulli), alle seguenti equazioni, che hanno una validità del tutto generale e che sono dette le *Equazioni cardinali della dinamica e della statica*:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R} + \mathbf{R}' , \quad \mathbf{R} + \mathbf{R}' = 0 \quad (8.2)$$

$$\frac{d\mathbf{\Gamma}_0}{dt} + \mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}'_0 , \quad \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}'_0 = 0 . \quad (8.3)$$

Il punto O è generico; se O è fisso, oppure coincide con il centro di massa G , oppure se \mathbf{v}_0 è parallelo alla velocità \mathbf{v}_G del centro di massa, si ha $\mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{Q} = 0$, per cui la prima delle (8.3) assume la forma semplificata

$$\frac{d\mathbf{\Gamma}_0}{dt} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}'_0 .$$

- Le (8.2) sono ottenute sommando le equazioni (8.1) scritte per tutti i punti del sistema: sono dette rispettivamente il *teorema della quantità di moto* e l'*equazione del risultante*. In tali equazioni:

\mathbf{Q} è la *quantità di moto*, definita come la somma vettoriale delle quantità di moto dei singoli punti o come l'integrale della quantità di moto infinitesima $\mathbf{v} dm = \rho \mathbf{v} d\tau$ associata ad un elemento di massa dm

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{Q} = \int_m \mathbf{v} dm = \int_{\tau} \mathbf{v} \rho d\tau; \quad (8.4)$$

\mathbf{R} e \mathbf{R}' sono rispettivamente il *Risultante delle forze esterne* attive e reattive applicate al sistema, cioè delle azioni sui punti del sistema dovuti all'interazione con elementi che non fanno parte del sistema stesso (come già ricordato, il risultante delle forze interne attive e reattive è identicamente nullo per ogni sistema meccanico, per il principio di azione e reazione); per un sistema di punti si ha

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{R}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{\Phi}_i. \quad (8.5)$$

• Le (8.3) sono ottenute moltiplicando vettorialmente per $(P_i - O)$ l'equazione di moto (o di equilibrio) per il generico punto P_i e sommando le equazioni così ottenute su tutti i punti del sistema: esse sono dette rispettivamente il *teorema del momento delle quantità di moto* e l'*equazione del momento*. In tali equazioni:

$\mathbf{\Gamma}_0$ è il *momento delle quantità di moto* (o *momento angolare*) rispetto ad un punto O (di velocità \mathbf{v}_0), definito come la somma vettoriale dei momenti delle quantità di moto dei singoli punti o come l'integrale del momento della quantità di moto infinitesima $(P-O) \wedge \mathbf{v} dm = (P-O) \wedge \rho \mathbf{v} d\tau$ associata ad un elemento di massa dm

$$\mathbf{\Gamma}_0 = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{\Gamma}_0 = \int_m (P - O) \wedge \mathbf{v} dm = \int_{\tau} (P - O) \wedge \rho \mathbf{v} d\tau; \quad (8.6)$$

\mathbf{M}_0 e \mathbf{M}'_0 sono rispettivamente il *Momento risultante* delle forze esterne attive e reattive applicate al sistema, rispetto allo stesso punto O (il momento risultante delle forze interne attive e reattive è identicamente nullo per ogni sistema meccanico, per il principio di azione e reazione); per un sistema di punti si ha:

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{M}'_0 = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \mathbf{\Phi}_i. \quad (8.7)$$

• Oltre a queste equazioni, in dinamica è utile considerare una ulteriore equazione (identicamente soddisfatta nel caso statico), nella quale intervengono però tutte le forze presenti nel sistema, non solo quelle esterne; moltiplicando scalarmente per \mathbf{v}_i l'equazione di moto per il generico punto P_i e sommando sui punti del sistema si ottiene il teorema dell'energia cinetica

$$\frac{dT}{dt} = \Pi; \quad (8.8)$$

T è l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2, \quad T = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho v^2 d\tau, \quad (8.9)$$

Π è la potenza complessiva delle forze applicate al sistema (attive e reattive, sia esterne che interne), definita per un sistema di punti da:

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i \quad (8.10)$$

essendo \mathbf{f}_i la forza complessiva (attiva e reattiva) applicata al punto P_i .

Val la pena di ricordare che mentre le forze interne hanno risultante e momento nulli, la potenza (e il lavoro) delle forze interne è in generale diversa da 0; se però l'atto di moto è rigido anche la potenza delle forze interne è nulla. Questo risultato segue immediatamente osservando che per un qualunque sistema di forze \mathbf{f}_i applicate ai punti P_i le cui velocità siano date dalla formula $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - A)$ dell'atto di moto rigido la potenza è data da

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - A)) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_A + \mathbf{M}_A \cdot \boldsymbol{\omega}; \quad (8.11)$$

se in particolare le forze sono quelle interne, è poi $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M}_A = 0$, e quindi $\Pi^{int.} = 0$.

• Una interessante conseguenza del teorema dell'energia cinetica segue dalle ipotesi:

(i) vincoli bilateri e fissi,

(ii) tutti i vincoli (esterni ed interni) non dissipativi,

(iii) forze attive (esterne e interne) agenti sul sistema posizionali e conservative: esiste cioè una funzione U della configurazione del sistema (detta il potenziale della sollecitazione attiva) per cui $\Pi^{att.} = dU/dt$.

Dalle prime due ipotesi segue che la potenza delle reazioni vincolari è nulla, per cui il teorema dell'energia cinetica fornisce un'equazione pura di moto: $dT/dt = \Pi^{att.}$; dall'ipotesi (iii) segue allora che $dT/dt = \Pi^{att.} = dU/dt$, da cui si deduce che durante il moto si ha la *conservazione dell'energia meccanica*

$$T - U = E .$$

Osservazioni. Le equazioni cardinali consentono di studiare il moto o l'equilibrio di ogni sistema meccanico, senza limitazioni sul tipo di forze applicate e sul tipo di vincoli, esterni ed interni, cui il sistema è sottoposto. In particolare consentono di determinare, oltre al moto o all'equilibrio, le reazioni vincolari applicate al sistema in condizioni dinamiche o statiche, problema quest'ultimo di notevole interesse in molti problemi applicativi.

Occorre però fare alcune osservazioni sull'uso di tali equazioni.

(i) Le equazioni cardinali sono due equazioni vettoriali, corrispondenti a sei equazioni scalari (e a tre equazioni scalari nel caso piano). Osserviamo che formalmente si possono scrivere infinite equazioni, cambiando il polo rispetto a cui scrivere la seconda equazione cardinale; si dimostra però che una volta soddisfatta la prima equazione cardinale e la seconda rispetto ad un polo O , l'equazione cardinale che si ottiene scegliendo un diverso polo A è identicamente soddisfatta dalla soluzione delle prime due; pertanto in statica per un intero sistema non si possono scrivere più di sei equazioni indipendenti, in dinamica si hanno al più (introducendo anche il teorema dell'energia cinetica) sette equazioni indipendenti. Tali equazioni sono condizioni *necessarie* del moto o dell'equilibrio del sistema, ma *non sono in generale sufficienti*, se non per un singolo corpo

rigido. Se si vuole pervenire ad un numero sufficiente di equazioni, occorre quindi applicare tali equazioni anche ai sottosistemi che si possono ottenere analizzando separatamente alcune parti (tipicamente, per un sistema articolato, composto da un numero finito di corpi rigidi tra loro vincolati, si possono considerare come sottosistemi i singoli corpi rigidi).

In linea di principio, quindi, per un sistema di corpi rigidi e di punti materiali scrivendo le equazioni cardinali per il sistema e per le sue parti si perviene ad un numero sufficiente di equazioni che consentono di determinare il moto o l'equilibrio. Occorre però notare che, quando si considera un sottosistema, nelle equazioni relative ad esso compaiono generalmente come forze esterne delle nuove incognite, date dalle reazioni vincolari interne al sistema complessivo, che diventano esterne per il sottosistema che si considera, e che rappresentano le forze che le parti del sistema si scambiano tra loro. Tali forze sono incognite, e le loro proprietà dipendono dalla natura dei vincoli tra le parti del sistema.

Se il sistema è composto da più parti e non si fa una scelta oculata dei sottosistemi e delle equazioni, ci si può trovare quindi a dover analizzare un numero elevato di equazioni anche per sistemi con pochi gradi di libertà.

Come semplice esempio di tale situazione generale, ricordiamo il caso ben noto di un sistema biella-manovella, costituito da un'asta OA incernierata in O (manovella) e da un'asta AB (biella) collegata alla prima nella cerniera A e con l'estremo B vincolato con un carrello, che supponiamo liscio, all'esterno. Tale sistema ha un grado di libertà; per determinarne l'equilibrio, note le forze attive applicate, si hanno a disposizione sei equazioni, ad esempio tre equazioni per l'intero sistema e tre per la biella AB , nelle sei incognite rappresentate, oltre che dalla coordinata libera, dalle due reazioni vincolari nella cerniera fissa O , dalla reazione nel carrello B e dalle due reazioni interne tra biella e manovella nella cerniera A (supponiamo che i vincoli siano ideali (non dissipativi)). Come noto, la scelta più opportuna è quella di scrivere l'equazione $\mathbf{M}_0 = 0$ per il sistema, e l'equazione $\mathbf{M}_A = 0$ per la sola biella AB , avendo così un sistema di due equazioni nelle due incognite date dalla coordinata libera e dalla reazione vincolare nel carrello.

(ii) In base alle osservazioni precedenti, se lo scopo è quello di determinare il moto o l'equilibrio del sistema, senza calcolare anche le reazioni vincolari, l'uso delle equazioni cardinali presenta quindi due tipi di difficoltà: occorre pervenire ad equazioni pure nelle sole incognite di configurazione (coordinate libere) eliminando le reazioni vincolari dal sistema di equazioni cardinali che si sono scritte, e determinare un numero di equazioni pure indipendenti in numero pari ai gradi di libertà del sistema.

(iii) Come detto, le equazioni cardinali non forniscono un metodo generale per eliminare le reazioni vincolari e scegliere in maniera ottimale il numero di equazioni pure sufficienti a risolvere il problema del moto o dell'equilibrio. Semplificando, e un po' riduttivamente, si può vedere la *Meccanica Analitica* come una formulazione del problema dell'equilibrio e del moto che è sostanzialmente equivalente all'impostazione newtoniana, ma che consente di scrivere direttamente delle equazioni pure di moto o di equilibrio in numero uguale al numero di gradi di libertà del sistema, eliminando a priori l'introduzione delle reazioni vincolari. In effetti, per raggiungere tale scopo occorre restringere la classe di sistemi che si analizzano, ponendo delle restrizioni sul tipo di vincoli introdotti (semplificando, si perde la possibilità di analizzare quei sistemi in cui è presente il fenomeno dell'attrito, retto ad esempio dal modello di Coulomb). Anche se quindi la meccanica analitica ha una minor generalità della meccanica vettoriale ora schematizzata, tuttavia la classe di sistemi considerata è ancora molto generale. \diamond

9 Analisi delle forze applicate al corpo rigido.

Ricordiamo il postulato generale per cui in ogni sistema meccanico la forza è un vettore applicato, ovvero è una grandezza caratterizzata da un vettore \mathbf{F} e da un punto di applicazione: l'equilibrio e il moto di qualunque sistema non sono alterati se più forze applicate nello stesso punto sono sostituite dalla loro somma vettoriale o, viceversa, se una forza \mathbf{F} applicata in un punto viene sostituita con più forze, applicate nello stesso punto, aventi \mathbf{F} come loro somma (*prima operazione invariante, o di composizione*).

Nel caso del c.r., si **postula** per le forze la seguente ulteriore proprietà. Data una forza \mathbf{F} applicata in un punto, definiamo *retta di applicazione* della forza la retta passante per il punto ed avente la direzione di \mathbf{F} . Si postula allora che l'equilibrio ed il moto del c.r. rimangano inalterati se una forza \mathbf{F} viene sostituita da una forza data ancora dal vettore \mathbf{F} , ma applicata in un diverso punto della retta di applicazione, cioè, intuitivamente, se si fa scorrere la forza lungo la sua retta di applicazione (*seconda operazione invariante, o di scorrimento*).

Queste considerazioni si riassumono nel seguente postulato.

Postulato. *La forza applicata ad un c.r. è una grandezza descritta da un vettore e da una retta di applicazione, ovvero la forza è un cursore.*

Osservazione. A rigore, un vettore applicato ed un cursore andrebbero indicati rispettivamente con le coppie ordinate $(\mathbf{F}; P)$ e $(\mathbf{F}; r)$, essendo \mathbf{F} il vettore, P e r il punto e la retta di applicazione; per maggior semplicità di scrittura, continueremo però ad indicare la forza sul corpo rigido con la sola parte vettoriale \mathbf{F} , precisando a parole punto o retta di applicazione. \diamond

Indichiamo con \mathcal{S} una generica sollecitazione applicata al c.r., data da un insieme di forze \mathbf{F}_i , con punti di applicazione P_i . In base al postulato ora enunciato, è naturale introdurre la seguente definizione.

9.1 Definizione. *Due sollecitazioni \mathcal{S} , \mathcal{S}' sono equipollenti: $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$ se si possono trasformare l'una nell'altra con una successione di operazioni invariantive.*

Osservazione. Dalla definizione segue immediatamente che $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$ implica $\mathcal{S}' \sim \mathcal{S}$, ed infine che $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}' \sim \mathcal{S}''$ implica $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}''$ (proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva). L'equipollenza di sollecitazioni gode quindi della proprietà di equivalenza, per cui in seguito parleremo direttamente di *sollecitazioni equivalenti*. \diamond

L'importanza di tale definizione è evidente: se $\mathcal{S}' \sim \mathcal{S}$, possiamo dedurre qualunque informazione sull'equilibrio o sul moto del c.r. utilizzando le forze della sollecitazione \mathcal{S}' invece che quelle di \mathcal{S} , se tale sostituzione semplifica l'analisi del problema in esame (come vedremo, questa è ad esempio la ragione per cui per un c.r. si può parlare di un unico peso, applicato in un punto opportuno, piuttosto che del sistema di forze peso distribuite nel c.r.).

Perchè tale nozione di equivalenza sia operativamente efficace, è però necessario avere un criterio che permetta di determinare l'equivalenza di due sollecitazioni. A tal fine, ad ogni sollecitazione associamo il Risultante \mathbf{R} e il Momento \mathbf{M}_0 rispetto ad un punto (o polo) O , definiti dalle seguenti somme vettoriali sui punti del sistema in esame

$$\mathbf{R} := \sum_i \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{M}_0 := \sum_i (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i. \quad (9.1)$$

Indicando con \mathbf{R} e con \mathbf{M}_0 il risultante e momento di \mathcal{S} e con \mathbf{R}' , \mathbf{M}'_0 il risultante e momento di \mathcal{S}' , vale allora il seguente fondamentale risultato.

9.2 Teorema. *Due sollecitazioni \mathcal{S} ed \mathcal{S}' sono equivalenti se e solo se hanno ugual risultante ed ugual momento rispetto ad uno stesso punto.*

Osservazioni.

(i) Segue immediatamente dalle definizioni (9.1) di \mathbf{R} e \mathbf{M} che per il momento vale la formula di trasporto al variare del polo

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + (A - B) \wedge \mathbf{R}; \quad (9.2)$$

quindi se due sollecitazioni hanno ugual risultante ed ugual momento rispetto ad un punto, hanno ugual momento rispetto ad ogni altro punto.

(ii) In base al teorema 9.2, una sollecitazione applicata al c.r. è completamente caratterizzata dai due vettori \mathbf{R} e \mathbf{M} , indipendentemente dal numero e dalla disposizione delle singole forze che contribuiscono alla sollecitazione complessiva.

(iii) Per caratterizzare le proprietà di una data sollecitazione, si tratta quindi di analizzare le proprietà di un campo di vettori \mathbf{M} , che variano al variare del punto secondo la relazione (9.2), con \mathbf{R} indipendente dal punto; val la pena di osservare che la (9.2) è *formalmente* analoga alla formula dell'atto di moto rigido $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A) = \mathbf{v}_A + (A - B) \wedge \boldsymbol{\omega}$, per cui *i risultati relativi all'analisi delle forze si possono dedurre dai risultati sull'atto di moto rigido sostituendo \mathbf{v} con \mathbf{M} e $\boldsymbol{\omega}$ con \mathbf{R}* ; tale analogia è puramente formale, basata sul fatto che i vettori \mathbf{v} e \mathbf{M} variano al variare del punto con la stessa formula del trasporto, e non corrisponde ovviamente ad alcuna analogia meccanica tra le grandezze cinematiche \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ e dinamiche \mathbf{R} , \mathbf{M} .

(iv) Se un sistema ha risultante nullo, dalla formula del trasporto (9.2) segue che il momento non dipende dal polo

$$\mathbf{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B \quad \forall A, B \text{ appartenenti al c.r.} \quad (9.3)$$

per cui o il momento è sempre nullo, oppure non esiste alcun punto rispetto al quale il momento si annulla. Sempre dalla formula del trasporto (moltiplicando scalarmente ambo i membri della (9.2) per \mathbf{R}) segue che il prodotto scalare di risultante e momento è uguale per tutti punti, per cui introduciamo l'*invariante scalare* della sollecitazione

$$I := \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}; \quad (9.4)$$

se esiste un punto rispetto a cui il momento si annulla, deve essere $I = 0$; viceversa, se $I \neq 0$ non può esistere alcun punto rispetto a cui il momento si annulla. \diamond

Da quanto detto, si conclude facilmente che una sollecitazione applicata al corpo rigido può ridursi a quattro classi, in base alle proprietà del risultante e del momento. Le prime due corrispondono a sollecitazioni con $\mathbf{R} = 0$, la altre due a sollecitazioni con $\mathbf{R} \neq 0$. Incominciamo ad analizzare sollecitazioni con $\mathbf{R} = 0$, e quindi con momento indipendente dal polo.

I. Sollecitazione nulla. È data da un sistema di forze con $\mathbf{R} = 0$ e $\mathbf{M} = 0$.

Tale sollecitazione corrisponde all'assenza di forze; si dice anche che tale sollecitazione è *equilibrata*, per il seguente motivo. Se esiste una configurazione in cui la sollecitazione applicata ad

un c.r. verifica le equazioni cardinali della Statica: $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M} = 0$, in tale configurazione la sollecitazione è equivalente all'assenza di forze; è allora naturale ammettere che se il c.r. è fermo in tale configurazione esso vi permanga indefinitamente, e quindi che tale configurazione sia di equilibrio (se invece le condizioni iniziali non sono di quiete, all'assenza di forze può corrispondere un moto, genericamente accelerato, che dipende dalle condizioni iniziali e dalla distribuzione di inerzia del corpo). Pertanto introduciamo il seguente postulato:

Postulato. *Le equazioni cardinali della Statica, che sono condizioni necessarie di equilibrio per ogni sistema meccanico, nel caso del c.r. sono anche condizioni sufficienti di equilibrio.*

II. Sollecitazione equivalente ad una coppia di forze. È un sistema con $\mathbf{R} = 0$ e $\mathbf{M} \neq 0$. Il più semplice sistema con tali caratteristiche è proprio la coppia di forze, costituita da due forze uguali ed opposte, con rette di applicazione parallele ma non coincidenti, la cui distanza b è detta il *braccio della coppia*. Una coppia di forze di momento \mathbf{C} è quindi una sollecitazione particolarmente semplice da utilizzare, non dando contributo al risultante \mathbf{R} e contribuendo al momento totale con un termine \mathbf{C} che non dipende dal polo rispetto al quale il momento totale è calcolato; in particolare quindi nello scrivere le equazioni cardinali non è possibile variare il polo in modo da annullare il momento della coppia.

Ad una coppia di momento \mathbf{C} si può quindi pensare di associare due forze uguali ed opposte, di valore F e braccio b , scelte in un piano ortogonale alla direzione di \mathbf{C} e tali che $Fb = C$: tale realizzazione può naturalmente essere fatta in infiniti modi, variando il piano, il valore F ed il braccio b ; si può però dimostrare il seguente risultato, di cui non diamo la dimostrazione, valido indipendentemente dalla particolare realizzazione.

9.3 Teorema. *Se sul c.r. sono applicate due sollecitazioni, corrispondenti a coppie di momenti \mathbf{C} e \mathbf{C}' , la sollecitazione complessiva è equivalente ad una coppia, il cui momento è la somma vettoriale $\mathbf{C} + \mathbf{C}'$ dei momenti delle due coppie.*

Consideriamo infine il caso di sollecitazione con $\mathbf{R} \neq 0$; vale allora il seguente risultato.

9.4 Teorema. *Se $\mathbf{R} \neq 0$, esiste un asse (detto asse centrale), di equazione*

$$P(\lambda) - A = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_A}{R^2} + \lambda \mathbf{R} \quad (9.5)$$

(essendo A un punto qualunque), rispetto ai cui punti il momento è dato da

$$\mathbf{M}_{P(\lambda)} = \frac{I}{R} \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (9.6)$$

ed è quindi diretto come \mathbf{R} , di modulo I/R ed uguale per tutti i punti dell'asse.

Dimostrazione. Dalla formula (9.2) di trasporto dei momenti si ottiene

$$\mathbf{M}_{P(\lambda)} = \mathbf{M}_A + (A - P(\lambda)) \wedge \mathbf{R} \stackrel{(9.5)}{=} \mathbf{M}_A - \left(\frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_A}{R^2} + \lambda \mathbf{R} \right) \wedge \mathbf{R} = \mathbf{M}_A - \frac{1}{R^2} (\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_A) \wedge \mathbf{R} .$$

Il risultato (9.6) segue allora immediatamente applicando l'identità del doppio prodotto vettore

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}$$

con $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{R}$, $\mathbf{b} = \mathbf{M}_A$, e ricordando che $\mathbf{M}_A \cdot \mathbf{R} = I$. □

Osservazione. L'asse centrale è univocamente determinato, indipendentemente dalla scelta del punto A . Si veda l'analoga osservazione a proposito dell'univocità dell'asse di Mozzi nella cinematica del corpo rigido. \diamond

In base a tale teorema, le sollecitazioni con $\mathbf{R} \neq 0$ si possono suddividere in due classi.

III. Sollecitazione equivalente ad una sola forza. È un sistema con $\mathbf{R} \neq 0$ e $I = 0$.

Poichè in tal caso segue dalla (9.6) che il momento rispetto ai punti dell'asse centrale è nullo, la sollecitazione è equivalente ad una sola forza, di vettore $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, applicata lungo i punti dell'asse centrale (che in questo caso prende il nome di *retta di applicazione del risultante*).

IV. Sollecitazione non riducibile ad una forza. È un sistema con $\mathbf{R} \neq 0$ e $I \neq 0$.

In tal caso, la sollecitazione più semplice equivalente a quella data è costituita da una forza, di vettore $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, applicata lungo i punti dell'asse centrale (che in tal caso prende il nome di *asse di minimo momento*) e da una coppia di momento diretto come l'asse e di modulo I/R .

Che il momento rispetto ai punti dell'asse sia minimo segue dal fatto che se consideriamo la forza \mathbf{R} applicata non lungo l'asse, ma esternamente ad esso a distanza h , ad esempio in un punto B , la coppia che occorre aggiungere per avere una sollecitazione equivalente ha momento di modulo maggiore, dato da $M = \sqrt{(I/R)^2 + h^2 R^2}$, come segue dalla formula di trasporto dei momenti $\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_{P(\lambda)} + (P(\lambda) - B) \wedge \mathbf{R}$.

In conclusione, *la più generale sollecitazione applicata al c.r. è equivalente ad una forza e ad una coppia; in particolare, se $I = 0$ si ha una sola forza, se $\mathbf{R} = 0$ si ha una sola coppia, se $I = 0$ e $\mathbf{R} = 0$ si ha il sistema nullo (assenza di forze).*

Osservazione. Diamo un cenno alla dimostrazione del teorema 9.2 sull'equivalenza dei sistemi di forze.

Che l'uguaglianza del risultante e del momento sia condizione necessaria di equivalenza è ovvio, poichè le operazioni invarianti di composizione e scorrimento non alterano risultante e momento (la somma di momenti di forze applicate nello stesso punto è il momento della somma delle forze, facendo scorrere una forza lungo la sua retta di applicazione il braccio della forza rimane invariato).

Che la condizione sia sufficiente può essere visto nel modo seguente, utilizzando il Teorema 9.3 precedentemente enunciato secondo cui componendo due coppie si ottiene ancora una coppia che ha come momento la somma vettoriale dei momenti. Consideriamo la sollecitazione \mathcal{S} ; ogni forza $(\mathbf{F}_i; P_i)$ può essere trasformata in una forza $(\mathbf{F}_i; A)$, con A arbitrariamente scelto, aggiungendo una coppia di momento $\mathbf{C}_i = (P_i - A) \wedge \mathbf{F}_i$ (basta aggiungere in A il sistema nullo costituito dalle forze $(\mathbf{F}_i; A)$, e $(-\mathbf{F}_i; A)$).

In tal modo, possiamo sostituire alla sollecitazione \mathcal{S} la sollecitazione $\bar{\mathcal{S}} \sim \mathcal{S}$ ottenuta sommando tutte le forze $(\mathbf{F}_i; A)$, di risultante \mathbf{R} , e sommando tutte le coppie, ottenendo quindi $\mathbf{C} = \sum_i \mathbf{C}_i = \sum_i (P_i - A) \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_A$. Siamo quindi passati da \mathcal{S} ad una sollecitazione equivalente $\bar{\mathcal{S}}$ data dalla forza $(\mathbf{R}; A)$ e dalla coppia di momento $\mathbf{C} = \mathbf{M}_A$.

Operando allo stesso modo sulla seconda sollecitazione \mathcal{S}' otteniamo una sollecitazione equivalente $\bar{\mathcal{S}}' \sim \mathcal{S}'$, data da una forza $(\mathbf{R}'; A)$ e da una coppia di momento $\mathbf{C}' = \mathbf{M}'_A$. Ma poichè per ipotesi è $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$ e $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}'_A$, segue che $\bar{\mathcal{S}} \sim \bar{\mathcal{S}}'$, e per la proprietà transitiva è $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$. \diamond

Casi notevoli di sollecitazioni riducibili ad una forza. Discutiamo alcuni esempi di sollecitazioni, che supponiamo con $\mathbf{R} \neq 0$, che hanno $I = 0$, e che quindi ammettono retta di applicazione del risultante; si tratta rispettivamente delle forze centrali, piane e parallele.

Siano applicate al c.r. delle forze **centrali**, le cui rette di applicazione passano tutte per un punto O . Per quanto detto, ciò è equivalente a dire che tutte le forze sono applicate in O ; il momento \mathbf{M}_0 è quindi nullo, per cui $I = 0$. Il sistema di forze centrali è quindi equivalente al risultante \mathbf{R} applicato in O : esempi di tali forze sono le forze gravitazionali e le forze elettrostatiche.

Consideriamo una sollecitazione in cui le forze siano **piane**. Se i vettori \mathbf{F}_i appartengono al piano xy , \mathbf{R} appartiene allo stesso piano; rispetto ad un generico punto del piano, i momenti delle singole forze sono ortogonali al piano, e quindi lo è anche il momento complessivo \mathbf{M} , per cui è $I = 0$.

Consideriamo infine una sollecitazione \mathcal{S} costituita da forze **parallele**, date cioè da vettori $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{k}$, dove \mathbf{k} è il versore di una direzione assegnata, uguale per tutte le forze \mathbf{F}_i , e F_i sono le componenti delle forze lungo tale direzione (non è detto che le componenti F_i siano tutte dello stesso segno, ma supponiamo che $R = \sum_i F_i \neq 0$): pertanto si ha $\mathbf{R} = R \mathbf{k}$. Il momento di ogni forza essendo perpendicolare a \mathbf{k} , lo è anche il momento totale, per cui $I = 0$.

10 Centro di forze parallele e Baricentro.

Le forze parallele applicate al c.r. ammettono una ulteriore importante proprietà. Consideriamo invece di una sollecitazione parallela \mathcal{S} , con $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{k}$, una qualunque altra sollecitazione \mathcal{S}' , costituita da forze ancora parallele $\mathbf{F}'_i = F'_i \mathbf{k}'$ (che potremmo pensare ottenuta da \mathcal{S} ruotando dello stesso angolo la direzione delle forze senza alterarne il modulo) e che quindi ammette una retta di applicazione del risultante diretta come \mathbf{k}' .

Si dimostra allora che al variare della direzione delle forze, e mantenendo invariate le loro componenti F_i , le rette di applicazione del risultante ammettono un punto in comune (e costituiscono quindi una stella di rette); esiste cioè un (unico) punto, detto il **centro** del sistema di forze parallele (indicato nel seguito con G), che appartiene alla retta di applicazione del risultante indipendentemente dalla direzione delle forze. Nel caso particolare in cui la sollecitazione parallela è data dalle forze peso $\mathbf{p}_i = p_i \mathbf{k}$, il centro delle forze peso è chiamato il *baricentro del c.r.*

10.1 Teorema. *Dato un sistema di forze parallele $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{k}$ con $R = \sum_i F_i \neq 0$, esiste ed è unico un punto G (il centro delle forze parallele) per cui*

$$\sum_i F_i (P_i - G) = 0. \quad (10.1)$$

Rispetto ad un punto arbitrario O , la posizione del centro G è data da

$$G - O := \frac{\sum_i F_i (P_i - O)}{R}. \quad (10.2)$$

Dimostrazione. L'unicità di G segue immediatamente dalla proprietà (10.1); infatti se esistesse un secondo punto G' per cui $\sum_i F_i (P_i - G') = 0$, sottraendo tale relazione dalla (10.1) si avrebbe $\sum_i F_i (G' - G) = R(G' - G) = 0$, da cui $G' = G$ essendo $R \neq 0$ per ipotesi.

Che il punto G sia dato dalla (10.2) è evidente, essendo

$$\sum_i F_i (P_i - G) = \sum_i F_i (P_i - O) - \sum_i F_i (G - O) \stackrel{(10.2)}{=} R(G - O) - R(G - O) = 0.$$

Per verificare che G così definito sia il centro della stella di rette, osserviamo dalla definizione (10.2) che G non dipende dalla particolare direzione \mathbf{k} delle forze parallele, ma solo dalle loro componenti F_i ; pertanto ogni sua proprietà è indipendente dalla direzione. Se dimostriamo allora che il momento \mathbf{M}_G del sistema di forze è nullo, G appartiene alla retta di applicazione del risultante qualunque sia la direzione \mathbf{k} delle forze parallele, e quindi è il centro; in effetti dalla formula di trasporto dei momenti abbiamo:

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{M}_0 + (O - G) \wedge \mathbf{R} \stackrel{(10.2)}{=} \mathbf{M}_0 - \frac{\sum_i F_i (P_i - O)}{R} \wedge R\mathbf{k} = \mathbf{M}_0 - \sum_i (P_i - O) \wedge F_i \mathbf{k} = 0. \square$$

Osservazioni.

(i) Nel caso particolare delle forze peso si ha $\mathbf{p}_i = p_i \mathbf{k} = m_i g \mathbf{k}$, dove g è l'accelerazione di gravità, uguale per tutti i punti, m_i è la massa dell' i -esimo punto P_i e \mathbf{k} è la direzione della

verticale, volta verso il basso; segue allora, semplificando per g al numeratore e al denominatore della (10.2), che il baricentro del c.r. coincide con il suo centro di massa:

$$G - O = \frac{\sum_i p_i (P_i - O)}{p} = \frac{\sum_i m_i (P_i - O)}{m},$$

essendo p e m il peso e la massa totali del corpo (ricordiamo però che il centro di massa esiste per ogni distribuzione di massa ed indipendentemente dalla presenza di forze peso, mentre il baricentro esiste solo per un corpo rigido in un campo di forze peso).

(ii) Quanto detto nel caso di un sistema di forze applicate in punti P_i vale naturalmente nel caso di forze distribuite con continuità, sostituendo formalmente alle somme sui punti gli integrali sul dominio (volume, superficie o linea per c.r. tri, bi e monodimensionali), e alle forze \mathbf{F}_i le forze $d\mathbf{f} = \mathbf{F}d\tau$ relative al volume infinitesimo $d\tau$, essendo \mathbf{F} la forza specifica. Il centro G delle forze è allora dato da

$$G - O = \frac{\int (P - O) df}{R} = \frac{\int_{\tau} (P - O) F d\tau}{R} \quad (R = \int df = \int_{\tau} F d\tau). \quad (10.3)$$

Nel caso particolare del baricentro, si ha così

$$G - O = \frac{\int (P - O) dp}{R} = \frac{\int_{\tau} (P - O) k d\tau}{p} = \frac{\int_{\tau} (P - O) \rho d\tau}{m} \quad (10.4)$$

dove $p = \int dp = \int_{\tau} k d\tau = \int_{\tau} \rho g d\tau$ e $m = \int_{\tau} \rho d\tau$, con k e ρ peso specifico e densità.

Proiettando la relazione vettoriale (10.4) sugli assi cartesiani si ottengono le componenti cartesiane del centro delle forze:

$$x_G = \frac{\int x df}{R} = \frac{\int_{\tau} x F d\tau}{R}, \quad y_G = \frac{\int y df}{R} = \frac{\int_{\tau} y F d\tau}{R}, \quad z_G = \frac{\int z df}{R} = \frac{\int_{\tau} z F d\tau}{R}.$$

(iii) La proprietà (10.1) definisce intrinsecamente il centro delle forze, indipendentemente dalla scelta del punto O rispetto al quale calcolare la posizione di G ; tale proprietà è molto importante, perchè la scelta di un punto per il quale la somma $\sum_i F_i (P_i - G)$ si annulla consente utili semplificazioni nel calcolo di alcune quantità meccaniche; passando a componenti cartesiane ortogonali, ed adottando la descrizione continua, la proprietà $\int (P - G) dm = \int_{\tau} (P - G) \rho d\tau = 0$ implica ad esempio, scegliendo un riferimento con origine in G , che

$$\int_{\tau} x \rho(x, y, z) d\tau = 0, \quad \int_{\tau} y \rho(x, y, z) d\tau = 0, \quad \int_{\tau} z \rho(x, y, z) d\tau = 0. \quad \diamond$$

11 Corpo rigido piano: calcolo delle quantità meccaniche.

Qui di seguito diamo una sintesi (senza dimostrazioni) delle formule per il calcolo delle velocità dei punti di un corpo rigido (c.r.) in moto in un piano, e delle formule utili per il calcolo delle quantità meccaniche \mathbf{Q} , $\mathbf{\Gamma}$, T . Ricordiamo che \mathbf{Q} , $\mathbf{\Gamma}$, T sono lineari nella distribuzione di massa, per cui le quantità meccaniche per un sistema di corpi rigidi si possono poi calcolare come la somma (vettoriale o scalare) delle quantità corrispondenti ad ogni corpo rigido del sistema.

Incominciamo con un breve riassunto di alcune nozioni di cinematica del c.r.

Dato un c.r., visto come un insieme di punti per i quali la distanza è costante nel tempo, si definisce *atto di moto rigido* all'istante t l'insieme delle velocità dei punti del corpo a tale istante. Per semplicità di notazione, indicheremo il campo di velocità, invece che con $\mathbf{v}(P)$, con \mathbf{v}_P ; valgono i seguenti risultati.

11.1 Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente perchè un atto di moto sia rigido è che per ogni coppia di punti A e B del c.r. le velocità \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B soddisfino la condizione*

$$(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \cdot (B - A) = 0 \quad (11.1)$$

(cioè i due punti hanno ugual componente della velocità lungo la loro congiungente).

11.2 Teorema. *In ogni istante esiste, ed è unico, un vettore $\boldsymbol{\omega}$ (la velocità angolare del c.r.) tale che per ogni coppia di punti A e B del c.r. le velocità \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B sono legate dalla relazione*

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A) . \quad (11.2)$$

Pertanto, nota la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del c.r. e la velocità di un punto A , arbitrariamente scelto, la velocità di ogni altro punto B è determinata: $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A)$. Il punto di riferimento A si può quindi scegliere in infiniti modi, ma *qualunque sia tale scelta è unica, istante per istante, la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$.*

L'atto di moto rigido si dice **traslatorio** se tutti i punti hanno ugual velocità

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A \quad \forall A, B .$$

Dalla (11.2) segue allora che *l'atto di moto è traslatorio se e solo se $\boldsymbol{\omega} = 0$.*

L'atto di moto si dice **rotatorio** se esiste almeno un punto con velocità nulla. Detto C tale punto, le velocità si possono quindi calcolare con la formula

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \wedge (B - C) . \quad (11.3)$$

Tali atti di moto non esauriscono però tutte le possibilità, perchè, almeno per un c.r. in \mathbf{R}^3 , l'atto di moto non è in generale nè traslatorio nè rotatorio; almeno in linea di principio, tali atti di moto sono però sufficienti per analizzare il moto di un corpo rigido che si muove rimanendo in un piano.

Se le velocità dei punti del c.r. al tempo t sono tutte parallele ad un piano fisso (ad es. il piano XY di una terna fissa $(O; X, Y, Z)$, di versori $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$) l'atto di moto è detto in tal caso rigido

piano. La formula fondamentale (11.2) implica allora che la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ è perpendicolare al piano; considerando una terna cartesiana $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} = \mathbf{K}$ solidale al c.r., possiamo porre:

$$\mathbf{i}(t) = \cos \alpha(t) \mathbf{I} + \sin \alpha(t) \mathbf{J}, \quad \mathbf{j}(t) = -\sin \alpha(t) \mathbf{I} + \cos \alpha(t) \mathbf{J}, \quad \mathbf{k}(t) = \mathbf{K} \quad (11.4)$$

essendo $\alpha(t)$ l'angolo tra l'asse x solidale al c.r. e l'asse fisso X (misurato dall'asse fisso X verso l'asse mobile x), detto *angolo di rotazione* del c.r.; si dimostra allora che

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha} \mathbf{k}, \quad |\boldsymbol{\omega}| = |\dot{\alpha}| \quad \left(\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \right).$$

Pertanto nell'atto di moto rigido piano la velocità angolare misura la velocità di variazione nel tempo dell'angolo di rotazione del c.r.

Per l'atto di moto rigido piano vale il seguente risultato.

11.3 Teorema (Eulero). *Un atto di moto rigido piano non traslatorio è rotatorio.*

Come detto, un atto di moto rigido piano è ovviamente quello di una lamina piana che si muove nel proprio piano; per il teorema di Eulero, se l'atto di moto non è traslatorio esiste un punto che ha istantaneamente velocità nulla; tale punto è detto *centro di istantanea rotazione (C.I.R.)* e sarà indicato nel seguito con C . La velocità di ogni altro punto del c.r. può quindi calcolarsi con la formula

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - C).$$

Dalla tale formula segue allora che:

- (i) \mathbf{v}_P è nel piano del moto per ogni punto P
- (ii) \mathbf{v}_P è perpendicolare a $P - C$
- (iii) $v_P = \omega r \quad r = \overline{PC}$

Si ha quindi che il modulo della velocità di ogni punto P cresce linearmente con la distanza r di P dal C.I.R. C ed è perpendicolare alla congiungente P con C (diagramma triangolare delle velocità).

Se la posizione del C.I.R. non è nota, le velocità dei punti del c.r. si possono comunque calcolare tramite la formula generale (11.2), cioè partendo da un punto di riferimento di cui sia agevole calcolare la velocità.

In generale, la posizione del C.I.R. varia nel tempo; il luogo descritto dal C.I.R., rispetto ad un osservatore fisso, è detto la *base* del moto; lo stesso luogo, descritto da un osservatore solidale con il c.r., è detto la *rulletta* del moto; si dimostra che base e rulletta hanno in comune un punto e la tangente (contatto del secondo ordine), e che la rulletta rotola senza strisciare sulla base.

Nelle applicazioni, può essere utile determinare il C.I.R. senza dover prima calcolare il moto; ciò si può fare in tre casi:

- (i) se esiste un punto fisso O , tale punto fisso è il C.I.R.
- (ii) se sono note le direzioni, non parallele, delle velocità \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B di due punti A e B , il C.I.R. è il punto di intersezione tra le perpendicolari a \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B condotte per A e B (teorema di Chasles).
- (iii) se il c.r. rotola senza strisciare su una guida fissa, il punto di contatto del c.r. con la guida è il C.I.R. (in tal caso, la guida è la base del moto, il profilo del c.r. la rulletta).

Atto di moto rigido piano: il calcolo di \mathbf{Q} , $\mathbf{\Gamma}$, T .

Consideriamo un c.r. bidimensionale in moto nel piano $(O; X, Y)$; indichiamo con m la sua massa, con G il suo baricentro e con $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta} \mathbf{k}$ la velocità angolare, essendo ϑ l'angolo di rotazione del corpo. Applicando a questa situazione particolare le definizioni (8.4) (8.6) (8.9) delle quantità meccaniche si ottengono le seguenti *regole di calcolo*.

- La *quantità di moto* \mathbf{Q} si può calcolare come

$$\mathbf{Q} = m \mathbf{v}_G$$

(in realtà, tale risultato è del tutto generale, e vale per ogni sistema, rigido o meno, e per ogni atto di moto, anche non rigido).

- Consideriamo il *momento delle quantità di moto* $\mathbf{\Gamma}$. Se il corpo rigido appartiene ad un piano fisso π ed è in moto nel piano stesso, il momento delle quantità di moto è perpendicolare al piano e parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$. In particolare, rispetto al baricentro G e rispetto al C.I.R. C si ha

$$\mathbf{\Gamma}_G = I_G \boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Gamma}_G = I_G \dot{\vartheta}, \quad \mathbf{\Gamma}_C = I_C \boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Gamma}_C = I_C \dot{\vartheta} \quad (11.5)$$

dove I_G e I_C sono il momento di inerzia del c.r. rispetto all'asse ortogonale al piano per G e C rispettivamente (in breve, il momento di inerzia rispetto a G e C).

Se A è invece un punto qualunque del c.r. ($A \neq G, A \neq C$), il momento delle quantità di moto si può calcolare con la formula del trasporto, per cui

$$\mathbf{\Gamma}_A = \mathbf{\Gamma}_G + (G - A) \wedge m \mathbf{v}_G = I_G \boldsymbol{\omega} + (G - A) \wedge m \mathbf{v}_G,$$

oppure

$$\mathbf{\Gamma}_A = \mathbf{\Gamma}_C + (C - A) \wedge m \mathbf{v}_G = I_C \boldsymbol{\omega} + (C - A) \wedge m \mathbf{v}_G.$$

- Per il calcolo dell'*energia cinetica* si hanno questi risultati:

(i) se l'atto di moto è traslatorio con velocità \mathbf{v} :

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

(ii) se $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ ed è noto il C.I.R. C :

$$T = \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} I_C \dot{\vartheta}^2$$

(iii) se non è noto il C.I.R., T può calcolarsi mediante la formula (Teorema di König)

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\vartheta}^2.$$

Osservazione. Dalla definizione generale di momento di inerzia segue che per un c.r. piano, di massa m e di superficie σ , il momento di inerzia rispetto ad un punto A (cioè il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per A ed ortogonale al piano contenente il corpo) è dato da

$$I_A = \int_m r^2 dm = \int_\sigma r^2 \rho d\sigma$$

essendo r la distanza dell'elemento di massa dm da A (naturalmente, se il c.r. è un tratto di curva piana, l'integrale doppio va sostituito con l'integrale di linea). Se il punto A è solidale al c.r., il momento d'inerzia I_A è costante.

Nel calcolo dei momenti di inerzia può essere utile ricordare la seguente proprietà (che segue dal teorema del trasporto di Huyghens)

$$I_A = I_G + m \overline{AG}^2$$

che lega il momento di inerzia rispetto ad un generico punto A al momento di inerzia baricentrale I_G : da essa segue anche che il momento di inerzia rispetto al baricentro è il minimo tra tutti gli altri momenti di inerzia calcolati rispetto ai punti del piano. \diamond

12 Alcuni casi notevoli di dinamica del corpo rigido.

Presentiamo brevemente due casi notevoli di dinamica del c.r. in tre dimensioni: il c.r. con asse fisso, di cui discutiamo il problema del moto e del calcolo delle reazioni vincolari, ed il c.r. con punto fisso, di cui consideriamo il cosiddetto caso inerziale.

Corpo rigido con asse fisso: moto e reazioni vincolari.

Consideriamo un c.r. con un asse fisso: assumiamo tale asse come asse Z di una terna cartesiana ortogonale fissa $(O; X, Y, Z)$, essendo O un punto dell'asse, e come asse z di una terna cartesiana ortogonale $(O; x, y, z)$ solidale al c.r.

Cinematica. Gli elementi cinematici che interessano sono i seguenti.

(i) Evidentemente, il c.r. ha un solo grado di libertà, essendo il moto e l'atto di moto rotatori attorno all'asse fisso: indicando con ϑ l'angolo di rotazione del corpo (ad esempio, l'angolo dal piano fisso XZ al piano solidale xz), la velocità angolare è diretta come l'asse fisso e si scrive nella forma

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta} \mathbf{K} = \dot{\vartheta} \mathbf{k} . \quad (12.1)$$

I versori della terna mobile sono allora

$$\mathbf{i} = \cos \vartheta \mathbf{I} + \sin \vartheta \mathbf{J}, \quad \mathbf{j} = -\sin \vartheta \mathbf{I} + \cos \vartheta \mathbf{J}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{K}$$

per cui, per le formule di Poisson, si ha

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} = \dot{\vartheta} \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j} = -\dot{\vartheta} \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0 . \quad (12.2)$$

(ii) Essendo il moto un moto rigido piano, la traiettoria di un generico punto del c.r., di coordinate (a, b, c) nella terna solidale (e quindi a distanza $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ dall'asse fisso) è una circonferenza di raggio r nel piano $z = c$ ortogonale all'asse fisso.

Le forze applicate. Nel seguito supponiamo che il c.r. sia soggetto a forze attive di risultante \mathbf{R} e di momento \mathbf{M}_0 rispetto al punto fisso O . Per quanto riguarda le reazioni vincolari, supponiamo che esse siano esercitate da *vincoli non dissipativi* posti sull'asse (come cerniere e manicotti lisci) per cui *il momento delle reazioni vincolari rispetto all'asse e la potenza delle reazioni vincolari sono nulli*

$$M'_z = 0, \quad \Pi' = 0 \quad (12.3)$$

(l'annullamento della potenza segue da quello del momento utilizzando la nota relazione $\Pi = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{M}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}$ che esprime la potenza di forze applicate al c.r. in funzione del risultante e del momento: applicando tale relazione alle reazioni vincolari ed assumendo come polo O un punto dell'asse fisso, si ha infatti $\Pi' = \mathbf{M}'_0 \cdot \boldsymbol{\omega} = M'_z \dot{\vartheta} = 0$).

Statica. In condizioni di equilibrio, le reazioni vincolari (che nel seguito chiameremo *reazioni statiche*) sono ovviamente uguali e contrarie alle forze attive, per cui si ha

$$\mathbf{R}' = -\mathbf{R}, \quad \mathbf{M}'_0 = -\mathbf{M}_0 .$$

In particolare, dalla componente dell'equazione del momento rispetto all'asse fisso segue per la (12.3) che si ha equilibrio se e solo se le forze attive hanno momento nullo rispetto all'asse:

$$\text{equilibrio} \Leftrightarrow M_z = 0 .$$

Dinamica. Vogliamo ora determinare il moto del c.r. ed analizzare le reazioni vincolari in condizioni di moto (parleremo di *reazioni dinamiche*), confrontandole con quelle che si hanno all'equilibrio.

Consideriamo anzitutto la prima equazione cardinale, che scriviamo nella forma di equazione di moto del baricentro: se G è il baricentro, posto a distanza r_G dall'asse, si ha allora

$$m \mathbf{a}_G = \mathbf{R} + \mathbf{R}' , \quad \mathbf{a}_G = r_G \ddot{\vartheta} \mathbf{t} + r_G \dot{\vartheta}^2 \mathbf{n} , \quad (12.4)$$

indicando con \mathbf{t} e \mathbf{n} i versori tangenti e normale principale della circonferenza descritta da G durante il moto; proiettando allora la (12.4) su \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{k} segue che le reazioni dinamiche hanno un risultante di componenti

$$R'_t = -R_t + m r_G \ddot{\vartheta}, \quad R'_n = -R_n + m r_G \dot{\vartheta}^2, \quad R'_z = -R_z .$$

Il risultante delle reazioni dinamiche è quindi diverso da quello delle reazioni statiche, anche in condizioni di moto a regime ($\dot{\vartheta} = \text{costante}$), a meno che il baricentro non sia sull'asse fisso, nel qual caso è $r_G = 0$ (diciamo che il c.r. è *centrato*); in conclusione si ha

$$\text{Risultante dinamico} = \text{Risultante statico} \Leftrightarrow G \text{ appartiene all'asse fisso} .$$

Consideriamo ora la seconda equazione cardinale, che scriviamo rispetto ad un punto O dell'asse fisso:

$$\frac{d\mathbf{\Gamma}_0}{dt} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}'_0 . \quad (12.5)$$

Risulta conveniente proiettare questa equazione sulla terna $(O; x, y, z)$ solidale al c.r.: abbiamo il vantaggio che gli elementi della matrice d'inerzia sono costanti, essendo calcolati rispetto ad una terna solidale al c.r. (ma la matrice non è in generale principale d'inerzia) e che inoltre $\boldsymbol{\omega}$ è data dalla semplice espressione (12.1). Dall'espressione generale del momento delle quantità di moto per un atto di moto rotatorio abbiamo quindi

$$\mathbf{\Gamma}_0 = I_{xz} \dot{\vartheta} \mathbf{i} + I_{yz} \dot{\vartheta} \mathbf{j} + I_z \dot{\vartheta} \mathbf{k} .$$

Deriviamo ora il momento delle quantità di moto: i prodotti di inerzia I_{xz} , I_{yz} e il momento di inerzia I_z sono costanti, così come il versore \mathbf{k} , mentre i versori \mathbf{i} e \mathbf{j} hanno una derivata data dalla (12.2): otteniamo così ⁽⁵⁾

$$\frac{d\mathbf{\Gamma}_0}{dt} = (I_{xz} \ddot{\vartheta} - I_{yz} \dot{\vartheta}^2) \mathbf{i} + (I_{yz} \ddot{\vartheta} + I_{xz} \dot{\vartheta}^2) \mathbf{j} + I_z \ddot{\vartheta} \mathbf{k} .$$

⁵In modo analogo, possiamo utilizzare il risultato generale (5.9): è allora $(d\mathbf{\Gamma}_0/dt)_r = I_{xz} \ddot{\vartheta} \mathbf{i} + I_{yz} \ddot{\vartheta} \mathbf{j} + I_z \ddot{\vartheta} \mathbf{k}$, e $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{\Gamma}_0 = \dot{\vartheta} \mathbf{k} \wedge (I_{xz} \dot{\vartheta} \mathbf{i} + I_{yz} \dot{\vartheta} \mathbf{j} + I_z \dot{\vartheta} \mathbf{k}) = I_{xz} \dot{\vartheta}^2 \mathbf{j} - I_{yz} \dot{\vartheta}^2 \mathbf{i}$.

Sostituendo questo risultato nella (12.5), e proiettando sulla terna solidale anche il momento delle forze attive e reattive, le prime due equazioni forniscono i momenti dinamici M'_x e M'_y (si ricordi l'ipotesi $M'_z = 0$ sui vincoli esercitati dall'asse fisso sul c.r.)

$$M'_x = -M_x + I_{xz} \ddot{\vartheta} - I_{yz} \dot{\vartheta}^2, \quad M'_y = -M_y + I_{yz} \ddot{\vartheta} + I_{xz} \dot{\vartheta}^2, \quad (12.6)$$

mentre la terza equazione è

$$I_z \ddot{\vartheta} = M_z. \quad (12.7)$$

Se quindi il moto è determinato integrando la (12.7) ⁽⁶⁾, i momenti reattivi dinamici sono dati dalla (12.6); osserviamo che *i momenti dinamici sono diversi da quelli statici*, anche in condizioni di moto a regime ($\dot{\vartheta} = \text{costante}$). Se però l'asse fisso z è principale d'inerzia, possiamo sempre scegliere come altri due assi x e y della terna solidale gli altri due assi principali d'inerzia, per cui in questo caso si ha $I_{xz} = 0$ e $I_{yz} = 0$ e quindi dalla (12.6) abbiamo $M'_x = -M_x$ e $M'_y = -M_y$, per cui

$$\text{Momenti dinamici} = \text{Momenti statici} \quad \Leftrightarrow \quad \text{asse fisso principale d'inerzia}$$

In conclusione:

le reazioni vincolari dinamiche coincidono con quelle statiche se e solo

- (i) *il baricentro appartiene all'asse fisso*
- (ii) *l'asse fisso è principale d'inerzia* ⁽⁷⁾.

Moto inerziale del corpo rigido con punto fisso.

Consideriamo un caso particolare del moto di un c.r. con una cerniera in un punto O ; come noto, in tal caso il moto è un moto polare, con un atto di moto rotatorio, ed un asse di istantanea rotazione passante per la cerniera O . In tale situazione, si parla *di moto per inerzia* quando $\mathbf{M}_0 = 0$, cioè quando le forze esterne applicate al c.r. hanno momento nullo rispetto al punto fisso O .

Ricordiamo che le equazioni pure di moto di un corpo rigido con un punto fisso O sono date dal sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_x \\ B\dot{q} + (A - C)rp = M_y \\ C\dot{r} + (B - A)pq = M_z \end{cases} \quad (12.8)$$

⁶L'equazione pura di moto si può scrivere come equazione differenziale del secondo ordine in forma normale, essendo $I_z \neq 0$: in generale è $M_z = M_z(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)$, per cui l'integrazione esplicita può non essere banale. Invece che dalla seconda equazione cardinale, l'equazione (12.7) si può ottenere più semplicemente dal teorema dell'energia cinetica $dT/dt = \Pi$, con $T = (1/2)I_z\dot{\vartheta}^2$ e $\Pi = M_z\dot{\vartheta}$. Nel caso particolare in cui $M_z = M_z(\vartheta)$ (sollecitazione attiva posizionale) si ha l'esistenza del potenziale $U = U(\vartheta)$, che è semplicemente una primitiva del momento: $U(\vartheta) = \int^{\vartheta} M(\xi) d\xi$; vale allora il teorema di conservazione dell'energia espresso dall'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{1}{2} I_z \dot{\vartheta}^2 - U(\vartheta) = \text{costante},$$

a cui si perviene anche dall'equazione $I_z \ddot{\vartheta} = M_z$ moltiplicando ambo i membri per $\dot{\vartheta}$ ed integrando rispetto al tempo.

⁷In tal caso si dice che il c.r. è *equilibrato*.

dette le equazioni di Eulero. In tali equazioni:

(i) p, q, r sono le componenti della della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna principale di inerzia $(O; x, y, z)$, per cui

$$\boldsymbol{\omega} = p \mathbf{i} + q \mathbf{j} + r \mathbf{k} ;$$

(ii) A, B, C sono i momenti principali di inerzia del c.r. rispetto ad O ;

(iii) M_x, M_y, M_z sono i momenti delle forze attive rispetto agli assi principali di inerzia (ricordiamo che nell'ipotesi in cui il vincolo in O è dato da una cerniera si ha $\mathbf{M}'_0 = 0$) .

Per completare il calcolo del moto, a tali equazioni vanno aggiunte le relazioni che esprimono le componenti p, q, r della velocità angolare in funzione degli angoli di Eulero e delle loro derivate. Le (12.8) sono le proiezioni sugli assi principali di inerzia della seconda equazione cardinale $d\boldsymbol{\Gamma}_0/dt = \mathbf{M}_0$; basta infatti tenere conto del fatto che

$$\boldsymbol{\Gamma}_0 = A p \mathbf{i} + B q \mathbf{j} + C r \mathbf{k}, \quad \mathbf{M}_0 = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$$

e che la derivata $d\boldsymbol{\Gamma}_0/dt$ può esprimersi nella forma

$$\frac{d\boldsymbol{\Gamma}_0}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{\Gamma}_0}{dt} \right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\Gamma}_0$$

con

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\Gamma}_0}{dt} \right)_{\text{rel}} = A \dot{p} \mathbf{i} + B \dot{q} \mathbf{j} + C \dot{r} \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p & q & r \\ A p & B q & C r \end{pmatrix} .$$

Fatte queste premesse, consideriamo il caso inerziale $\mathbf{M}_0 = 0$. In questo le equazioni di Eulero assumono la forma:

$$\begin{cases} A \dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B \dot{q} + (A - C)rp = 0 \\ C \dot{r} + (B - A)pq = 0 \end{cases} \quad (12.9)$$

e inoltre valgono le leggi di conservazione del momento angolare e dell'energia cinetica:

$$\boldsymbol{\Gamma}_0 = \text{costante}, \quad T = \text{costante} . \quad (12.10)$$

Accenniamo a due risultati relativamente semplici, il caso delle rotazioni permanenti e il cosiddetto moto alla Poinsot.

Rotazioni permanenti. Ci chiediamo se, nel caso inerziale, per il c.r. sia possibile un moto rotatorio uniforme. Si dimostra il seguente risultato.

12.1 Teorema. *Nel caso inerziale, il moto del c.r. con punto fisso è rotatorio uniforme se e solo se l'atto di moto iniziale è rotatorio attorno ad un asse principale di inerzia.*

Dimostrazione. Il moto è rotatorio uniforme se e solo se $\boldsymbol{\omega}$ è costante, e quindi se e solo se $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$; poiché per le formule di Poisson si ha $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{p} \mathbf{i} + \dot{q} \mathbf{j} + \dot{r} \mathbf{k}$ (indipendentemente dal fatto che ci si riferisca ad una terna fissa o mobile), segue allora che il moto è rotatorio uniforme se e solo se $\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$, cioè se il sistema di equazioni di Eulero (12.9) ammette soluzioni p, q, r costanti. Dalle (12.9) abbiamo allora i seguenti tre casi, che dipendono dai momenti di inerzia (e cioè dalle proprietà di simmetria della distribuzione di massa del c.r. rispetto al punto fisso):

(1) $A = B = C$ (la distribuzione di inerzia ha una simmetria sferica rispetto ad O , ogni direzione è *principale d'inerzia*); le (12.9) sono identicamente soddisfatte, e quindi ogni velocità angolare iniziale si mantiene.

(2) $A = B \neq C$ (simmetria di rotazione: si dice che il corpo ha una *struttura giroscopica*; sono assi principali d'inerzia l'asse *giroscopico* z ed ogni direzione nel *piano equatoriale* xy). Le (12.9) si riducono alle due equazioni $qr = 0$ e $rp = 0$, per cui le soluzioni possibili sono $p = q = 0, r \neq 0$ e $p \neq 0, q \neq 0, r = 0$; nel primo caso la velocità angolare è diretta come l'asse giroscopico, nel secondo caso nel piano equatoriale, cioè sempre secondo una direzione principale d'inerzia.

(3) infine se $A \neq B \neq C$ (non si hanno simmetrie e le uniche direzioni principali d'inerzia sono gli assi x, y, z), le equazioni di Eulero diventano $qr = 0, rp = 0, pq = 0$: è immediato verificare che una sola delle tre componenti può essere diversa da zero, per cui $\boldsymbol{\omega}$ è diretta come uno degli assi coordinati, e quindi secondo una direzione principale di inerzia. \square

Moto alla Poincot. Diamo una semplice descrizione qualitativa del moto per inerzia del c.r. quando la condizione iniziale comporti che il moto non è rotatorio uniforme. Per quanto detto in precedenza, questo è possibile nel caso di struttura giroscopica ($A = B \neq C$) e di assenza di simmetrie ($A \neq B \neq C$). Il corpo ha quindi un moto polare, con atto di moto rotatorio, con una velocità angolare iniziale

$$\boldsymbol{\omega}_0 = p_0 \mathbf{i} + q_0 \mathbf{j} + r_0 \mathbf{k} .$$

Corpo con struttura giroscopica. Dal punto di vista analitico, le (12.9) sono integrabili, poichè la terza fornisce immediatamente $r = \text{costante} = r_0$; dalle prime due equazioni (ad esempio, derivando la prima e tenendo conto della seconda) segue poi che p e q sono soluzioni delle equazioni dell'oscillatore armonico, con ugual pulsazione:

$$\ddot{p} + \lambda^2 p = 0, \quad \ddot{q} + \lambda^2 q = 0 \quad \lambda = \frac{(C - A) r_0}{A} .$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali, si ha allora

$$p(t) = p_0 \cos(\lambda t) - q_0 \sin(\lambda t), \quad q(t) = q_0 \cos(\lambda t) + p_0 \sin(\lambda t), \quad r(t) = r_0 .$$

Indipendentemente dalla soluzione analitica, si può dare una significativa descrizione qualitativa del moto, introdotta da Poincot. Ricordiamo che per un atto di moto rotatorio si ha

$$\boldsymbol{\Gamma}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} = 2T ; \tag{12.11}$$

indichiamo con \mathbf{K} la direzione costante di $\boldsymbol{\Gamma}_0$, con \mathbf{k} la direzione dell'asse giroscopico, con α l'angolo che $\boldsymbol{\omega}$ forma con \mathbf{K} e con β l'angolo che $\boldsymbol{\omega}$ forma con \mathbf{k} . Si dimostrano allora facilmente i seguenti risultati:

(i) i vettori \mathbf{K} , $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{k} sono complanari (segue osservando che $\boldsymbol{\Gamma}_0 \wedge \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = 0$ poichè $A = B$).

(ii) il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ha modulo ω costante, per cui il moto è polare *uniforme* (dalla terza equazione (12.9) segue che $r = \text{costante}$; moltiplicando la prima equazione (12.9) per p , la seconda per q e sommando segue che $p\dot{p} + q\dot{q} = 0 \Rightarrow p^2 + q^2 = \text{costante}$, e quindi $\omega^2 = (p^2 + q^2) + r^2 = \text{costante}$).

(iii) $\alpha = \text{costante}$ (tenendo presente la (12.11) è infatti $\cos \alpha = \boldsymbol{\Gamma}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} / \Gamma_0 \omega = 2T / \Gamma_0 \omega$).

(iv) $\beta = \text{costante}$ (basta osservare che $\cos \beta = r / \omega$ e che $r = r_0 = \text{costante}$).

Possiamo allora dire che l'asse di istantanea rotazione (cioè la direzione di $\boldsymbol{\omega}$) descrive un cono, di semiapertura α , attorno alla direzione di $\boldsymbol{\Gamma}_0$, ed un cono, di semiapertura β , attorno all'asse

giroscopico; il primo è detto il *cono fisso*, il secondo il *cono mobile*; poichè i due coni hanno istante per istante in comune l'asse di istantanea rotazione, i cui punti hanno velocità nulla, il cono mobile rotola senza strisciare sul cono fisso.

Poichè i vettori \mathbf{K} , $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{k} sono complanari, e gli angoli α e β sono costanti, è anche costante l'angolo $\gamma = \alpha + \beta$ che l'asse giroscopico forma con la direzione fissa di $\mathbf{\Gamma}_0$, per cui *durante il moto l'asse giroscopico (che è solidale al c.r.) descrive un cono di semipertura γ costante attorno alla direzione (fissa) del momento angolare.*

Si può infine dimostrare (tenendo presente che per un corpo a struttura giroscopica si ha $C \leq 2A$, con $C = 2A$ solo se il corpo è piano) che il cono mobile è sempre esterno al cono fisso, cioè che $\gamma > \alpha$ per ogni velocità angolare iniziale.

Corpo senza simmetrie. I tre momenti principali d'inerzia sono diversi: senza perdita di generalità, supponiamo $A < B < C$.

Dal punto di vista analitico, anche in questo caso si perviene al calcolo esplicito di p, q, r . Utilizziamo a tal fine le leggi di conservazione (12.10); scrivendo le equazioni $\Gamma_0^2 = c_0^2$ e $T = c_1$ otteniamo allora

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = c_0^2, \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2c_1; \quad (12.12)$$

vedendo tale sistema come un sistema algebrico lineare nei quadrati di due delle tre variabili, ad esempio p^2 e q^2 , otteniamo allora p e q in funzione della terza incognita r :

$$p = \pm \sqrt{a - br^2}, \quad q = \pm \sqrt{c - dr^2} \quad (12.13)$$

dove a, b, c, d dipendono dalle costanti del moto c_0, c_1 e dai momenti di inerzia

$$a = \frac{c_0^2 - 2Bc_1}{A(A - B)}, \quad b = \frac{C(C - B)}{A(A - B)}, \quad c = \frac{c_0^2 - 2Ac_1}{B(B - A)}, \quad d = \frac{C(C - A)}{B(B - A)}.$$

Se ora sostituiamo le espressioni di p e q date dalla (12.13) nella terza equazione (12.9), tale equazione diventa un'equazione a variabili separabili nella r

$$C \dot{r} \mp (B - A) \sqrt{(a - br^2)(c - dr^2)} = 0$$

da cui

$$\dot{r} = \pm \frac{B - A}{C} \sqrt{(a - br^2)(c - dr^2)},$$

e quindi integrando

$$t - t_0 = \pm \frac{C}{B - A} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{(a - br^2)(c - dr^2)}}; \quad (12.14)$$

attraverso l'integrale (12.14) (che fa intervenire funzioni trascendenti) si ha così $t = t(r)$, e quindi, invertendo, $r = r(t)$: noto $r(t)$, le altre due componenti $p(t)$ e $q(t)$ sono quindi determinate dalle (12.13).

Dal punto di vista geometrico, il moto del corpo può essere descritto dando il moto del suo ellissoide d'inerzia rispetto al punto fisso O (ricordiamo che si tratta di un ellissoide generico, essendo i tre momenti principali diversi tra loro).

Si dimostra che l'ellissoide d'inerzia, di centro O , rotola senza strisciare su un piano fisso, ortogonale alla direzione di $\mathbf{\Gamma}_0$ e a distanza $h = \sqrt{2c_1}/c_0$ da O ⁽⁸⁾. Il luogo dei punti di contatto tra ellissoide e piano, cioè dei punti in cui l'asse di istantanea rotazione incontra il piano, è una linea detta *erpoloide*; rispetto ad un osservatore solidale al c.r., e quindi all'ellissoide, i punti dell'ellissoide che toccano il piano individuano una linea detta la *poloide*. Nel caso particolare in cui $A = B$, la poloide e l'erpoloide sono due circonferenze: la prima è l'intersezione del cono fisso di Poincot con il piano fisso, la seconda è l'intersezione del cono mobile di Poincot con l'ellissoide di inerzia del corpo.

⁸Sia C l'intersezione tra l'asse di istantanea rotazione e l'ellissoide di inerzia: dalla definizione di momento di inerzia e dalla proprietà dell'ellissoide di inerzia segue allora che

$$\overline{OC} = \frac{1}{\sqrt{I_\omega}} = \frac{1}{\sqrt{A(p/\omega)^2 + B(q/\omega)^2 + C(r/\omega)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{2T}} .$$

Se α è l'angolo che l'asse di istantanea rotazione forma con la direzione (costante) del momento angolare $\mathbf{\Gamma}_O$, la proiezione H di C sulla direzione di $\mathbf{\Gamma}_O$ è allora ad una distanza h da O data da

$$h := \overline{OH} = \overline{OC} \cos \alpha ;$$

d'altra parte essendo

$$\cos \alpha = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{\Gamma}_O}{\omega \Gamma_O} = \frac{2T}{\omega \Gamma_O}$$

segue che

$$h = \frac{\omega}{\sqrt{2T}} \frac{2T}{\omega \Gamma_O} = \frac{\sqrt{2T}}{\Gamma_O} = \frac{\sqrt{2c_1}}{c_0} ,$$

essendo $T = c_1$ e $\Gamma_O = c_0$ costanti durante il moto.

L'ellissoide di inerzia si muove quindi con il punto C , che ha velocità nulla, che sta su un piano perpendicolare a $\mathbf{\Gamma}_O$ e a distanza h costante dal punto fisso O .

13 Relazione simbolica della dinamica.

Consideriamo un generico sistema meccanico, che schematizziamo come un sistema di N punti materiali P_i ($i = 1, 2, \dots, N$), di massa m_i ; indichiamo con \mathbf{F}_i e con Φ_i le forze attive e reattive applicate ai punti P_i , con δP_i gli spostamenti virtuali dei punti P_i ⁽⁹⁾.

In meccanica analitica si considerano sistemi soggetti a vincoli non dissipativi, per i quali si introduce il seguente postulato.

Postulato. *Per un qualunque sistema meccanico soggetto a vincoli non dissipativi, sia in condizioni di equilibrio che in condizioni di moto, il lavoro virtuale complessivo delle reazioni vincolari (esterne ed interne) non è mai negativo per ogni spostamento virtuale dei punti del sistema:*

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i \cdot \delta P_i \geq 0 \quad \forall \delta P_i . \quad (13.1)$$

Con tale postulato, consideriamo le equazioni di moto per ogni punto del sistema $\mathbf{F}_i + \Phi_i = m_i \mathbf{a}_i$, che scriviamo nella forma

$$\Phi_i = -(\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) . \quad (13.2)$$

⁹Lo spostamento virtuale δP è un generico spostamento infinitesimo del punto P , conforme ai vincoli pensati fissi; in modo del tutto analogo, si può definire la *velocità virtuale* \mathbf{v}' del punto, data dal rapporto $\mathbf{v}' = \delta P / \delta t$ tra lo spostamento virtuale ed un intervallo di tempo arbitrario δt .

Lo spostamento virtuale è reversibile se anche il suo opposto $-\delta P$ è virtuale, altrimenti è detto irreversibile. Pertanto *per vincoli bilateri gli spostamenti virtuali sono reversibili*, mentre per vincoli unilateri (ad esempio di appoggio) si hanno anche spostamenti irreversibili.

Per chiarire ulteriormente la differenza tra spostamento infinitesimo effettivo e spostamento virtuale è utile riferirsi al caso di vincoli mobili; ricordiamo che se il generico punto P_i del sistema ha coordinate $\{x_i, y_i, z_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), un vincolo fisso è dato da una relazione che senza perdita di generalità possiamo pensare della forma $f(x_i, y_i, z_i) \geq 0$, o della forma $f(x_i, y_i, z_i) = 0$ nel caso in cui il vincolo sia anche bilatero. Si parla invece di vincolo mobile quando tra le coordinate dei punti del sistema sussiste una relazione della forma $f(x_i, y_i, z_i, t) \geq 0$ o della forma $f(x_i, y_i, z_i, t) = 0$ per vincoli anche bilateri. Utilizzando le equazioni che traducono i vincoli cui è soggetto il sistema, possiamo allora esprimere la posizione P_i di ogni punto in funzione di un numero n (ovviamente $n \leq 3N$) di coordinate indipendenti, che denoteremo con $\{q_1, \dots, q_n\}$ e del tempo t (se sono presenti vincoli mobili), per cui $P_i = P_i(q_1, \dots, q_n, t)$. Tenendo conto della definizione di spostamento virtuale, si ha allora

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

mentre lo spostamento infinitesimo dP_i relativo all'intervallo dt è dato da

$$dP_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

(la differenza essenziale tra le due espressioni non è ovviamente data dalla sostituzione del simbolo d con δ , dovuta solo a ragioni storiche e mantenuta per maggiore chiarezza, ma dal fatto che lo spostamento effettivo è il differenziale del vettore posizione, mentre lo spostamento virtuale è dato da una variazione parziale della posizione, fatta solo rispetto alle q e non al tempo). Pertanto *se i vincoli sono fissi lo spostamento effettivo è uno degli spostamenti virtuali possibili, mentre se i vincoli sono mobili tra tutti gli spostamenti virtuali non si ha lo spostamento effettivo.*

Queste equazioni, risolte, forniscono sia il moto $P_i = P_i(t)$ che le reazioni vincolari Φ_i . Dalle (13.1) e (13.2) segue allora che se

(i) valgono le leggi di Newton

(ii) i vincoli sono non dissipativi

il moto $P_i = P_i(t)$ deve essere tale da verificare la relazione

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta P_i \leq 0 \quad \forall \delta P_i, \quad (13.3)$$

che è detta la *Relazione simbolica della dinamica*.

Introduciamo l'ulteriore ipotesi di *vincoli bilateri*; essendo in tal caso gli spostamenti virtuali reversibili, la relazione (13.3) deve valere per ogni scelta di spostamenti δP_i e per i loro opposti $-\delta P_i$: poiché il lavoro è lineare negli spostamenti, ne segue che deve essere verificata la *Equazione simbolica della dinamica*

$$\sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta P_i = 0 \quad \forall \delta P_i. \quad (13.4)$$

Osservazioni.

(i) Le (13.3) e (13.4) sono state ottenute come conseguenze necessarie delle equazioni di Newton: ogni moto $P_i = P_i(t)$ del sistema, ottenuto risolvendo le equazioni di Newton dopo aver eliminato le reazioni vincolari Φ_i esercitate dai vincoli non dissipativi durante il moto, deve soddisfare la relazione e/o l'equazione simbolica della dinamica.

D'altra parte, se per un sistema con vincoli non dissipativi si determina una legge di moto $P_i = P_i(t)$ per cui vale la (13.3) o la (13.4), tale moto è soluzione delle equazioni di Newton (13.2); infatti, introdotti N vettori Φ_i definiti da

$$\Phi_i := -(\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (13.5)$$

le equazioni (13.2) sono verificate per costruzione e i vettori Φ_i sono senz'altro interpretabili come reazioni vincolari esercitate sul sistema dai vincoli non dissipativi, poichè dalle (13.5) e (13.3) segue che

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i \cdot \delta P_i = - \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta P_i \geq 0 \quad \forall \delta P_i$$

e quindi tali vettori soddisfano all'unica richiesta che imponiamo ai vincoli non dissipativi, cioè la (13.1). In conclusione:

le soluzioni $P_i = P_i(t)$ del sistema di equazioni di Newton (13.2), ottenute eliminando da tali equazioni le reazioni vincolari, sono tutte e sole quelle che si ottengono dalla relazione (13.3) o dalla (13.4). Ai fini del solo calcolo del moto (e non anche delle reazioni vincolari) risolvere la (13.3) o la (13.4) è quindi equivalente a risolvere le (13.2) (e quindi le equazioni cardinali che ne sono una diretta conseguenza).

(ii) Se consideriamo il lavoro virtuale di un qualunque sistema di vettori applicati al corpo rigido, poichè il più generale spostamento virtuale (che è compatibile con la proprietà di rigidità) è rototraslatorio, otteniamo

$$\delta^* L := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot (\delta A + \epsilon \wedge (P_i - A)) = \mathbf{R} \cdot \delta A + \epsilon \cdot \mathbf{M}_A. \quad (13.6)$$

Da tale relazione segue che il lavoro virtuale delle forze interne al c.r. è nullo, per cui se anche interpretiamo le forze interne al c.r. come un sistema di forze di tipo reattivo, si tratta comunque di forze esercitate da un vincolo non dissipativo. \diamond

14 Principio dei lavori virtuali.

Equilibrio di un sistema con vincoli non dissipativi. Consideriamo ora il caso dell'equilibrio ($\mathbf{v}_i = 0$, $\mathbf{a}_i = 0$); tutte e sole le posizioni di equilibrio, ottenibili come eventuali soluzioni delle equazioni di Newton $\mathbf{F}_i + \Phi_i = 0$ (e quindi delle equazioni cardinali che ne sono una diretta conseguenza) dopo aver eliminato le reazioni vincolari, sono ottenibili dalla *Relazione simbolica della statica*

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i \leq 0 \quad \forall \delta P_i \quad (14.1)$$

che storicamente prende il nome di *Principio dei lavori virtuali*. Riassumendo quanto detto, tale principio può quindi enunciarsi nel modo seguente.

14.1 Principio dei lavori virtuali. *Per ogni sistema meccanico soggetto a vincoli non dissipativi, condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che il lavoro virtuale delle forze attive applicate al sistema non sia positivo, per ogni spostamento virtuale del sistema*

$$\delta^* L = \sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i \leq 0 \quad \forall \delta P_i . \quad (14.2)$$

Pertanto, se per un sistema esiste una configurazione di equilibrio, considerando uno spostamento virtuale dei suoi punti a partire da tale configurazione non è possibile che il lavoro virtuale delle forze attive sia positivo (condizione necessaria); viceversa, se analizzando la (14.2) si determina una configurazione tale che il lavoro delle forze attive a partire da tale configurazione sia non positivo per ogni spostamento virtuale, allora tale configurazione è senz'altro di equilibrio (condizione sufficiente).

Osservazione. Se consideriamo l'equilibrio del c.r. libero, dalla (13.6) e per l'arbitrarietà di δA e di ϵ otteniamo che le condizioni caratteristiche dell'equilibrio sono

$$\mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{M}_A = 0 , \quad (14.3)$$

cioè le equazioni cardinali del risultante e del momento. Val la pena di osservare che la sufficienza delle equazioni cardinali per l'equilibrio del c.r. segue naturalmente dall'impostazione della meccanica analitica, senza che si sia dovuto introdurre il postulato della forza come cursore (il che ha permesso, come visto in precedenza, di interpretare un sistema di forze soddisfacenti le (14.3) come equivalente al sistema nullo). Considerazioni del tutto analoghe si possono fare per quanto riguarda la sufficienza delle equazioni cardinali per il moto del corpo rigido. \diamond

Analizziamo più in dettaglio l'espressione del lavoro virtuale. Consideriamo un sistema di N punti materiali, soggetto a vincoli bilateri, fissi o mobili; la generica configurazione e lo spostamento virtuale sono individuati da n coordinate e dalle loro n variazioni, che con notazione vettoriale indicheremo anche con \mathbf{q} e $\delta \mathbf{q}$:

$$\mathbf{q} := (q_1, q_2, \dots, q_n) , \quad \delta \mathbf{q} := (\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n) . \quad (14.4)$$

La posizione di ogni punto del sistema è quindi data da $P_i = P_i(\mathbf{q}, t)$, dipende cioè da n parametri e dal tempo (la dipendenza esplicita dal tempo t manca se i vincoli sono fissi). Essendo lo

spostamento virtuale di ogni punto dato da

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (14.5)$$

il lavoro virtuale δ^*L delle forze attive è quindi

$$\delta^*L := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \quad (14.6)$$

Introducendo le n quantità Q_k ⁽¹⁰⁾

$$\mathbf{Q} := (Q_1, Q_2, \dots, Q_n), \quad Q_k := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

il lavoro virtuale si può allora esprimere come il *prodotto scalare* della sollecitazione attiva \mathbf{Q} per lo spostamento virtuale $\delta \mathbf{q}$:

$$\delta^*L = \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{q} := \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k .$$

Essendo i vincoli bilateri, le posizioni di equilibrio si ottengono dall'equazione

$$\sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = 0 . \quad (14.7)$$

Equilibrio di sistemi olonomi. Facciamo ora l'ipotesi che il sistema sia *olonomo*, cioè che ammetta un numero n di spostamenti virtuali indipendenti, uguali al numero delle coordinate \mathbf{q} ; supponiamo cioè che non solo le q_k siano indipendenti, ma che lo siano anche le loro variazioni δq_k . Perchè la (14.7) sia soddisfatta per ogni spostamento virtuale, la condizione necessaria e sufficiente è quindi che le singole componenti della sollecitazione siano nulle; si ottiene così un sistema di n equazioni

$$\begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_2 = 0 \\ \dots \\ Q_n = 0 \end{cases} \quad (14.8)$$

in numero pari al numero di gradi di libertà del sistema.

Nelle applicazioni a sistemi olonomi con più gradi di libertà, può essere utile il seguente *principio di sovrapposizione*: per calcolare la componente Q_k della sollecitazione attiva secondo la coordinata q_k , possiamo considerare lo spostamento virtuale parziale ottenuto variando la sola coordinata k -sima

$$\delta q_k \neq 0, \quad \delta q_i = 0 \quad \text{se } i \neq k$$

¹⁰Le Q_k sono dette le *componenti della sollecitazione attiva secondo le coordinate q_k* . Se la coordinata q_k ha le dimensioni di una lunghezza, la corrispondente componente Q_k ha le dimensioni di una forza; se q_k è adimensionale (come nel caso di coordinate angolari), la componente Q_k ha le dimensioni di un momento.

e il corrispondente lavoro virtuale parziale, che indichiamo con $(\delta^*L)_k$; la componente Q_k è allora data dal rapporto

$$Q_k = \frac{(\delta^*L)_k}{\delta q_k} ;$$

il lavoro virtuale complessivo è poi dato dalla somma degli n lavori parziali così calcolati.

Equilibrio di un sistema con sollecitazione conservativa. Nel caso di sistema olonomo, una formulazione più sintetica e vantaggiosa del principio dei lavori virtuali si ha nel caso di *sollecitazione conservativa*.

Per una sollecitazione applicata ad un generico sistema diciamo che essa è conservativa se esiste una funzione $U = U(\mathbf{q}, t)$ della configurazione e del tempo, la cui variazione virtuale uguaglia il lavoro virtuale delle forze attive, ovvero tale che

$$\delta^*L = \delta U \quad \Rightarrow \quad Q_k = \frac{\partial U(\mathbf{q}, t)}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) . \quad (14.9)$$

In particolare, nel caso statico abbiamo vincoli fissi e forze non dipendenti dal tempo, per cui è $U = U(q)$.

Le (14.8) implicano allora che tutte e sole le posizioni di equilibrio siano punti di stazionarietà del potenziale

$$\text{equilibrio} \quad \Leftrightarrow \quad Q_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta U = 0 .$$

Riassumendo, si ha il seguente risultato.

14.2 Teorema della stazionarietà del potenziale. *Per ogni sistema meccanico soggetto a vincoli non dissipativi, bilateri ed olonomi, e a sollecitazione attiva conservativa di potenziale U , condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che il potenziale sia stazionario nella configurazione di equilibrio: $\delta U = 0$.*

15 Equazioni di Lagrange.

Consideriamo un sistema con vincoli non dissipativi, bilateri, olonomi, con n gradi di libertà; l'equazione simbolica della dinamica (13.4) si scrive allora nella forma

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i \quad \forall \delta P_i . \quad (15.1)$$

Come già visto, il secondo membro di tali equazioni assume la forma

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad (15.2)$$

dove le n quantità Q_k sono definite da

$$Q_k := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \frac{(\delta^* L)_k}{\delta q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ovvero da

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

nel caso di sollecitazione conservativa con potenziale $U = U(\mathbf{q}, t)$.

Procedendo come nella derivazione della (15.2), e sostituendo semplicemente \mathbf{F}_i con $m_i \mathbf{a}_i$, il primo membro della (15.1) si scrive allora nella forma

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta P_i = \sum_{k=1}^n \tau_k \delta q_k \quad (15.3)$$

con

$$\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n), \quad \tau_k := \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) . \quad (15.4)$$

Essendo il sistema olonomo, per l'arbitrarietà delle δq_k ($k = 1, 2, \dots, n$) otteniamo

$$\sum_{k=1}^n \tau_k \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad \forall \delta q_k \quad \Rightarrow \quad \tau_k = Q_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (15.5)$$

Le (15.5) sono n equazioni differenziali di moto. L'importanza ed utilità di tali equazioni derivano dal risultato, dovuto a Lagrange, secondo cui *le τ_k possono essere calcolate attraverso l'energia cinetica, e quindi conoscendo l'atto di moto, senza dover analizzare la distribuzione delle accelerazioni.* A tal fine, consideriamo, nell'espressione dell'energia cinetica, le \mathbf{q} e le $\dot{\mathbf{q}}$ come *variabili indipendenti*, cioè interpretiamo T come una funzione da un aperto di \mathbf{R}^{2n+1} in \mathbf{R} , $T : \{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\} \mapsto T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Vale allora il seguente risultato.

15.1 Teorema(Lagrange). *Le n quantità τ_k sono esprimibili attraverso l'energia cinetica T , essendo:*

$$\tau_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) . \quad (15.6)$$

Prima di dimostrare il teorema, ritorniamo alle equazioni (15.5); tenendo conto del risultato ora enunciato, le equazioni di moto si scrivono allora nella forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (15.7)$$

dette *equazioni di Lagrange per sollecitazione generica*; se poi la sollecitazione è conservativa secondo la definizione (14.9), con un potenziale $U = U(\mathbf{q}, t)$, inserendo nelle (15.7) le relazioni

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k \quad (15.8)$$

possiamo scrivere le (15.7) nella forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (15.9)$$

dove la funzione $L : \mathbf{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + U(\mathbf{q}, t)$$

è la *funzione di Lagrange* (o Lagrangiana) del sistema; le equazioni (15.9) sono dette le *equazioni di Lagrange per sollecitazione conservativa*.

Osservazione. Utilizzando come per la configurazione e lo spostamento virtuale una notazione di tipo vettoriale, può essere comodo introdurre una notazione più sintetica anche per le derivate parziali: data una funzione $f = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, useremo allora la notazione seguente

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} := \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{q}}} := \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_n} \right).$$

Con tale notazione, le equazioni di Lagrange (15.9) si scrivono allora nella forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} :$$

nel seguito, useremo sia la notazione con gli indici che la notazione vettoriale. \diamond

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema di Lagrange; a tal fine, premettiamo tre Lemmi, i primi due dei quali riguardano la derivata di una funzione

$$f : \mathbf{R}^{n+1} \mapsto \mathbf{R} \quad f = f(\mathbf{q}, t).$$

Se le \mathbf{q} sono n variabili indipendenti, ciascuna dipendente da t , la derivata totale di f rispetto al parametro t è

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (15.10)$$

ed è quindi una funzione lineare (affine) delle $\dot{\mathbf{q}}$; si ha quindi

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{df}{dt} \right) = \frac{\partial f}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{df}{dt} \right) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}. \quad (15.11)$$

Vale allora il seguente Lemma.

15.2 Lemma. Dato un sistema di N punti materiali P_i , con velocità \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, \dots, N$), si ha

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n) . \quad (15.12)$$

Dimostrazione. La (15.11) vale evidentemente anche per una qualunque funzione \mathbf{f} a valori vettoriali; basta allora considerare nella (15.11) $\mathbf{f} = P_i$, per cui $d\mathbf{f}/dt = dP_i/dt = \mathbf{v}_i$. \square

Applichiamo ora la (15.10) alla funzione $f = \partial g / \partial q_j$, con $g = g(\mathbf{q}, t)$, ($j = 1, 2, \dots, n$), e consideriamo le \mathbf{q} e le $\dot{\mathbf{q}}$ come *variabili indipendenti*: con tale ipotesi, e ricordando la ben nota proprietà di commutabilità delle derivate parziali seconde, abbiamo che anche la derivata totale d/dt commuta con la derivata parziale $\partial/\partial q$, essendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_j} (g \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial g}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{dg}{dt} \right) ; \end{aligned}$$

questo risultato si scrive anche in forma vettoriale

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{dg}{dt} \right) . \quad (15.13)$$

Vale allora il seguente Lemma.

15.3 Lemma. Dato un sistema di N punti materiali P_i , con velocità \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, \dots, N$), si ha

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n) . \quad (15.14)$$

Dimostrazione. La (15.13) vale evidentemente anche per una qualunque funzione \mathbf{g} a valori vettoriali; basta allora considerare nella (15.13) $\mathbf{g} = P_i$, per cui $d\mathbf{g}/dt = dP_i/dt = \mathbf{v}_i$. \square

Consideriamo infine l'energia cinetica T , che è una funzione quadratica omogenea di secondo grado nelle velocità \mathbf{v}_i dei punti del sistema; se \mathbf{v}_i dipende da un parametro λ , si ha

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(\lambda) \cdot \mathbf{v}_i(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(\lambda) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i(\lambda)}{\partial \lambda} . \quad (15.15)$$

Applicando tale equazione con $\lambda = \dot{q}_j$ e con $\lambda = q_j$ otteniamo allora il seguente risultato.

15.4 Lemma. Dato un sistema di N punti materiali P_i , con masse m_i e con velocità \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, \dots, N$), l'energia cinetica T soddisfa le seguenti relazioni

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n) . \quad (15.16)$$

Tenendo presenti questi risultati preliminari, la dimostrazione del teorema di Lagrange è ora immediata.

Dimostrazione del teorema di Lagrange. Le (15.6) derivano dalla seguente catena di uguaglianze ($j = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \tau_j &:= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &\stackrel{(15.12)(15.14)}{=} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \stackrel{(15.16)}{=} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} . \quad \square \end{aligned}$$

Equazioni di Lagrange e costanti del moto. Diamo un breve cenno al problema delle costanti del moto nell'ambito lagrangiano, nell'ipotesi che il sistema meccanico ammetta una sollecitazione conservativa e quindi che le equazioni di moto siano deducibili da una funzione di Lagrange $L = T + U$, con $U = U(\mathbf{q}, t)$. A questo scopo, è utile introdurre i *momenti cinetici* \mathbf{p} definiti da:

$$\mathbf{p} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} : \quad p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) . \quad (15.17)$$

Coordinate cicliche e conservazione dei momenti cinetici. Supponiamo che la funzione L non dipenda da una coordinata q_m , e quindi che $\partial L / \partial q_m = 0$: diremo che tale coordinata è *ciclica* o *ignorabile*; scrivendo allora la m -sima equazione di Lagrange abbiamo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = \text{costante} .$$

Pertanto, se il sistema ammette una coordinata ignorabile, il momento cinetico corrispondente è una costante del moto:

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_m = \text{costante} . \quad (15.18)$$

Esempio. Un classico esempio è dato dal moto centrale, che come noto è un moto piano; supponendo la forza di tipo posizionale, e descrivendo il moto con le coordinate polari ϱ e ϑ , si ha allora un potenziale $U = U(\varrho)$ ed una funzione di Lagrange

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\vartheta}^2) + U(\varrho) . \quad (15.19)$$

L'angolo ϑ è quindi una coordinata ciclica, a cui corrisponde la conservazione del momento cinetico p_ϑ

$$p_\vartheta = m \varrho^2 \dot{\vartheta} ;$$

tale conservazione corrisponde alla ben nota legge di conservazione del momento della quantità di moto ovvero, a meno di costanti moltiplicative, della velocità areolare. \diamond

Energia generalizzata e sua conservazione. Un secondo risultato è il seguente. Introduciamo la funzione $J = J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, che chiamiamo *energia generalizzata o di Jacobi*, data da

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) ; \quad (15.20)$$

si dimostra che la derivata temporale della funzione J è data da ⁽¹¹⁾

$$\frac{dJ}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} .$$

Segue allora da tale identità che se L non dipende esplicitamente dal tempo l'energia generalizzata è una costante del moto:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad J = \text{costante} .$$

La conservazione dell'energia meccanica (che nell'ambito delle equazioni cardinali è una conseguenza del teorema dell'energia cinetica) può essere ottenuta come caso particolare da questo risultato, sotto l'ulteriore ipotesi che i vincoli siano fissi; si dimostra infatti che se i vincoli sono fissi la funzione di Jacobi è uguale all'energia meccanica ⁽¹²⁾

$$\text{vincoli fissi} \quad \Rightarrow \quad J = T - U$$

per cui se i vincoli sono fissi la conservazione di J , che sussiste essendo in tal caso L indipendente da t , corrisponde alla conservazione dell'energia meccanica.

Esempio. Consideriamo, in un piano orizzontale, un punto materiale P , di massa m , scorrevole senza attrito lungo un'asta OA , collegato ad O da una molla di costante k ; supponiamo che l'asta ruoti attorno all'estremo O con moto rotatorio uniforme di velocità angolare ω . Se consideriamo il punto P , si tratta di un sistema vincolato con vincolo liscio e bilatero ma *mobile*, per cui anche se la forza elastica applicata al punto è conservativa non si ha conservazione dell'energia meccanica. La funzione di Lagrange del punto è

$$L(s, \dot{s}, t) = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + \omega^2 s^2) - \frac{1}{2} k s^2 ,$$

avendo assunto come coordinata libera $s = \overline{OP}$. Poichè la funzione di Lagrange non dipende esplicitamente dal tempo, l'energia generalizzata si conserva: è immediato verificare che

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \dot{s} - L = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 s^2 + \frac{1}{2} k s^2 .$$

¹¹Ricordando che per una funzione $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è $df/dt = \partial f/\partial t + \partial f/\partial \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \partial f/\partial \dot{\mathbf{q}} \cdot \ddot{\mathbf{q}}$ si ha infatti

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \frac{dL}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} .$$

¹²Se i vincoli sono fissi $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ è una funzione omogenea di secondo grado nelle velocità lagrangiane $\dot{\mathbf{q}}$, per cui, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, $\sum_k (\partial L/\partial \dot{q}_k) \dot{q}_k = \sum_k (\partial T/\partial \dot{q}_k) \dot{q}_k = 2T$, e quindi $J = 2T - L = T - U$.

Come si verifica facilmente, $J \neq T - U$, essendo $T - U = \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + \omega^2 s^2) + \frac{1}{2}ks^2$, e quindi l'energia generalizzata non è l'energia meccanica. In questo caso, la conservazione di J ha però un immediato significato; se infatti descriviamo il moto dal punto di vista dell'osservatore non inerziale solidale all'asta girevole, per tale osservatore il punto è vincolato con un vincolo liscio, bilatero e *fisso*, sotto l'azione delle forze elastica e centrifuga, entrambe conservative: per tale osservatore si ha quindi conservazione dell'energia meccanica, ed è immediato constatare che $(T - U)_{\text{rel}} = J$.

Osservazione. Come l'esempio ora proposto pone in evidenza, anche la conservazione dell'energia, al pari dell'esistenza di altri integrali primi del moto (quantità di moto, momento delle quantità di moto, momenti cinetici) non ha quindi significato intrinseco, ma dipende dall'osservatore che descrive il moto e dalla scelta delle coordinate. \diamond

16 Sollecitazione conservativa e potenziale.

Diamo una breve sintesi dei diversi modi in cui in Meccanica Newtoniana (teorema dell'energia) e in Meccanica Analitica (teorema della stazionarietà del potenziale ed equazioni di Lagrange) si introduce la nozione di potenziale.

Potenziale di una forza posizionale.

Il primo modo di introdurre il concetto di potenziale è partendo da un singolo campo di forza di tipo posizionale: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P)$; in tal caso dire che il campo di forze \mathbf{F} è conservativo corrisponde ad una delle seguenti affermazioni, tra loro equivalenti *nell'ipotesi che il campo di forze \mathbf{F} sia definito in una regione semplicemente connessa di R^3* :

(i) il lavoro infinitesimo della forza \mathbf{F} è un differenziale esatto, cioè esiste una funzione $U = U(P)$ tale che

$$d^*L(P) := \mathbf{F}(P) \cdot dP = dU(P) ; \quad (16.1)$$

(ii) la potenza $\Pi := \mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{v}_P$ della forza \mathbf{F} è la derivata totale di una funzione $U(P)$:

$$\Pi = dU(P)/dt ;$$

(iii) il lavoro della forza \mathbf{F} lungo un qualunque cammino regolare γ da P_0 a P è funzione solo di P_0 e P , ma non di γ , per cui possiamo introdurre una funzione U tale che

$$\int_{P_0}^P \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = U(P) - U(P_0) \quad \Rightarrow \quad U(P) = U(P_0) + \int_{P_0}^P \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} , \quad (16.2)$$

essendo l'integrale calcolato lungo un qualunque cammino tra P_0 e P ;

(iv) il lavoro lungo un percorso chiuso (ciclo) è nullo: $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

(v) la forza \mathbf{F} del campo è il gradiente di una funzione U : $\mathbf{F} = \text{grad}U$;

(vi) la forza \mathbf{F} del campo è irrotazionale: $\text{rot } \mathbf{F} = 0$.

Esempi ben noti di campi di forze con tali proprietà sono i campi centrali e posizionali (gravitazionale, elettrostatico, elastico), il campo di forze peso e più in generale i campi di forze costanti, e, per un osservatore non inerziale uniformemente ruotante rispetto ad un osservatore inerziale, il campo di forze centrifughe agente su un corpo piano posto in un piano contenente l'asse di rotazione.

Potenziale di una sollecitazione posizionale.

Nell'applicazione del teorema dell'energia cinetica a sistemi estesi (sistemi di punti, corpo rigido e sistemi articolati), è utile introdurre una generalizzazione della precedente nozione di potenziale, suggerita dalla definizione (i). Consideriamo una generica sollecitazione posizionale \mathcal{S} applicata al sistema, costituita da un insieme di forze \mathbf{F}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) applicate in punti P_i e dipendenti solo dalle posizioni dei punti del sistema, e da coppie di momenti \mathbf{C}_j applicate a corpi rigidi del sistema; diciamo allora che la sollecitazione \mathcal{S} è conservativa se il lavoro infinitesimo della sollecitazione è un differenziale esatto, cioè se esiste una funzione U della configurazione del sistema tale che:

$$d^*L := \sum_i \mathbf{F}_i \cdot dP_i + \sum_j \mathbf{C}_j \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j = dU \quad (16.3)$$

(ϵ_j è la rotazione infinitesima del corpo rigido cui la j -sima coppia \mathbf{C}_j è applicata).

Un primo esempio di tale generalizzazione del concetto di potenziale si ha considerando due punti liberi A e B collegati da una molla di costante elastica k ; le due forze elastiche scambiate tra A e B non sono singolarmente conservative, ma se si considera il loro lavoro infinitesimo complessivo, esso è il differenziale della funzione $U = -(1/2)k\overline{AB}^2$, che è il *potenziale della molla*.

Un secondo esempio è quello di una coppia applicata ad un corpo rigido piano che si muove in un piano, di normale \mathbf{k} ; se $\mathbf{C} = C(\vartheta)\mathbf{k}$ è il momento della coppia e $\boldsymbol{\epsilon} = d\vartheta\mathbf{k}$ il vettore rotazione infinitesima del corpo, il lavoro infinitesimo della coppia è $d^*L = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = C(\vartheta)d\vartheta$, per cui la coppia è conservativa secondo la definizione ora introdotta, con potenziale

$$U(\vartheta) = \int^{\vartheta} C(\xi) d\xi ; \quad (16.4)$$

in particolare per una coppia di momento costante C_0 si ha $U = C_0\vartheta$, per una coppia elastica di momento $C = -\alpha\vartheta$ si ha $U = -(1/2)\alpha\vartheta^2$ (in entrambi i casi, a meno di inessenziali costanti additive).

Potenziale in Meccanica analitica.

Utilizzando i metodi della meccanica analitica è utile introdurre una ulteriore generalizzazione del concetto di potenziale, essenzialmente basata sul fatto che si considera ora il lavoro virtuale e non più il lavoro corrispondente a spostamenti effettivi.

Senza analizzare il caso di un singolo campo di forze, consideriamo direttamente un generico sistema olonomo, con n gradi di libertà e con vincoli bilateri, eventualmente mobili; per ogni punto P_i del sistema si ha allora $P_i = P_i(\mathbf{q}; t)$, dove $\mathbf{q} := (q_1, \dots, q_n)$ sono le coordinate libere del sistema; supponiamo che sui punti agiscano delle forze \mathbf{F}_i dipendenti dalla configurazione del sistema ed eventualmente dal tempo: $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{q}; t)$ (non si richiede quindi che si tratti di una sollecitazione posizionale). In queste ipotesi, le componenti della sollecitazione attiva del sistema (cioè i coefficienti Q_k nell'espressione del lavoro virtuale $\delta^*L = \sum_k Q_k \delta q_k$) risultano genericamente dipendere dalle coordinate e dal tempo, per cui

$$\delta^*L = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(\mathbf{q}; t) \cdot \delta P_i = \sum_{k=1}^n Q_k(\mathbf{q}; t) \delta q_k . \quad (16.5)$$

Generalizzando la precedente definizione di potenziale, diremo allora che la sollecitazione attiva applicata al sistema è complessivamente conservativa, con potenziale U , se il lavoro virtuale è il *differenziale virtuale* (cioè rispetto alle sole coordinate \mathbf{q}) di una funzione $U = U(\mathbf{q}; t)$:

$$\delta^*L(\mathbf{q}; t) = \delta U(\mathbf{q}; t) \quad \text{ovvero} \quad Q_k(\mathbf{q}; t) = \frac{\partial U(\mathbf{q}; t)}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, n) . \quad (16.6)$$

È questo il potenziale che entra nella scrittura delle equazioni di Lagrange in forma conservativa, con Lagrangiana $L = T + U$.

Come esempio di tale generalizzazione, consideriamo in un riferimento cartesiano ($O; x, y$) un punto materiale A vincolato con vincolo bilatero all'asse x : $(A - O) = x\mathbf{i}$. Supponiamo che

A sia collegato, tramite una molla di costante k , all'estremo B di un'asta OB , di lunghezza ℓ , incernierata in O e ruotante nel piano con legge di moto assegnata $\vartheta = \vartheta(t)$, essendo ϑ l'angolo che l'asta forma con l'asse x . Considerando come sistema meccanico il solo punto A , si tratta allora di un sistema con un grado di libertà e vincolo fisso e bilatero (l'asse x), soggetto alla forza elastica esercitata dalla molla, che è una forza *dipendente dal tempo*:

$$\mathbf{F} = -k(A - B) \quad \Rightarrow \quad F_x = -k(x - \ell \cos \vartheta(t)), \quad F_y = k \ell \sin \vartheta(t) .$$

Essendo lo spostamento virtuale del punto A dato da $\delta A = \delta x \mathbf{i}$, il lavoro virtuale della forza è

$$\delta^* L = \mathbf{F} \cdot \delta A = F_x \delta x = -k(x - \ell \cos \vartheta(t)) \delta x \quad \Rightarrow \quad Q_x(x, t) = -k(x - \ell \cos \vartheta(t)) .$$

Osserviamo che

$$Q_x = -k(x - \ell \cos \vartheta(t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} k (x - \ell \cos \vartheta(t))^2 \right) ;$$

pertanto la forza \mathbf{F} , dipendente dal tempo, ammette potenziale nel senso della precedente definizione (16.6), con

$$U(x, t) = -\frac{1}{2} k (x - \ell \cos \vartheta(t))^2 . \quad (16.7)$$

Tale risultato può scriversi in una forma più semplice osservando che, come ogni potenziale dipendente solo dalle coordinate \mathbf{q} è definito a meno di costanti additive (cioè di quantità che hanno derivata nulla rispetto alle coordinate), così il potenziale dipendente dal tempo non cambia sommando ad esso arbitrarie funzioni del tempo; aggiungendo all'espressione (16.7) la funzione $-(1/2)k(\ell \sin \vartheta(t))^2$ otteniamo allora

$$U(x, t) = -\frac{1}{2} k [(x - \ell \cos \vartheta(t))^2 + (\ell \sin \vartheta(t))^2] = -\frac{1}{2} k \overline{AB}^2 . \quad (16.8)$$

Pertanto ritroviamo, in questo esempio, un risultato generale, utile nelle applicazioni: *nello studio della meccanica di un generico sistema (ad esempio nello scrivere le equazioni di Lagrange), ad una molla di costante k , di estremi A e B , possiamo sempre associare il potenziale $U = -(1/2) k \overline{AB}^2$; tale potenziale può dipendere dal tempo se il moto di un estremo della molla è assegnato, mentre dipende solo dalle coordinate se gli estremi sono liberi o se più in particolare un estremo è fisso.*

Osservazione. Accenniamo ad una ulteriore possibile generalizzazione della nozione di potenziale, che consente di scrivere le equazioni di Lagrange in forma conservativa in presenza di particolari campi di forze dipendenti, oltre che dalle coordinate \mathbf{q} e dal tempo, anche (linearmente) dalle velocità $\dot{\mathbf{q}}$. A tal fine, se $Q_k = Q_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t)$ ($k = 1, \dots, n$) sono le componenti della sollecitazione attiva, è facile verificare che se esiste una funzione $U = U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t)$ tale che

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (16.9)$$

allora le equazioni di Lagrange ammettono la usuale formulazione conservativa in termini di una funzione Lagrangiana $L := T + U$. Anche in tal caso, diremo che la sollecitazione attiva con la proprietà (16.9) è conservativa con potenziale U ; sollecitazioni di tale tipo si incontrano ad esempio in meccanica relativa (forza di Coriolis) e in elettromagnetismo (forza di Lorentz). \diamond

17 Introduzione al formalismo canonico.

Ricordiamo che per un sistema meccanico con n gradi di libertà, sotto opportune condizioni sui vincoli e sulla sollecitazione attiva applicata, le equazioni di moto sono scrivibili in forma di equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \quad L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + U(\mathbf{q}, t) . \quad (17.1)$$

La forma generale per la funzione di Lagrange è

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_k(\mathbf{q}, t) \dot{q}_k + c(\mathbf{q}, t) \quad (17.2)$$

dove le funzioni $a_{ik}(\mathbf{q}, t)$ sono le componenti di una matrice quadrata \mathcal{T} (detta la matrice dell'energia cinetica), di tipo $n \times n$, simmetrica e definita positiva (e quindi invertibile). In forma più compatta, abbiamo allora ⁽¹³⁾

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathcal{T}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + c(\mathbf{q}, t) . \quad (17.3)$$

Sotto tali ipotesi, è facile mostrare che le equazioni di Lagrange si possono scrivere, esplicitando la dipendenza dalle derivate seconde, nella forma

$$\mathcal{T} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

e quindi come equazione del primo ordine (*sistema dinamico*)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathcal{T}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{pmatrix} ,$$

associando lo stato $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ del sistema al punto \mathbf{x} dello *spazio degli stati*.

Alle equazioni di moto del sistema si può però dare una formulazione equivalente come equazioni del primo ordine in forma normale rispetto ad una diversa scelta di coordinate, che si rivela più adatta per numerosi sviluppi, sia di tipo teorico che applicativo. A tal fine, introduciamo i momenti cinetici (15.17): dalla forma generale della Lagrangiana L segue allora che

$$p_k = \sum_{i=1}^n a_{ik}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i + b_k(\mathbf{q}, t) , \quad \text{cioè} \quad \mathbf{p} = \mathcal{T} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b} . \quad (17.4)$$

¹³Data una generica matrice \mathcal{M} di tipo $n \times n$ ed un vettore \mathbf{v} in uno spazio vettoriale n -dimensionale, indichiamo con $\mathcal{M}\mathbf{v}$ il vettore ottenuto applicando \mathcal{M} a \mathbf{v} , di componenti $(\mathcal{M}\mathbf{v})_k := \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_{ki} v_i$; per ogni coppia di vettori \mathbf{v}, \mathbf{w} è allora

$$\sum_{i,j=1}^n \mathcal{M}_{ij} w_i v_j = \mathbf{w} \cdot \mathcal{M}\mathbf{v} ;$$

in particolare, se \mathcal{M} è simmetrica, si ha $\mathbf{w} \cdot \mathcal{M}\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathcal{M}\mathbf{w}$.

Possiamo allora descrivere lo stato del sistema, invece che con un punto $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ nello spazio degli stati, con la coppia di variabili $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, dove \mathbf{y} è un punto dello *spazio delle fasi* del sistema: questa trasformazione è nota in meccanica come *trasformazione di Legendre*

$$\mathcal{L} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \mathcal{L}(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto (\mathbf{q}, \mathbf{p} = \mathcal{T}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}) . \quad (17.5)$$

Per l'invertibilità della matrice \mathcal{T} , ogni \dot{q}_k ($k = 1, 2, \dots, n$) può essere espressa come funzione delle coordinate \mathbf{q} e dei momento cinetici \mathbf{p} , per cui la trasformazione di Legendre è invertibile, ed abbiamo:

$$\mathcal{L}^{-1} : \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}, \quad (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} = \varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)) \quad \varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{b}) . \quad (17.6)$$

Il risultato notevole, dovuto ad Hamilton, è che in tale descrizione le equazioni di moto possono ancora essere costruite a partire da una sola funzione di stato, ed ammettono ancora (al pari delle equazioni di Lagrange) formulazione variazionale.

La funzione di stato definita sullo spazio delle fasi è la *funzione di Hamilton* (o Hamiltoniana del sistema)

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \sum_{j=1}^n p_j \varphi_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{q}, \varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p}), t) = \mathbf{p} \cdot \varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{q}, \varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p}), t) . \quad (17.7)$$

Osservazione. Per ogni t e per ogni coppia $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, il valore numerico di H coincide con il valore numerico dell'energia generalizzata J , essendo l'Hamiltoniana del sistema e la funzione di Jacobi legate dalla trasformazione di Legendre (17.5), in quanto la prima dipende da \mathbf{y} e la seconda da \mathbf{x} : si ha cioè

$$H(\mathcal{L}(\mathbf{x}), t) = J(\mathbf{x}, t), \quad H(\mathbf{y}, t) = J(\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{y}), t) ;$$

in particolare, *per sistemi con vincoli fissi l'Hamiltoniana è quindi l'energia meccanica del sistema.* \diamond

Tornando al problema della formulazione delle equazioni di moto, il risultato fondamentale è il seguente.

17.1 Teorema. *Se $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ è soluzione delle equazioni di Lagrange (17.1), $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ è soluzione delle equazioni (di Hamilton)*

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) . \quad (17.8)$$

Le equazioni di Hamilton sono quindi un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) . \quad (17.9)$$

Dimostrazione. Tenendo presente le definizioni di Hamiltoniana e di momento cinetico, e la relazione tra \mathbf{p} e $\dot{\mathbf{q}}$, abbiamo anzitutto, per $k = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} \stackrel{(17.7)}{=} \varphi_k + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_k} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \stackrel{(15.17)}{=} \varphi_k \stackrel{(17.6)}{=} \dot{q}_k ,$$

da cui il primo gruppo di equazioni (17.9); inoltre

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} \stackrel{(17.7)}{=} \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \stackrel{(15.17)}{=} - \frac{\partial L}{\partial q_k} :$$

il secondo gruppo di equazioni (17.9) segue allora ricordando che per le equazioni di Lagrange e per la definizione di momento cinetico si ha

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \dot{p}_k . \quad \square$$

Esempio I. Consideriamo il moto centrale prima descritto in ambito lagrangiano, con Lagrangiana (15.19): i momenti cinetici sono

$$p_\varrho = m\dot{\varrho}, \quad p_\vartheta = m\varrho^2\dot{\vartheta}$$

da cui, invertendo:

$$\dot{\varrho} = \frac{p_\varrho}{m}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{m\varrho^2}; \quad (17.10)$$

essendo il punto libero e $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, si ha allora

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})|_{(17.10)} = \frac{p_\varrho^2}{2m} + \frac{p_\vartheta^2}{2m\varrho^2} - U(\varrho) .$$

Le equazioni di moto sono:

$$\dot{\varrho} = \frac{p_\varrho}{m}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{m\varrho^2}, \quad \dot{p}_\varrho = \frac{p_\vartheta^2}{m\varrho^3} + U'(\varrho), \quad \dot{p}_\vartheta = 0 . \quad \diamond$$

Esempio II. Consideriamo la Lagrangiana, dipendente esplicitamente dal tempo, data da

$$L(s, \dot{s}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{s} + \dot{f})^2 - \frac{1}{2}k s^2 \quad (17.11)$$

dove f è un'assegnata funzione del tempo ⁽¹⁴⁾. Il momento cinetico è quindi $p_s = m(\dot{s} + \dot{f})$, da cui

$$\dot{s} = \frac{p_s}{m} - \dot{f} . \quad (17.12)$$

La funzione di Hamilton (che non coincide con l'energia meccanica $T - U$ essendo in tal caso L e quindi H dipendente esplicitamente dal tempo) è allora definita da

$$H(s, p_s, t) = p_s \dot{s}|_{(17.12)} - L(s, \dot{s}, t)|_{(17.12)} = \frac{p_s^2}{2m} - p_s \dot{f} + \frac{1}{2}k s^2$$

¹⁴Consideriamo, in un riferimento cartesiano $(O; x, y)$, con x orizzontale, un punto materiale di massa m , appoggiato senza attrito su una lamina che si muove orizzontalmente con moto assegnato: $x = f(t)$; il punto è collegato ad un punto della lamina da una molla di costante elastica k ; indicando con s la lunghezza della molla, $f(t) + s$ è la coordinata del punto, per cui la Lagrangiana che descrive il moto del punto materiale è data dalla (17.11).

e le equazioni di moto sono

$$\dot{s} = \frac{p_s}{m} - \dot{f}, \quad \dot{p}_s = -k s . \quad \diamond$$

Osservazione. Indipendentemente dalla forma particolare della Hamiltoniana, segue dalle equazioni di moto (17.9) che la variazione di H lungo le soluzioni delle equazioni è

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) \stackrel{(17.9)}{=} \frac{\partial H}{\partial t} .$$

Pertanto se l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo è una costante del moto

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \text{costante} .$$

Come già detto in precedenza, se in particolare H è l'Hamiltoniana di un sistema meccanico con vincoli fissi, essa coincide con l'energia meccanica del sistema. \diamond

18 Formulazione variazionale delle equazioni di moto.

Rimandando a quanto noto dai corsi di Analisi per una trattazione più completa e rigorosa del calcolo variazionale, ci poniamo direttamente nelle ipotesi restrittive che sono sufficienti ad ottenere la formulazione variazionale delle equazioni di Lagrange e delle equazioni di Hamilton.

Stazionarietà di un funzionale.

Ricordiamo brevemente la nozione di stazionarietà di una funzione reale di n variabili, $f = f(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, che supponiamo dotata di *derivate parziali prime continue*.

In un generico punto \mathbf{x} si definisce la variazione prima della funzione come l'operatore lineare f'_x che ad ogni vettore $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n$ associa la funzione

$$f'_x \mathbf{h} := \text{grad } f \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i ; \quad (18.1)$$

diciamo che f è stazionaria in \mathbf{x} se la sua variazione prima è nulla

$$f'_x \mathbf{h} = 0 \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbf{R}^n .$$

In modo equivalente, fissati \mathbf{x} e \mathbf{h} , si consideri la funzione $\Phi = \Phi(\epsilon)$ definita da $\Phi(\epsilon) := f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h})$; la variazione prima definita dalla (18.1) può allora calcolarsi considerando il termine del primo ordine in ϵ dello sviluppo di Taylor di Φ , ovvero calcolando la derivata prima di Φ in $\epsilon = 0$

$$f'_x \mathbf{h} = \left. \frac{d\Phi}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h}) \right|_{\epsilon=0} .$$

(Come noto, se poi il punto \mathbf{x} è un punto di massimo locale e se $f \in C^2$, esiste un intorno di \mathbf{x} in cui la forma quadratica $\sum_{i,j=1}^n (\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(\mathbf{x}) h_i h_j$ associata a f è $\leq 0 \quad \forall \mathbf{h}$; se \mathbf{x} è un punto di minimo locale la forma quadratica è $\geq 0 \quad \forall \mathbf{h}$).

Invece di considerare funzioni di n variabili, introduciamo ora un insieme di funzioni \mathcal{D} che chiamiamo *funzioni di confronto*, e consideriamo delle applicazioni da \mathcal{D} a \mathbf{R} che ad ogni funzione di confronto u associano un numero reale $\mathcal{F}(u)$; tali applicazioni si chiamano *funzionali*. Si tratta quindi di applicazioni a valori in \mathbf{R} definite non più sullo spazio vettoriale finito-dimensionale \mathbf{R}^n , ma sull'insieme delle funzioni di confronto \mathcal{D} .

Nel seguito considereremo sempre *funzionali definiti attraverso integrali*, cioè ad esempio della forma

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x), x) dx ; \quad (18.2)$$

più in generale, f può dipendere da una funzione $\mathbf{u} : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ e dalla sue derivate parziali sino ad un ordine k .

Grossolanamente, il calcolo delle variazioni analizza le proprietà di massimo e minimo dei funzionali. Qui, ci limiteremo a considerare il problema della loro *stazionarietà*; a tal fine, è sufficiente introdurre la nozione di *variazione prima* di un funzionale.

Nel calcolo della stazionarietà di un funzionale risulta molto utile il seguente risultato preliminare, detto il *Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni*.

18.1 Lemma. Se $G : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ è continua e se per ogni funzione h continua su $[a, b]$ è

$$\int_a^b G(t) h(t) dt = 0 , \quad (18.3)$$

allora G è identicamente nulla: $G(t) = 0$.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo, supponendo che in un punto $t_0 \in (a, b)$ sia $G(t_0) \neq 0$, ad esempio $G(t_0) > 0$; allora per la continuità della funzione esiste un intorno $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ in cui $G(t) > 0$, per esempio $G(t) > G(t_0)/2$. Introduciamo una funzione continua χ_ϵ , non nulla in $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ e con integrale uguale ad uno, per cui si ha

$$\int_a^b \chi_\epsilon(t) dt = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \chi_\epsilon(t) dt = 1 ;$$

come funzione h , scegliamo ora $h(t) = \chi_\epsilon(t)$, per cui

$$\int_a^b G(t) h(t) dt = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} G(t) \chi_\epsilon(t) dt > \frac{G(t_0)}{2} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \chi_\epsilon(t) dt = \frac{G(t_0)}{2} > 0$$

in contraddizione con l'ipotesi (18.3). □

Tornando ad un funzionale della forma (18.2), sia \mathcal{D} dato dalle funzioni di confronto $u = u(x)$ continue per $x \in [a, b]$ insieme con la loro derivata $u'(x)$, e che verificano le condizioni al bordo

$$u(a) = \alpha , \quad u(b) = \beta , \quad \alpha, \beta \text{ assegnati .}$$

Accanto alle funzioni di confronto consideriamo lo spazio vettoriale \mathcal{D}_0 (lo spazio delle *variazioni ammissibili*) delle funzioni h continue e con derivata continua in $[a, b]$, nulle in a e b :

$$h(a) = h(b) = 0 .$$

Fissati u e h , consideriamo la funzione $\Phi = \Phi(\epsilon)$ definita da $\Phi(\epsilon) := \mathcal{F}(u + \epsilon h)$; chiamiamo allora *variazione prima* del funzionale \mathcal{F} in u il funzionale $\delta\mathcal{F}(u; h)$ ⁽¹⁵⁾ definito da

$$\delta\mathcal{F}(u; h) : h \mapsto \delta\mathcal{F}(u; h) := \left. \frac{d\Phi(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \int_a^b f(u(x) + \epsilon h(x), u'(x) + \epsilon h'(x), x) dx \right|_{\epsilon=0}$$

(formalmente, il calcolo della variazione prima può essere ottenuto considerando nello sviluppo di Taylor della funzione $\Phi(\epsilon)$ i termini del primo ordine in ϵ).

Diciamo che una funzione di confronto $u \in \mathcal{D}$ è un punto di stazionarietà per \mathcal{F} , ovvero che \mathcal{F} è *stazionario* in u , se la variazione prima in u è nulla:

$$\delta\mathcal{F}(u; h) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}_0 .$$

¹⁵In analogia con la (18.1) possiamo anche indicare il funzionale $\delta\mathcal{F}(u; h)$ con $\mathcal{F}'_u h$.

Equazioni di Eulero-Lagrange di un funzionale $\mathcal{F}(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x), x) dx$.

Sia \mathcal{F} definito da

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x), x) dx, \quad \mathcal{D} = \{u : [a, b] \mapsto \mathbf{R}, u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \quad (18.4)$$

dove f ha derivate seconde continue e α e β sono fissati. Sia \mathcal{D}_0 lo spazio vettoriale delle funzioni con condizioni di annullamento al bordo

$$\mathcal{D}_0 = \{h : [a, b] \mapsto \mathbf{R}, h(a) = h(b) = 0\}.$$

Si ha allora (per semplificare la notazione, nell'integrale scriveremo u e u' invece di $u(x)$ e $u'(x)$, e lo stesso per h e h')

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u + \epsilon h) - \mathcal{F}(u) &= \int_a^b \left(f(u + \epsilon h, u' + \epsilon h', x) - f(u, u', x) \right) dx \\ &= \epsilon \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, u', x) h(x) + \frac{\partial f}{\partial u'}(u, u', x) h'(x) \right) dx + O(\epsilon^2); \end{aligned}$$

integrando per parti nel secondo termine dell'integrando, e *tenendo conto dell'annullamento di h in a e b* , segue che

$$\mathcal{F}(u + h) - \mathcal{F}(u) = \epsilon \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, u', x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right) (u, u', x) \right) h(x) dx + O(\epsilon^2). \quad (18.5)$$

Pertanto dalla definizione precedentemente introdotta di stazionarietà di un funzionale segue che u è stazionario per \mathcal{F} se e solo se

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, u', x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right) (u, u', x) \right) h(x) dx = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}_0.$$

Utilizzando il Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, risulta così provato il seguente risultato.

18.2 Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente perchè il funzionale \mathcal{F} dato dalla (18.4) sia stazionario in u è che u soddisfi l'equazione (di Eulero-Lagrange)*

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right) = \frac{\partial f}{\partial u} \quad u(a) = \alpha, u(b) = \beta. \quad (18.6)$$

Osservazioni.

(i) Il risultato si generalizza al caso in cui \mathcal{F} dipende da n funzioni $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ed è quindi della forma

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \int_a^b f(\mathbf{u}(x), \mathbf{u}'(x), x) dx; \quad (18.7)$$

la (18.5) diventa allora

$$\mathcal{F}(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{h}) - \mathcal{F}(\mathbf{u}) = \epsilon \int_a^b \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u_k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_k} \right) (\mathbf{u}, \mathbf{u}', x) \right) h_k(x) dx + O(\epsilon^2).$$

Per l'arbitrarietà di $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, il Teorema 18.2 si enuncia dicendo che condizione necessaria e sufficiente di stazionarietà del funzionale \mathcal{F} in \mathbf{u} è che le n funzioni (u_1, u_2, \dots, u_n) soddisfino il sistema di equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_k} \right) = \frac{\partial f}{\partial u_k} \quad u_k(a) = \alpha_k, \quad u_k(b) = \beta_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) . \quad (18.8)$$

(ii) Come visto considerando le equazioni di Lagrange, se non si ha dipendenza esplicita dalla variabile indipendente x , se cioè $f = f(\mathbf{u}(x), \mathbf{u}'(x))$, dalle equazioni (18.8) segue l'esistenza dell'integrale primo

$$J = \text{costante} : \quad J := \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u'_k} \right) u'_k - f ; \quad (18.9)$$

si ha infatti

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dx} &= \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_k} \right) u'_k + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u'_k} \right) u''_k - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} \right) u'_k - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u'_k} \right) u''_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_k} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} \right) \right) u'_k \stackrel{(18.8)}{=} 0 . \end{aligned}$$

L'esistenza di tale integrale primo è particolarmente utile nel caso $n = 1$, in quanto consente di risolvere il problema di stazionarietà utilizzando la sola equazione $J = \text{costante}$. \diamond

Formulazione variazionale delle equazioni di Lagrange.

Come diretta applicazione del teorema ora dimostrato, consideriamo un sistema meccanico con n gradi di libertà, nelle ipotesi in cui valgano le equazioni di Lagrange in forma conservativa. Usando le notazioni tipiche della meccanica, il parametro indipendente è ora il tempo t , e la derivata $f' = f'(t)$ di una generica funzione rispetto al tempo t è indicata con $\dot{f} = \dot{f}(t)$; le funzioni di confronto sono i movimenti $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$, con velocità $\dot{\mathbf{q}}(t)$.

Il moto del sistema, soluzione delle equazioni di Lagrange, può allora essere caratterizzato attraverso la stazionarietà di un opportuno funzionale. Se \mathcal{Q} è lo spazio di configurazione del sistema, consideriamo come funzioni di confronto i moti $\mathbf{q}(t) = \{q_k(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) con estremi fissi, cioè il sottoinsieme $\mathcal{D} \subset \mathcal{Q}$ definito da

$$\mathcal{D} = \{ \mathbf{q} : [t_0, t_1] \mapsto \mathbf{R}^n \mid \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1 \} ;$$

sia inoltre $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{Q}$ lo spazio vettoriale dei moti variati, che indichiamo con $\delta\mathbf{q}(t)$, con condizioni iniziali e finali omogenee:

$$\mathcal{D}_0 = \{ \delta\mathbf{q} : [t_0, t_1] \mapsto \mathbf{R}^n \mid \delta\mathbf{q}(t_0) = 0, \delta\mathbf{q}(t_1) = 0 \} .$$

Introduciamo il funzionale (detto *azione Hamiltoniana*)

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) := \int_a^b L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt \quad (18.10)$$

che è della forma generale (18.7) con f data dalla funzione di Lagrange del sistema; per $\mathcal{S}(\mathbf{q})$ si ha

$$\mathcal{S}(\mathbf{q} + \epsilon \delta\mathbf{q}) - \mathcal{S}(\mathbf{q}) = \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k(t) dt + O(\epsilon^2) ,$$

e la variazione prima è data da

$$\delta\mathcal{S}(\mathbf{q}; \delta\mathbf{q}) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k(t) dt .$$

Il teorema precedentemente dimostrato può allora essere riformulato, con terminologia più meccanica, nella forma seguente:

18.3 Principio di Hamilton. *Il moto naturale del sistema, soluzione delle equazioni di Lagrange, caratterizza la stazionarietà dell'azione Hamiltoniana $\mathcal{S}(\mathbf{q})$, rispetto ai moti con configurazioni fissate agli istanti iniziale e finale:*

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) \text{ stazionario} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} .$$

Il principio di Hamilton afferma quindi che le soluzioni delle equazioni di Lagrange caratterizzano la stazionarietà del funzionale (18.10) rispetto ai moti possibili da una assegnata *configurazione iniziale* $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ ad una assegnata *configurazione finale* $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$; le variazioni $\delta\mathbf{q}$ sono quindi arbitrarie per $t_0 < t < t_1$ e sono soggette al vincolo (configurazioni iniziali e finali fissate)

$$\delta\mathbf{q}(t_0) = 0, \quad \delta\mathbf{q}(t_1) = 0 . \quad (18.11)$$

Formulazione variazionale delle equazioni di Hamilton.

Al pari delle equazioni di Lagrange, anche le equazioni di Hamilton si possono dedurre come condizioni di stazionarietà di un opportuno funzionale. Consideriamo, a questo fine, i moti possibili del sistema rispetto al moto naturale (cioè soluzione delle equazioni di Hamilton) da una assegnata configurazione iniziale ad una assegnata configurazione finale: imponiamo quindi alle variazioni $\delta\mathbf{q}$ le precedenti condizioni di vincolo (18.11), mentre *non poniamo alcun vincolo sulle variazioni $\delta\mathbf{p}$* .

Le funzioni di confronto sono quindi il sottoinsieme $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ dello spazio delle fasi definito da

$$\mathcal{D} = \{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) : [t_0, t_1] \mapsto \mathbf{R}^{2n} \mid \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1 \} ;$$

sia inoltre $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{P}$ lo spazio vettoriale dei moti variati, che indichiamo con $(\delta\mathbf{q}(t), \delta\mathbf{p}(t))$, con condizioni iniziali e finali omogenee per $\delta\mathbf{q}$:

$$\mathcal{D}_0 = \{ (\delta\mathbf{q}, \delta\mathbf{p}) : [t_0, t_1] \mapsto \mathbf{R}^n \mid \delta\mathbf{q}(t_0) = 0, \delta\mathbf{q}(t_1) = 0 \} .$$

Introduciamo ora il funzionale

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)) dt .$$

Si dimostra il seguente risultato.

18.4 Principio di Hamilton modificato. *Il moto naturale del sistema, soluzione delle equazioni di Hamilton, caratterizza la stazionarietà del funzionale $\mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, rispetto ai moti con configurazioni iniziali e finali assegnate*

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \text{ stazionario} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} .$$

Dimostrazione. La variazione del funzionale è data da

$$\delta\mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \delta\mathbf{q}, \delta\mathbf{p}) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p} \cdot \delta\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta\mathbf{q} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{p} \right) dt ;$$

tenendo presente che $\delta\dot{\mathbf{q}} = d/dt(\delta\mathbf{q})$, ed integrando per parti con le condizioni al contorno (18.11), si ottiene allora che

$$\delta\mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \delta\mathbf{q}, \delta\mathbf{p}) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) \cdot \delta\mathbf{p} dt - \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) \cdot \delta\mathbf{q} dt ,$$

per cui il risultato segue dall'arbitrarietà di $\delta\mathbf{q}$ e $\delta\mathbf{p}$ ⁽¹⁶⁾. □

Altri esempi di formulazione variazionale di problemi fisici.

Presentiamo schematicamente tre ulteriori applicazioni di classiche formulazioni variazionali di problemi fisici.

Brachistocrona. Un punto materiale P , di massa m , cade in un piano verticale $(O; x, y)$, con y verticale verso il basso, lungo una linea di equazione cartesiana $y = y(x)$, dal punto $O = (0, 0)$ sino al punto $A = (a, b)$; inizialmente P ha velocità di modulo v_0 .

Si vuole determinare l'equazione cartesiana $y = y(x)$ della curva γ per cui *il tempo di percorrenza da O ad A sia minimo*.

Dall'equazione di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} m v^2 - mgy = \frac{1}{2} m v_0^2$$

segue che $v = \sqrt{v_0^2 + 2gy}$, e quindi

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}} dx \quad (ds = \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}) ;$$

il tempo di percorrenza lungo γ è allora dato dal funzionale

$$\mathcal{T}(\gamma) = \int_{\gamma} dt = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}} dx .$$

Il funzionale ha (con ovvi cambiamenti di notazione) la forma generale (18.2) con

$$f(y, y', x) = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}} ;$$

¹⁶Più direttamente, osserviamo che il funzionale $\mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ è della forma generale (18.7) con

$$\mathbf{u} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , \quad f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) ;$$

le equazioni di Eulero-Lagrange del funzionale sono allora

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{p}} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \quad \Rightarrow \quad 0 = \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} .$$

poichè in realtà f non dipende esplicitamente da x , la curva γ è determinabile (anzichè dalla (18.6)) direttamente dall'integrale primo

$$J = \text{costante} : \quad J = \frac{\partial f}{\partial y'} y' - f \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}} = \frac{1}{c}$$

con c costante arbitraria. Si ha così l'equazione differenziale (a variabili separabili)

$$y'^2 = \frac{c^2}{v_0^2 + 2gy} - 1 \quad (18.12)$$

nella funzione incognita $y = y(x)$; si dimostra che la soluzione $y = y(x)$ di tale equazione rappresenta un tratto di *cicloide* tra O ed A .

Indichiamo brevemente il procedimento: cerchiamo la soluzione delle (18.12) nella forma parametrica

$$x = x(u) = \mu + \beta(u - \sin u), \quad y = y(u) = \alpha + \beta \cos u$$

con α , β e μ opportuni; essendo $dx/du = \beta(1 - \cos u)$, $dy/du = -\beta \sin u$, segue che $y'(x) = -\sin u/(1 - \cos u)$; sostituendo y e y' nell'equazione differenziale (18.12) ed imponendo che sia soddisfatta identicamente per ogni u otteniamo per α e β le espressioni

$$\alpha = \frac{c^2}{4g} - \frac{v_0^2}{2g}, \quad \beta = -\frac{c^2}{4g}$$

mentre μ e c sono indeterminati. Si ha così che la soluzione generale è data dalla curva di equazioni parametriche

$$x = \mu - \frac{c^2}{4g}(u - \sin u) \quad y = -\frac{v_0^2}{4g} + \frac{c^2}{4g}(1 - \cos u).$$

Le costanti c , μ ed i valori u_0 , u_1 del parametro u corrispondenti ai punti O ed A si determinano infine imponendo il passaggio per O ed A , cioè dal sistema delle quattro condizioni

$$\begin{aligned} \mu - \frac{c^2}{4g}(u_0 - \sin u_0) &= 0, & -\frac{v_0^2}{4g} + \frac{c^2}{4g}(1 - \cos u_0) &= 0, \\ \mu - \frac{c^2}{4g}(u_1 - \sin u_1) &= a, & -\frac{v_0^2}{4g} + \frac{c^2}{4g}(1 - \cos u_1) &= b. \end{aligned}$$

Catenaria omogenea.

Consideriamo un filo omogeneo pesante, di peso specifico p e lunghezza costante ℓ , in equilibrio in un piano verticale ($O; x, y$), con y verticale volto verso l'alto. Supponiamo che il filo abbia estremi fissi posti alla stessa quota e a distanza $2a$ (è quindi $\ell > 2a$); senza perdita di generalità assumiamo allora $A = (-a, 0)$ e $B = (a, 0)$.

Vogliamo determinare la curva γ , nella forma cartesiana $y = y(x)$, secondo cui si dispone il filo in equilibrio.

Essendo il peso una forza posizionale e conservativa, per il teorema della stazionarietà del potenziale la configurazione di equilibrio rende stazionario il potenziale del peso, rispetto a tutte

le configurazioni che rispettano il vincolo che la lunghezza ℓ è costante; essendo U e ℓ dati rispettivamente da

$$U = - \int_{\gamma} p y ds = - \int_{-a}^a p y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \ell = \int_{\gamma} ds = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx$$

possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e studiare la stazionarietà del funzionale

$$\mathcal{F}(y) = - \int_{-a}^a p y \sqrt{1 + y'^2} dx + \lambda \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \Rightarrow \quad f(y, y', x) = (\lambda - p y) \sqrt{1 + y'^2}$$

dove λ (moltiplicatore di Lagrange) è una costante incognita.

Anche in questo caso, f non dipende esplicitamente dalla variabile indipendente x , per cui possiamo utilizzare l'esistenza dell'integrale primo

$$J = \text{costante} : \quad J = \frac{\partial f}{\partial y'} y' - f \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda - p y}{\sqrt{1 + y'^2}} = \beta$$

con β costante arbitraria. Esplicitando rispetto a y' si ottiene allora l'equazione differenziale

$$y'^2 = \frac{1}{\beta^2} (\lambda - p y)^2 - 1 ; \quad (18.13)$$

si tratta di un'equazione a variabili separabili, la cui soluzione generale (*catenaria omogenea*) è

$$y(x) = \frac{\lambda}{p} + \frac{\beta}{p} \cosh\left(\frac{p x}{\beta} + c\right) .$$

Nell'esempio ora considerato, le costanti λ e c si determinano in funzione della costante β imponendo le condizioni al contorno $y(-a) = 0$, $y(a) = 0$, cioè il passaggio della catenaria per A e B ; abbiamo così $c = 0$ e $\lambda = -\beta \cosh(pa/\beta)$, per cui la configurazione del filo è data da

$$y(x) = \frac{\beta}{p} \left(\cosh\left(\frac{p x}{\beta}\right) - \cosh\left(\frac{p a}{\beta}\right) \right) :$$

se supponiamo che il filo sia appeso, la condizione $y(x) \leq 0$ per $-a \leq x \leq a$ implica che sia $\beta > 0$, se viceversa abbiamo un arco compresso con $y(x) \geq 0$ allora deve essere $\beta < 0$.

La costante β si ottiene infine imponendo la condizione che la lunghezza del filo è assegnata: $\ell = \int_0^\ell ds = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx$, da cui segue l'equazione trascendente in β

$$\ell = (2\beta/p) \sinh(pa/\beta) ;$$

tenendo presente la condizione $\ell > 2a$, si dimostra che tale equazione ha una sola soluzione (sia per β positivo che per β negativo).

Principio di Fermat.

Nell'approssimazione dell'ottica geometrica, consideriamo la propagazione di un raggio luminoso in un mezzo materiale di *indice di rifrazione* n , da un punto A ad un punto B , lungo una curva γ . Come noto, se c è la velocità di propagazione nel vuoto, la velocità v di propagazione nel mezzo è $v = c/n$; essendo $dt = ds/v = (n/c)ds$ il tempo impiegato dal raggio per percorrere un tratto ds di curva, il tempo di percorrenza tra A e B lungo la curva γ è dato dal funzionale

$$\mathcal{T}(\gamma) = \frac{1}{c} \int_{\gamma} n ds . \quad (18.14)$$

Il principio di Fermat afferma che *la propagazione del raggio luminoso tra A e B avviene lungo quella curva γ per cui il tempo \mathcal{T} è minimo.*

Le leggi dell'ottica geometrica sono quindi in linea di principio deducibili dal principio di stazionarietà

$$\delta\mathcal{T}(\gamma; \delta\gamma) = 0 . \quad (18.15)$$

Ad esempio:

(i) se il mezzo ha indice di rifrazione costante, le (18.14) e (18.15) implicano il minimo della lunghezza, per cui si ha propagazione lungo rette;

(ii) se il raggio si propaga in un mezzo omogeneo (indice di rifrazione costante), riflettendosi su una superficie piana, dalla (18.15) segue la nota legge dell'uguaglianza dell'angolo di incidenza i e di riflessione r ;

(iii) se il raggio si propaga passando da un mezzo omogeneo di indice di rifrazione costante n_1 ad un mezzo omogeneo di indice di rifrazione n_2 , dalla (18.15) segue la legge di Snell: $n_1 \sin i = n_2 \sin r$, essendo i e r gli angoli di incidenza e rifrazione.

(iv) in generale, se $n = n(x, y)$ è l'indice di rifrazione in un mezzo piano non omogeneo, il raggio segue una traiettoria di equazione cartesiana $y = y(x)$, soluzione dell'equazione differenziale

$$n(x, y) y''(x) = (1 + y'^2(x)) \left(\frac{\partial n}{\partial y} - y'(x) \frac{\partial n}{\partial x} \right) .$$

Tale equazione può essere scritta in modo più intrinseco nella forma

$$n K = |\text{grad } n \wedge \mathbf{t}|$$

essendo K la curvatura della curva $y = y(x)$ e \mathbf{t} il versore tangente della curva stessa. Da questa scrittura riotteniamo il risultato (i), corrispondente alla soluzione particolare $K = 0$, $n = \text{costante}$; abbiamo inoltre la soluzione $K = 0$ e \mathbf{t} parallelo a $\text{grad } n$: in un mezzo "stratificato" (in cui l'indice di rifrazione ha direzione del gradiente costante) il raggio luminoso si propaga lungo direzioni parallele al gradiente.

19 Introduzione alla stabilità.

Generalità sui sistemi dinamici. L'analisi della stabilità del moto e dell'equilibrio si può effettuare utilizzando il modello di sistema dinamico. Come esempio introduttivo, consideriamo un sistema olonomo con n gradi di libertà, per il quale si possano scrivere le equazioni di Lagrange in forma conservativa; sotto ipotesi del tutto generali, la Lagrangiana assume la forma ⁽¹⁷⁾

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathcal{T}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + c(\mathbf{q}, t) . \quad (19.1)$$

Evidenziando i termini con le derivate seconde $\ddot{\mathbf{q}}$, le equazioni di Lagrange si possono allora scrivere come sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine

$$\mathcal{T}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) . \quad (19.2)$$

Essendo \mathcal{T} invertibile, tali equazioni si possono porre in forma normale, e quindi scrivere anche come sistema di $2n$ equazioni del primo ordine in forma normale, ad esempio introducendo, accanto alle n variabili \mathbf{q} , n nuove variabili $\mathbf{p} := \dot{\mathbf{q}}$; si ha allora

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = \mathcal{T}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{cases} \quad (19.3)$$

Generalizzando l'esempio del caso lagrangiano, si definisce *sistema dinamico* un sistema di m equazioni differenziali del primo ordine in forma normale nell'incognita $\mathbf{x} \in \mathcal{S}^m$, con \mathcal{S}^m varietà m -dimensionale (nel caso lagrangiano, $m = 2n$)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) . \quad (19.4)$$

Il sistema dinamico è *autonomo* se $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ (questo fatto si verifica ad esempio per un sistema lagrangiano con vincoli fissi). Per un sistema autonomo, *punto critico* (o punto di equilibrio con linguaggio meccanico) è ogni soluzione $\bar{\mathbf{x}}$ dell'equazione $\mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Geometricamente, possiamo quindi rappresentare lo stato del sistema come un punto \mathbf{x} in una varietà m -dimensionale \mathcal{S}^m , detta lo *spazio degli stati* (o delle fasi) del sistema. Ad esempio, nel caso lagrangiano considerato prima le equazioni di Lagrange (19.3) corrispondono al sistema dinamico (19.4) con

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathcal{T}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{pmatrix} .$$

Sempre nel caso lagrangiano, introdotto un piano cartesiano in cui sull'asse delle ascisse rappresentiamo \mathbf{q} e sull'asse delle ordinate $\dot{\mathbf{q}}$ (ovviamente, tale rappresentazione è realistica solo per

¹⁷Data una matrice \mathcal{M} di tipo $n \times n$ ed un vettore \mathbf{v} in uno spazio vettoriale n -dimensionale, indichiamo con $\mathcal{M}\mathbf{v}$ il vettore ottenuto applicando \mathcal{M} a \mathbf{v} , di componenti $(\mathcal{M}\mathbf{v})_k := \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_{ki} v_i$; per ogni coppia di vettori \mathbf{v} , \mathbf{w} è allora

$$\mathbf{w} \cdot \mathcal{M}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n w_i (\mathcal{M}v)_i = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{M}_{ij} w_i v_j ;$$

in particolare, se \mathcal{M} è simmetrica, si ha $\mathbf{w} \cdot \mathcal{M}\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathcal{M}\mathbf{w}$.

$n = 1$, mentre per sistemi con più di un grado di libertà aiuta solo l'intuizione), possiamo vedere l'evoluzione del sistema come una curva $\mathbf{x}(t)$ nel piano, mentre le eventuali configurazioni di equilibrio $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{q}}, 0)$ sono date da punti sull'asse delle ascisse.

Stabilità secondo Liapunov. Ricordiamo che, sotto ipotesi sufficientemente generali, il problema di Cauchy

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

ha una ed una sola soluzione, dipendente con continuità dai dati iniziali,

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$$

in un intervallo $[t_0, T)$. Nel seguito *supporremo invece che la soluzione esista globalmente*, cioè per ogni $t \geq t_0$.

Grossolanamente, il problema della stabilità di una particolare soluzione $\bar{\mathbf{x}}$ (con linguaggio meccanico, il problema della stabilità del moto) corrispondente ad un dato iniziale $\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0$ è il problema di determinare il comportamento delle soluzioni del sistema dinamico corrispondenti a dati iniziali vicini a $\bar{\mathbf{x}}_0$, per ogni tempo $t \geq t_0$: ci si chiede cioè se, partendo “vicini”, gli stati del sistema rimangono “vicini” per ogni tempo.

Per precisare quantitativamente la nozione di vicinanza tra due stati \mathbf{x} e \mathbf{x}' , introduciamo la **norma** $\| \cdot \|$ dello stato

$$\|\mathbf{x}\| := \max_{1 \leq k \leq m} |x_k| \quad (19.5)$$

e la **distanza** $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ tra due stati \mathbf{x} e \mathbf{x}'

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \max_{1 \leq k \leq m} |x_k - x'_k|. \quad (19.6)$$

Un intorno $\mathcal{B}_\varrho(\mathbf{x}_0)$ di \mathbf{x}_0 di raggio ϱ è l'insieme degli stati \mathbf{x} con $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \varrho$.

Osservazione. Come noto, questa non è l'unica definizione di norma possibile, ma per spazi finito-dimensionali si possono introdurre differenti norme tra loro equivalenti (cioè, se d e \tilde{d} sono le distanze associate a due norme, è sempre possibile determinare due costanti positive α e β tali che $\alpha d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \leq \tilde{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \leq \beta d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$). Ad esempio, una seconda norma è quella euclidea

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}. \quad (19.7)$$

Per $m = 2$, $\mathcal{B}_\varrho(\mathbf{x}_0)$ è, nello spazio degli stati \mathcal{S}^2 , un quadrato di centro \mathbf{x}_0 e lato 2ϱ utilizzando la norma (19.5), mentre è un disco con lo stesso centro e raggio ϱ utilizzando la norma euclidea (19.7): la generalizzazione a dimensioni maggiori è ovvia. \diamond

Seguendo l'impostazione al problema della stabilità data da Liapunov, possiamo ora dare la seguente definizione di stabilità di una generica soluzione.

19.1 Definizione. La soluzione di (19.4) con dato iniziale \mathbf{x}_0 è stabile se per ogni $\epsilon > 0$ è possibile determinare $\delta_\epsilon = \delta(\epsilon, t_0)$ tale che ogni soluzione $\mathbf{x}'(t)$, con condizione iniziale $\mathbf{x}'_0 \in \mathcal{B}_{\delta_\epsilon}(\mathbf{x}_0)$, si ha $\mathbf{x}'(t) \in \mathcal{B}_\epsilon(\mathbf{x}(t))$ per $t \geq t_0$.

La soluzione $\mathbf{x}(t)$ di (19.4) è asintoticamente stabile se è stabile e se $d(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t)) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

Una soluzione $\mathbf{x}(t)$ non stabile è instabile.

Evidentemente, la definizione di stabilità ora introdotta è nella maggior parte dei casi poco operativa, poiché richiede l'integrazione completa delle equazioni di moto (possibile in pochi casi), anche quando si voglia analizzare la stabilità di punti critici (configurazioni di equilibrio). Per questo sorge l'esigenza di avere dei criteri che consentano, eventualmente sotto ipotesi restrittive, di dare risposta al problema della stabilità senza dover risolvere completamente il problema del moto.

Accenniamo qui a due tecniche, chiamate *il primo ed il secondo metodo di Liapunov*, che forniscono delle condizioni sufficienti per determinare la stabilità o l'instabilità delle soluzioni di un sistema dinamico, in particolare dei suoi punti critici.

Il primo metodo si basa sulla linearizzazione delle equazioni (19.4) nell'intorno della soluzione che si intende analizzare, e consente di ottenere informazioni sulla stabilità di soluzioni del sistema non lineare dall'analisi del sistema linearizzato; il secondo metodo (che vale per sistemi dinamici autonomi) è invece basato sulla determinazione di una funzione con particolari proprietà di evoluzione durante il moto del sistema.

Primo metodo di Liapunov. Sia dato il sistema del primo ordine della forma (19.4), che ammette una soluzione $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(t)$, con $\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0$. Sia inoltre $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ la soluzione del sistema corrispondente al dato iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Introducendo per comodità la variabile

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) := \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (19.8)$$

abbiamo allora

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) + \boldsymbol{\epsilon}(t)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\epsilon}, t) - \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, t) \\ \Rightarrow \dot{\epsilon}_i &= \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right|_{x_k = \bar{x}_k} \epsilon_k + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

dove ... indicano termini di ordine ≥ 2 in $\|\boldsymbol{\epsilon}\|$. Introducendo la matrice Jacobiana \mathcal{J} del campo \mathbf{X} , di componenti

$$\mathcal{J}_{ik} := \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right|_{x_k = \bar{x}_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

si ha così il *sistema linearizzato* associato al sistema (19.4)

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathcal{J} \boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{ovvero} \quad \dot{\epsilon}_i = \sum_{k=1}^n \mathcal{J}_{ik} \epsilon_k \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (19.9)$$

con dato iniziale $\boldsymbol{\epsilon}_0 = \mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0$, costituito da n equazioni differenziali lineari del primo ordine, omogenee. Alla soluzione $\bar{\mathbf{x}}(t)$ di (19.4) corrisponde la soluzione $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(t) = 0$ di (19.9).

Supporremo d'ora in poi che la matrice Jacobiana sia costante: tale ipotesi è sicuramente soddisfatta se il sistema è autonomo e si considerano i suoi punti critici $\bar{\mathbf{x}}$, soluzioni dell'equazione $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = 0$ (ma può essere verificata anche nel caso di sistemi non autonomi): il sistema linearizzato è quindi un sistema del primo ordine, lineare e a coefficienti costanti. Sussiste allora il seguente risultato (di cui non diamo la dimostrazione).

19.2 Teorema (Liapunov). Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori della matrice Jacobiana \mathcal{J} , soluzioni dell'equazione (algebraica di grado n)

$$\det(\mathcal{J} - \lambda I) = 0. \quad (19.10)$$

Allora:

(i) Se gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa: $Re(\lambda_k) < 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), la soluzione $\bar{\mathbf{x}}$ del sistema non lineare (19.4) è asintoticamente stabile.

(ii) Se almeno un autovalore $\bar{\lambda}$ ha $Re(\bar{\lambda}) > 0$, la soluzione $\bar{\mathbf{x}}$ del sistema non lineare (19.4) è instabile.

(iii) Se $Re(\lambda_k) \leq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), la soluzione $\bar{\mathbf{e}} = 0$ del sistema linearizzato (19.9) è stabile, ma non si può dire nulla sulla stabilità o instabilità della soluzione $\bar{\mathbf{x}}$ del sistema non lineare (19.4).

Secondo metodo di Liapunov. Dato il sistema dinamico autonomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$, che ammette un punto critico $\bar{\mathbf{x}}$, sia $H = H(\mathbf{x})$ una funzione definita sullo spazio degli stati; senza perdita di generalità, supponiamo poi che $H(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

La derivata totale di H rispetto al tempo (detta anche la derivata lungo il flusso del campo vettoriale \mathbf{X}) è definita da

$$\frac{dH}{dt} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_k} \dot{x}_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_k} X_k(\mathbf{x}) \quad (19.11)$$

ed è quindi anch'essa una funzione definita sullo spazio degli stati.

Diamo la seguente definizione.

19.3 Definizione. Una funzione $H = H(\mathbf{x})$ definita sullo spazio degli stati, con $H(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, è una funzione di Liapunov del sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ se esiste un intorno $\mathcal{B}(\bar{\mathbf{x}})$ tale che:

(i) $H \in C^1(\mathcal{B}(\bar{\mathbf{x}}))$;

(ii) H ha in $\bar{\mathbf{x}}$ un minimo locale isolato (cioè, $H(\mathbf{x}) > 0$ per $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbf{x}})$, $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$);

(iii) per $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbf{x}})$ la derivata lungo il flusso è non positiva: $dH/dt \leq 0$.

Vale allora il seguente risultato.

19.4 Teorema (Liapunov). Sia $\bar{\mathbf{x}}$ un punto critico del sistema dinamico autonomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$; se il sistema ammette una funzione di Liapunov H , il punto critico $\bar{\mathbf{x}}$ è stabile.

Se la funzione H è strettamente decrescente lungo il flusso: $dH/dt < 0$, il punto critico $\bar{\mathbf{x}}$ è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Dimostriamo solo la parte del teorema concernente la stabilità. Per semplicità di notazione, assumiamo nella dimostrazione che il punto critico sia l'origine nello spazio degli stati: $\bar{\mathbf{x}} = 0$. Come detto, assumiamo inoltre senza perdita di generalità che nel punto critico $\bar{\mathbf{x}} = 0$ sia $H(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Sia $\mathcal{B}_h = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < h\}$ l'intorno dell'origine in cui H è, per ipotesi, di classe C^1 e con un minimo isolato in $\bar{\mathbf{x}} = 0$. Fissato allora arbitrariamente ϵ , con $0 < \epsilon < h$, sia $\mathcal{B}_\epsilon = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < \epsilon\}$ e sia $m_\epsilon > 0$ il minimo di H sulla frontiera di \mathcal{B}_ϵ . Poichè H ha un minimo isolato nell'origine ed

è continua, fissato arbitrariamente $k < m_\epsilon$ si può trovare δ_ϵ con $0 < \delta_\epsilon < \epsilon$ tale che $H(\mathbf{x}) < k$ per $\|\mathbf{x}\| < \delta_\epsilon$: sia $\mathcal{B}_{\delta_\epsilon}$ tale intorno dell'origine.

Consideriamo ora una generica condizione iniziale $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}_{\delta_\epsilon}$, da cui segue che $H(\mathbf{x}_0) < k$; poichè per l'ipotesi (iii) H non cresce lungo il flusso, per ogni $t \geq t_0$ è allora $H(\mathbf{x}) < k$; questo fatto ci permette di concludere che per ogni t si ha $\|\mathbf{x}(t)\| \in \mathcal{B}_\epsilon$: se infatti ad un istante t' fosse $\|\mathbf{x}(t')\| > \epsilon$, dovrebbe per la continuità del flusso esistere un tempo $t'' < t'$ in cui $\mathbf{x}(t'')$ è sulla frontiera di \mathcal{B}_ϵ , ma allora si avrebbe $H(\mathbf{x}(t'')) \geq m_\epsilon > k$.

In conclusione, per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni condizione iniziale $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}_{\delta_\epsilon}$ si ha $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}_\epsilon$ per ogni $t \geq t_0$, e quindi $\bar{\mathbf{x}} = 0$ è un punto critico stabile secondo la definizione di Liapunov. \square

Esempi. Diamo ora alcuni esempi di applicazione dei due metodi di Liapunov.

Esempio I. Oscillatore smorzato non lineare.

Consideriamo un oscillatore con smorzamento non lineare, di equazione

$$m \ddot{x} = -Kx - h \dot{x}^{2p+1} \quad (K, h > 0, p \geq 1) \quad (19.12)$$

corrispondente ad una forzante $F(\dot{x}) = -h \dot{x}^{2p+1}$, di tipo dissipativo e non lineare nella velocità; la posizione di equilibrio è $\bar{x} = 0$. Senza passare alla formulazione come sistema dinamico, si vede direttamente che l'equazione linearizzata attorno a $\bar{x} = 0$ è data da

$$m \ddot{x} = -Kx,$$

per cui gli autovalori sono immaginari: $\lambda = \pm i\sqrt{K/m}$: il primo metodo di Liapunov non consente quindi di trarre conclusioni sulla stabilità del punto di equilibrio.

Applichiamo il secondo metodo, considerando la funzione

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \quad (19.13)$$

(tale funzione rappresenta l'energia meccanica dell'oscillatore lineare non smorzato). Si verifica che H è effettivamente una funzione di Liapunov del sistema; è infatti

$$H(0, 0) = 0, \quad H(x, \dot{x}) > 0 \quad \text{per } x \neq 0, \dot{x} \neq 0$$

ed inoltre la derivata lungo il flusso è strettamente negativa, essendo

$$\frac{dH}{dt} \stackrel{(19.13)}{=} m \dot{x} \ddot{x} + Kx \dot{x} = \dot{x} (m \ddot{x} + Kx) \stackrel{(19.12)}{=} \dot{x} (-h \dot{x}^{2p+1}) = -h \dot{x}^{2p+2} < 0.$$

Pertanto, per il secondo metodo di Liapunov, il punto di equilibrio è stabile, anzi asintoticamente stabile.

Osservazione. Se nell'esempio ora analizzato consideriamo la forzante $F(\dot{x}) = h \dot{x}^{2p+1}$ (che rappresenta formalmente una forza *repulsiva* dipendente in modo non lineare dalla velocità), con considerazioni del tutto simili alle precedenti deduciamo che la funzione H data dalla (19.13) ha derivata temporale strettamente positiva: $dH/dt = h \dot{x}^{2p+2} > 0$; la funzione H (inizialmente positiva per ogni dato iniziale nell'intorno dello stato di equilibrio $(0, 0)$) cresce quindi indefinitamente per $t > 0$, e questo è sufficiente per concludere che il punto di equilibrio è instabile; in caso contrario, se cioè fosse $|x(t)| < \epsilon$, $|\dot{x}(t)| < \epsilon$ per ogni dato iniziale $|x_0| < \delta_\epsilon$, $|\dot{x}_0| < \delta_\epsilon$, H dovrebbe rimanere limitata.

Come evidente dai due esempi ora considerati, l'oscillatore smorzato e l'oscillatore "repulsivo", il fatto che il punto critico sia un punto di equilibrio stabile per il sistema linearizzato non consente quindi di dedurre alcunché sul comportamento del sistema non lineare, per il quale il punto critico può essere di equilibrio stabile o instabile. \diamond

Esempio II. Rotazioni permanenti del corpo rigido con punto fisso.

Consideriamo le rotazioni permanenti di un corpo rigido attorno ad un punto fisso O ; si tratta di moti rotatori uniformi, cioè con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$. Il problema della loro determinazione si traduce nel problema di trovare le soluzioni costanti del sistema di equazioni di Eulero

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (A - C)pq = 0 \end{cases} \quad (19.14)$$

dove A, B, C sono i momenti principali d'inerzia rispetto al punto fisso O e p, q, r le componenti della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ sugli assi principali di inerzia. Tale sistema si scrive immediatamente come sistema dinamico autonomo nella forma

$$\begin{cases} \dot{p} = \alpha qr \\ \dot{q} = \beta rp \\ \dot{r} = \gamma pq \end{cases} \quad (19.15)$$

dove si è posto

$$\alpha := (B - C)/A, \quad \beta := (C - A)/B, \quad \gamma := (A - B)/C.$$

Le rotazioni permanenti sono allora le soluzioni costanti (punto critico) di tale sistema, e corrispondono alle soluzioni del sistema algebrico

$$\begin{cases} \alpha qr = 0 \\ \beta rp = 0 \\ \gamma pq = 0 \end{cases} \quad (19.16)$$

Come segue immediatamente dalle (19.16), si hanno i casi seguenti:

(i) $A = B = C$: essendo $\alpha = \beta = \gamma = 0$, il sistema è identicamente soddisfatto e quindi ogni punto $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ è critico; ogni velocità angolare iniziale si mantiene, per cui il moto è sempre rotatorio uniforme.

(ii) $A = B \neq C$: essendo $\gamma = 0, \alpha, \beta \neq 0$, sono punti critici i punti $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{p}, \bar{q}, 0)$ e $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0, \bar{r})$; sono quindi permanenti solo le rotazioni nel piano equatoriale: $\boldsymbol{\omega} = \bar{p}\mathbf{i} + \bar{q}\mathbf{j}$, e quelle lungo l'asse giroscopico del corpo: $\boldsymbol{\omega} = \bar{r}\mathbf{k}$.

(iii) $A \neq B \neq C$: essendo $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$, sono critici i punti $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{p}, 0, 0)$, $\bar{\mathbf{x}} = (0, \bar{q}, 0)$, $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0, \bar{r})$; in assenza di ogni simmetria materiale sono permanenti le rotazioni attorno ad un asse principale di inerzia, cioè $\boldsymbol{\omega} = \bar{p}\mathbf{i}$, oppure $\boldsymbol{\omega} = \bar{q}\mathbf{j}$, oppure $\boldsymbol{\omega} = \bar{r}\mathbf{k}$.

Venendo allo studio della stabilità di tali soluzioni, si dimostrano, o risolvendo direttamente le equazioni di moto (19.15) o applicando il primo ed il secondo metodo di Liapunov, i seguenti risultati.

- (i) $A = B = C$: ogni punto critico è stabile (segue direttamente dall'analisi diretta del moto).
- (ii) $A = B \neq C$: la rotazione nel piano equatoriale ($\bar{\mathbf{x}} = (\bar{p}, \bar{q}, 0)$) è instabile (si vede direttamente dall'analisi del moto), mentre quella attorno all'asse giroscopico ($\bar{\mathbf{x}} = (0, 0, \bar{r})$) è stabile (la stabilità è determinata con il secondo metodo di Liapunov, utilizzando la funzione H scritta sotto).
- (iii) $A \neq B \neq C$: supponendo senza perdita di generalità che sia $A < B < C$, risultano stabili le rotazioni $(\bar{p}, 0, 0)$ e $(0, 0, \bar{r})$ attorno agli assi x e z , cui corrispondono i momenti d'inerzia minimo e massimo, mentre risulta instabile la rotazione $(0, \bar{q}, 0)$ attorno all'asse *intermedio* y (la stabilità si prova con il secondo metodo di Liapunov con la funzione H scritta sotto, l'instabilità si determina con il primo metodo di Liapunov).

Come funzione di Liapunov, si può utilizzare la funzione $H(p, q, r) = (2T - 2\bar{T})^2 + (\Gamma_O^2 - \bar{\Gamma}_O^2)^2$, dove T e Γ_O sono l'energia cinetica e il modulo del momento delle quantità di moto (rispetto al punto fisso O), e \bar{T} e $\bar{\Gamma}$ sono le stesse quantità valutate in corrispondenza della rotazione permanente (cioè nel punto critico). \diamond

Esempio III. Equazione di Van der Pol.

Consideriamo l'oscillatore non lineare di equazione

$$\ddot{y} + y = a(1 - y^2)\dot{y} \quad (a > 0) ; \quad (19.17)$$

la (19.17) è l'equazione di Van der Pol, importante nella teoria dei circuiti non lineari.

Definendo $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$, la (19.17) corrisponde al sistema dinamico autonomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ a(1 - y^2)\dot{y} - y \end{pmatrix}$$

che ha come unico punto critico (di equilibrio) $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$.

Dalla forma del campo \mathbf{X} segue che la matrice Jacobiana è data da

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2ay\dot{y} - 1 & a(1 - y^2) \end{pmatrix},$$

e quindi corrisponde, valutata nel punto critico, alla matrice costante

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

L'equazione agli autovalori per \mathcal{J} ha soluzioni

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

da cui risulta che per ogni $a > 0$ entrambi gli autovalori (reali per $a \geq 2$, complessi per $a < 2$) hanno parte reale positiva: in base al primo metodo di Liapunov, concludiamo allora che il punto critico è instabile per ogni $a > 0$. \diamond

Esempio IV. Sistema di Lotka-Volterra.

Consideriamo il sistema dinamico dato da due equazioni non lineari

$$\begin{cases} \dot{u} = u(a - bv) \\ \dot{v} = v(du - c) \end{cases} \quad u, v \geq 0, \quad a, b, c, d > 0 \quad (19.18)$$

(in un ecosistema *preda-predatore*, u rappresenta la popolazione di prede, v la popolazione di predatori, i punti critici le popolazioni delle due specie all'equilibrio).

Definendo $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, la (19.18) corrisponde al sistema dinamico autonomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u(a - bv) \\ v(du - c) \end{pmatrix}$$

che ha due punti critici:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0), \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = (c/d, a/b).$$

Dalla forma del campo \mathbf{X} segue che la matrice Jacobiana è data da

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a - bv & -bu \\ dv & du - c \end{pmatrix}.$$

Analisi del punto critico $\bar{\mathbf{x}}_1$. Valutando $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ nel punto critico $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$, otteniamo la matrice costante

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = -c :$$

essendo per ipotesi $a > 0$, in base al primo metodo di Liapunov concludiamo allora che il punto critico $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$ è instabile.

Analisi del punto critico $\bar{\mathbf{x}}_2$. Valutando $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ nel punto critico $\bar{\mathbf{x}}_2 = (c/d, a/b)$, otteniamo la matrice costante

$$\mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -cb/d \\ ad/b & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = \mp \sqrt{-ac};$$

essendo per ipotesi $a, c > 0$, gli autovalori sono immaginari puri, e quindi con parte reale nulla: il primo metodo di Liapunov non consente allora conclusioni sulla stabilità o instabilità del punto critico $\bar{\mathbf{x}}_2$.

Possiamo analizzare questo caso con il secondo metodo di Liapunov; a questo fine, consideriamo la funzione

$$H(\mathbf{x}) := du + bv - c \log u - a \log v - a - c + c \log \frac{c}{d} + a \log \frac{a}{b}, \quad (19.19)$$

in cui i termini additivi costanti sono stati inseriti in modo che sia $H(\bar{\mathbf{x}}_2) = 0$. Tale funzione è una funzione di Liapunov per il sistema, poiché è ovviamente di classe C^1 e inoltre:

- (ii) H ha in $\bar{\mathbf{x}}_2$ un minimo isolato (dall'analisi della funzione $H(u, v)$ si deduce infatti che in $\bar{\mathbf{x}}_2$ è $H_u = 0, H_v = 0, \det H > 0, H_{uu} > 0$) ;
 (iii) H è una costante del moto per il sistema dinamico, essendo

$$\frac{dH}{dt} = H_u \dot{u} + H_v \dot{v} \stackrel{(19.18)}{=} \left(d - \frac{c}{u}\right)(au - buv) + \left(b - \frac{a}{v}\right)(duv - cv) = 0 .$$

Il secondo metodo di Liapunov ci assicura quindi che il punto critico $\bar{\mathbf{x}}_2$ è un punto critico stabile⁽¹⁸⁾. \diamond

Esempio V. Stabilità del moto.

Diamo infine un esempio di applicazione del primo metodo di Liapunov allo studio della stabilità del moto. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali nelle variabili y, z dato dalle due equazioni non lineari

$$\begin{cases} \ddot{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}, \\ \dot{y} = \frac{1}{z} \end{cases} \quad (19.20)$$

ed il problema di Cauchy corrispondente alle condizioni iniziali

$$z(0) = -1, \quad \dot{z}(0) = 0, \quad y(0) = y_0 .$$

Come è immediato verificare, la soluzione è data da

$$\begin{cases} z(t) = -1 \\ y(t) = y_0 - t . \end{cases} \quad (19.21)$$

Per analizzare la stabilità di questa soluzione con il primo metodo di Liapunov, scriviamo la (19.20) come sistema del primo ordine; introducendo la variabile $p = \dot{z}$, il sistema (19.20) si può porre nella forma di sistema dinamico in tre variabili, con

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} z \\ p \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} p \\ 1/z + 1/z^2 \\ 1/z \end{pmatrix}; \quad (19.22)$$

la soluzione di cui vogliamo discutere la stabilità è

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ y_0 - t \end{pmatrix}. \quad (19.23)$$

Dalla forma (19.22) del campo \mathbf{X} segue che la matrice Jacobiana

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/z^2 - 2/z^3 & 0 & 0 \\ -1/z^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

¹⁸Se si considerano le equazioni per il moto linearizzato attorno a questo punto critico, ponendo $u = c/d + \epsilon, v = a/b + \eta$, otteniamo dal sistema (19.18) il sistema linearizzato $\dot{\epsilon} = -(bc/d)\eta, \dot{\eta} = (ad/b)\epsilon$, da cui segue che $\ddot{\epsilon} + ac\epsilon = 0, \ddot{\eta} + ac\eta = 0$: ϵ ed η sono quindi soluzioni dell'equazione dell'oscillatore armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{ac}$.

valutata in corrispondenza della soluzione $\bar{\mathbf{x}}(t)$, è costante

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori di \mathcal{J} sono $-1, 0, 1$; l'esistenza di un autovalore positivo consente quindi di concludere che la soluzione (19.23), e quindi la (19.21), è instabile (¹⁹). \diamond

¹⁹L'instabilità della soluzione è in questo caso intuibile considerando il sistema linearizzato associato alla (19.20): ponendo $z = -1 + \epsilon$ e $y = y_0 - t + \eta$ si ha

$$\ddot{\epsilon} = \epsilon, \quad \dot{\eta} = -\epsilon \tag{19.24}$$

per cui $\epsilon(t)$, soluzione della prima equazione, cresce esponenzialmente nel tempo.

20 Stabilità dell'equilibrio di sistemi olonomi.

Vogliamo applicare l'analisi precedentemente introdotta al caso di configurazioni di equilibrio di un sistema olonomo con n gradi di libertà. Come già detto, scelta una n -pla di coordinate libere, lo stato del sistema è individuato dalla configurazione $\mathbf{q} := (q_1, \dots, q_n)$ e dall'atto di moto $\dot{\mathbf{q}} := (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, e si può quindi rappresentare come un punto \mathbf{x} in una varietà $2n$ -dimensionale \mathcal{S}^{2n} , detta lo *spazio degli stati*

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{S}^{2n}. \quad (20.1)$$

Da questo punto di vista, una configurazione di equilibrio $\{\bar{\mathbf{q}}\}$ è quindi un punto critico $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{q}}, 0)$ di un sistema dinamico autonomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$. L'idea intuitiva di equilibrio stabile (partendo vicino all'equilibrio, con piccole velocità, il sistema si muove rimanendo vicino all'equilibrio, con velocità piccole) può precisarsi dicendo che una configurazione di equilibrio è stabile se, fissato un suo intorno \mathcal{B}_ϵ , è possibile determinare un secondo intorno $\mathcal{B}_{\delta_\epsilon}$, tale che il sistema, posto inizialmente in $\mathcal{B}_{\delta_\epsilon}$, evolve rimanendo sempre entro \mathcal{B}_ϵ ; se ciò non avviene, diremo che la configurazione è instabile; più formalmente, possiamo riesprimere la precedente definizione generale di stabilità nel caso dell'equilibrio.

20.1 Definizione. *Una configurazione di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ è stabile se per ogni $\epsilon > 0$ è possibile determinare $\delta_\epsilon = \delta(\epsilon, t_0)$ tale che per ogni stato iniziale $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}_{\delta_\epsilon}$ si ha $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}_\epsilon$ per ogni $t \geq t_0$. La configurazione è asintoticamente stabile se è stabile e inoltre $d(\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{x}}) \mapsto 0$ per $t \mapsto \infty$. Chiamiamo instabile ogni configurazione di equilibrio non stabile.*

Osservazioni.

(i) Nella definizione di stabilità non si fa alcuna ipotesi sul tipo particolare di moto del sistema, ma si richiede solo che $\mathbf{x}(t)$ rimanga vicino a $\bar{\mathbf{x}}$ per ogni $t \geq t_0$. Ad esempio, il sistema potrebbe compiere oscillazioni di ampiezza costante (oscillatore armonico libero e non smorzato: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $\bar{x} = 0$ è posizione di equilibrio stabile), oppure tendere all'equilibrio in un tempo infinito (oscillatore armonico libero e smorzato: $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 x = 0$; in tal caso la posizione di equilibrio $\bar{x} = 0$ è *asintoticamente* stabile), oppure ancora arrestarsi in un tempo finito in una posizione vicina, ma generalmente diversa, a quella di equilibrio (punto pesante vincolato ad una semicirconferenza scabra; la posizione di minima quota è di equilibrio stabile).

(ii) Secondo la definizione data, sono instabili tutte le configurazioni non stabili; sono quindi da considerarsi instabili le cosiddette configurazioni di equilibrio indifferente (si pensi ad un punto pesante appoggiato su una linea liscia orizzontale).

(iii) Si definisce *attrattore* uno stato di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ se esiste un intorno $\mathcal{B}(\bar{\mathbf{x}})$ tale che per le soluzioni $\mathbf{x}(t)$ del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ corrispondenti a stati iniziali $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}(\bar{\mathbf{x}})$ è $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$. Un punto di equilibrio asintoticamente stabile è sempre un attrattore; un attrattore non è però, necessariamente, un punto di stabilità, perchè non si richiede che $\mathbf{x}(t)$ sia nell'intorno di $\bar{\mathbf{x}}$ per ogni t , ma solo che vi tenda per $t \mapsto \infty$. \diamond

Ripetiamo che se si volesse determinare la stabilità di una configurazione attraverso la definizione occorrerebbe risolvere il problema del moto; la definizione di Liapunov non fornisce quindi, in generale, un criterio operativo. Sorge allora il problema di avere delle condizioni, almeno

sufficienti, per determinare la stabilità o l'instabilità dell'equilibrio senza passare attraverso la soluzione delle equazioni di moto; questo non si può fare per sistemi del tutto generali, ma esistono molti criteri validi sotto opportune ipotesi restrittive.

L'ipotesi che facciamo è che *la configurazione di equilibrio corrisponda ad un punto di stazionarietà del potenziale: supporremo quindi i vincoli fissi, bilateri, olonomi, e la sollecitazione attiva conservativa, con un potenziale $U = U(\mathbf{q})$* ⁽²⁰⁾.

Nelle ipotesi assunte, si ha allora la seguente *condizione sufficiente di stabilità*:

20.2 Teorema (Dirichlet). *Se il potenziale U è una funzione continua in un intorno della configurazione di equilibrio ed ha un massimo isolato in tale configurazione, la configurazione di equilibrio è stabile.*

Dimostrazione. Nell'ipotesi che U sia di classe C^1 , la dimostrazione è una applicazione diretta del secondo metodo di Liapunov. Usiamo nella dimostrazione l'energia potenziale $V = -U$, e supponiamo, senza perdita di generalità, che nel punto di equilibrio sia $V(\bar{\mathbf{q}}) = 0$.

Consideriamo la funzione $H = T + V$ (energia meccanica del sistema); è allora $H(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, $H(\mathbf{x}) > 0$ per $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$, essendo ovviamente $T(\mathbf{x}) > 0$, e $V(\mathbf{x}) > 0$ poichè $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto di minimo isolato per V . È poi $dH/dt = 0$ per il teorema di conservazione dell'energia.

La funzione H è allora una funzione di Liapunov del sistema, e quindi il punto critico $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{q}}, 0)$ è stabile. \square

Un problema di evidente interesse è il cosiddetto problema della *inversione della condizione di Dirichlet*, cioè il problema di determinare la stabilità o instabilità nelle situazioni in cui il teorema di Dirichlet non sia applicabile, e quindi nel caso in cui il potenziale non abbia un massimo isolato nella configurazione di equilibrio.

Tra i numerosi risultati parziali, citiamo il seguente teorema, che fornisce una *condizione sufficiente di instabilità* :

20.3 Teorema (Liapunov). *Se il potenziale U è di classe C^2 in un intorno della configurazione di equilibrio e la matrice Hessiana del potenziale, valutata in tale configurazione, ha almeno un autovalore positivo, allora la configurazione di equilibrio è instabile.*

Dimostrazione. È una conseguenza diretta del primo metodo di Liapunov; si può infatti dimostrare che se la matrice Hessiana del potenziale ha un autovalore positivo, la matrice Jacobiana del sistema dinamico linearizzato associato al sistema lagrangiano ha anch'essa un autovalore reale e positivo. \square

²⁰Usiamo anche in questo contesto la funzione potenziale U , come fatto sino ad ora parlando di conservazione dell'energia, di sollecitazione conservativa, di descrizione lagrangiana del moto, ...; in gran parte della letteratura sulla stabilità si preferisce però fare riferimento all'energia potenziale $V = -U$.

Osservazioni.

(i) Mentre per dimostrare il teorema di Dirichlet è sufficiente supporre la continuità della funzione U , per la validità del teorema di Liapunov occorre invece richiedere che U sia una funzione di classe C^2 , la dimostrazione essendo basata sullo studio degli autovalori della matrice Hessiana del potenziale (ovvero dei termini del secondo ordine nello sviluppo di Taylor della funzione U nell'intorno della configurazione di equilibrio).

(ii) Se gli autovalori della matrice Hessiana sono tutti negativi, il punto di equilibrio è un punto di massimo isolato del potenziale: il teorema di Dirichlet ci assicura allora che si ha stabilità. Come già detto parlando del primo metodo di Liapunov, l'analisi sulla stabilità condotta in base agli autovalori della matrice Hessiana non è quindi conclusiva nel caso in cui gli autovalori siano tutti non positivi. \diamond

Il caso di sistemi con 1 e 2 gradi di libertà. Riassumiamo qui i risultati per il caso, di frequente applicazione, di sistemi con uno e due gradi di libertà. Nell'ipotesi di potenziale analitico, ed utilizzando oltre al teorema di Dirichlet e di Liapunov altri risultati, che non citiamo per brevità, abbiamo la situazione seguente.

Sistema con un grado di libertà: $n = 1$.

Siano: x la coordinata libera; \bar{x} la posizione di equilibrio, soluzione dell'equazione $U'(\bar{x}) = 0$; $\ell \geq 2$ l'ordine della prima derivata diversa da zero in \bar{x} . È allora:

$$\ell \text{ pari, } U^{(\ell)}(\bar{x}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Massimo isolato} \quad \Rightarrow \quad \text{Stabilità}$$

$$\ell \text{ pari, } U^{(\ell)}(\bar{x}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimo isolato} \quad \Rightarrow \quad \text{Instabilità}$$

$$\ell \text{ dispari} \quad \Rightarrow \quad \text{Flesso orizzontale} \quad \Rightarrow \quad \text{Instabilità}$$

Sistema con due gradi di libertà: $n = 2$.

Siano: (x, y) le coordinate libere; (\bar{x}, \bar{y}) la configurazione di equilibrio, determinata dalle equazioni $U_x = U_y = 0$ (indichiamo con indici le derivazioni parziali).

Se U_{xx} , U_{xy} e U_{yy} sono le derivate parziali seconde valutate nella posizione di equilibrio e H è la matrice Hessiana di U , valutata anch'essa in (\bar{x}, \bar{y}) , si ha allora ⁽²¹⁾:

$$\det H > 0, \quad U_{xx} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Stabilità} \quad (20.2)$$

$$\det H > 0, \quad U_{xx} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Instabilità} \quad (20.3)$$

$$\det H < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Instabilità} \quad (20.4)$$

$$\det H = 0, \quad U_{xx} \text{ (o } U_{yy}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Instabilità} \quad (20.5)$$

²¹Dal punto di vista geometrico, nei primi due casi il potenziale U ha nel punto di equilibrio, rispettivamente, un massimo isolato e un minimo isolato; il terzo caso corrisponde ad U con un punto di sella all'equilibrio.

Osservazioni.

(i) Come detto, per un sistema con un grado di libertà, se il potenziale è analitico la condizione di massimo isolato è necessaria e sufficiente per la stabilità. Se invece il potenziale non è analitico, la condizione è solo sufficiente: si possono cioè avere posizioni di equilibrio stabile a cui non corrisponde un massimo isolato del potenziale.

Come esempio, consideriamo il potenziale

$$U(x) = -e^{-1/x^2} \sin^2(1/x) \quad \text{per } x \neq 0, \quad U(0) = 0;$$

essendo $x = 0$ un punto di massimo assoluto, il teorema della stazionarietà del potenziale ci assicura che si tratta di una configurazione di equilibrio. Per quanto riguarda la stabilità di tale configurazione, essa discende immediatamente dal teorema di conservazione dell'energia e dall'analisi del grafico dell'energia potenziale.

Osserviamo ora che la funzione U è chiaramente C^∞ su R , ma non è analitica (le derivate di ogni ordine sono nulle per $x = 0$); inoltre $x = 0$ non è un punto di massimo isolato, essendo punto di accumulazione di punti di massimo in cui la funzione si annulla.

(ii) Il teorema di Liapunov è stato esteso da Chetayev. Assumiamo che il potenziale $U = U(\mathbf{q})$ sia analitico nell'intorno della configurazione di equilibrio $\bar{\mathbf{q}}$, e che ammetta lo sviluppo

$$U(\mathbf{q}) - U(\bar{\mathbf{q}}) = U_m + U_{m+1} + \dots$$

dove

$$U_m = \frac{1}{m!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} \left. \frac{\partial^m U}{\partial q_{i_1} \dots \partial q_{i_m}} \right|_{\bar{\mathbf{q}}} \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_m} \quad (\epsilon = \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})$$

indica il primo termine diverso da zero nello sviluppo di Taylor nel punto di equilibrio (nel caso inizialmente considerato da Liapunov è $m = 2$, i termini del primo ordine essendo ovviamente nulli per il teorema della stazionarietà del potenziale).

Vale allora il seguente risultato (Chetayev): *se l'assenza di massimo del potenziale nel punto di equilibrio è determinabile dall'analisi del termine U_m , allora la posizione di equilibrio è instabile.* Come detto, tale teorema generalizza quello di Liapunov; nel caso di Liapunov, infatti, la presenza di un autovalore positivo permette di dedurre dall'analisi del termine del secondo ordine U_2 che il potenziale non ha un massimo all'equilibrio. \diamond

21 Oscillazioni attorno a configurazioni stabili.

Consideriamo un sistema olonomo con n gradi di libertà, e sia $\bar{\mathbf{q}}$ una configurazione di equilibrio stabile, corrispondente, nelle ipotesi del teorema di Dirichlet, ad un massimo isolato del potenziale U . In base a tale teorema, se consideriamo una configurazione iniziale $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$ vicina a $\bar{\mathbf{q}}$, con atto di moto iniziale $\dot{\mathbf{q}}(t_0)$ piccolo, sappiamo che durante il moto, per ogni $t \geq t_0$, la configurazione $\mathbf{q}(t)$ sarà nell'intorno della configurazione di equilibrio, con atto di moto piccolo. Vogliamo studiare più in dettaglio il moto del sistema nell'intorno di tale configurazione, nella seguente *ipotesi più restrittiva*: consideriamo la matrice Hessiana del potenziale, valutata nella configurazione di equilibrio, ed introduciamo la matrice \mathcal{B} data da

$$\mathcal{B}_{ij} := - \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}} ; \quad (21.1)$$

l'ipotesi che introduciamo è che la matrice \mathcal{B} sia definita positiva, cioè che per ogni vettore $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ non identicamente nullo sia

$$\mathbf{v} \cdot \mathcal{B} \mathbf{v} := \sum_{i,j=1}^n \mathcal{B}_{ij} v_i v_j > 0 . \quad (21.2)$$

Introdotte allora per comodità le variabili

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) := \mathbf{q}(t) - \bar{\mathbf{q}}, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(t) := \dot{\mathbf{q}}(t) , \quad (21.3)$$

vogliamo considerare le equazioni di moto linearizzate, cioè al primo ordine in $\|\boldsymbol{\epsilon}\|$ e in $\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|$ (22). A tal fine, dall'ipotesi precedentemente introdotta segue che, a meno di termini di ordine superiore al secondo in $\|\boldsymbol{\epsilon}\|$ (con $\|\boldsymbol{\epsilon}\| = \sqrt{\sum_k |\epsilon_k|^2}$), il potenziale U può essere scritto nella forma

$$U(\mathbf{q}) = U(\bar{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\epsilon}) = U(\bar{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathcal{B} \boldsymbol{\epsilon} + \dots , \quad (21.4)$$

dove si è tenuto conto del fatto che le derivate prime del potenziale nella configurazione di equilibrio sono nulle, per il teorema della stazionarietà del potenziale. Essendo il primo termine dello sviluppo una costante (ininfluente nella scrittura delle equazioni di moto), il primo termine significativo dello sviluppo di U è il termine quadratico. Nella scrittura della funzione di Lagrange $L = T + U$, anche nell'energia cinetica possiamo allora trascurare termini dell'ordine di $\|\boldsymbol{\epsilon}\| \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|^2$, per cui si ha

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathcal{T}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathcal{T}(\bar{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\epsilon}) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathcal{A} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \dots , \quad (21.5)$$

dove con $\mathcal{A} := \mathcal{T}(\bar{\mathbf{q}})$ indichiamo la matrice dell'energia cinetica valutata nella configurazione di equilibrio. Essendo l'energia cinetica di ogni sistema meccanico una funzione definita positiva, si dimostra che anche la matrice \mathcal{A} è *definita positiva*.

²²Il fatto che si consideri $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ dello stesso ordine di $\boldsymbol{\epsilon}$ corrisponde a questa ipotesi: cerchiamo soluzioni delle equazioni di moto della forma $\boldsymbol{\epsilon}(t) = \sigma \boldsymbol{\varphi}(t)$, con $\boldsymbol{\varphi}$ indipendente da σ : la derivata k -sima è allora $\boldsymbol{\epsilon}^{(k)}(t) = \sigma \boldsymbol{\varphi}^{(k)}(t)$ per ogni k , per cui $\boldsymbol{\epsilon}$ è dell'ordine di σ con tutte le sue derivate. Questa ipotesi è sufficiente per il risultato che si intende dimostrare, ma non copre ovviamente la situazione più generale, perché una funzione "piccola" può non avere derivata "piccola": si pensi ad esempio a $f(t) = \sigma \sin(t/\sigma)$, che è $O(\sigma)$, la cui derivata $f'(t) = \cos(t/\sigma)$ è $O(1)$.

Possiamo quindi ottenere le equazioni di moto linearizzate a partire dalla Lagrangiana

$$L^* = \frac{1}{2} \dot{\epsilon} \cdot \mathcal{A} \dot{\epsilon} - \frac{1}{2} \epsilon \cdot \mathcal{B} \epsilon , \quad (21.6)$$

dove le matrici \mathcal{A} e \mathcal{B} sono:

- (i) reali,
- (ii) simmetriche,
- (iii) definite positive.

L'equazione di moto corrispondente è

$$\mathcal{A} \ddot{\epsilon} + \mathcal{B} \epsilon = 0 , \quad (21.7)$$

ovvero

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{A}_{ki} \ddot{\epsilon}_i + \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_{ki} \epsilon_i = 0 \quad (k = 1, \dots, n) ;$$

si tratta di un sistema di n equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. La soluzione generale delle (21.7) è data da una combinazione lineare di moti periodici, le cui pulsazioni ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sono ottenibili direttamente dall'analisi delle matrici costanti \mathcal{A} e \mathcal{B} . Consideriamo infatti l'equazione algebrica di grado n in ω^2

$$\det(\mathcal{B} - \omega^2 \mathcal{A}) = 0 \quad (21.8)$$

che chiamiamo equazione (generalizzata) agli autovalori, o equazione agli autovalori di \mathcal{B} rispetto ad \mathcal{A} . Essendo le matrici \mathcal{A} e \mathcal{B} reali, simmetriche e definite positive, da noti risultati di algebra lineare sappiamo che le n radici dell'equazione sono reali e positive: $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$; supporremo inoltre che siano distinte. Chiamiamo autovalori tali soluzioni, ed indichiamo con $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ gli autovettori normalizzati corrispondenti, cioè le soluzioni delle equazioni

$$(\mathcal{B} - \omega_k^2 \mathcal{A}) \mathbf{X}_k = 0 , \quad \sum_{i=1}^n X_{ki}^2 = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n) .$$

Valgono allora i seguenti risultati.

21.1 Teorema. *La soluzione delle equazioni di moto (21.7) è data da*

$$\epsilon(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k (C_{1k} \cos(\omega_k t) + C_{2k} \sin(\omega_k t)) \quad (21.9)$$

dove C_{1k} e C_{2k} sono $2n$ costanti reali arbitrarie (da determinarsi con le condizioni iniziali), ω_k e \mathbf{X}_k sono gli autovalori e i corrispondenti autovettori normalizzati.

21.2 Teorema. *Esiste una trasformazione di variabili $\epsilon \mapsto \xi$ (ξ coordinate normali del sistema) tale che le equazioni di moto (21.7), scritte in termini delle ξ , assumono la forma separata di n equazioni dell'oscillatore armonico, ciascuna in una coordinata normale:*

$$\ddot{\xi} + \Omega \xi = 0 , \quad \Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2) \Rightarrow \ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) . \quad (21.10)$$

Riassumendo, le frequenze proprie di un sistema possono essere determinate attraverso i seguenti passi:

(1) Determinata la posizione di equilibrio attraverso il teorema della stazionarietà del potenziale, e verificato che si tratta di equilibrio stabile attraverso il teorema di Dirichlet, si calcola la matrice Hessiana del potenziale nella configurazione di equilibrio; tale matrice, cambiata di segno, è la matrice \mathcal{B} .

(2) Si calcola l'energia cinetica T del sistema, che è sempre una forma quadratica omogenea di secondo grado nelle $\dot{\mathbf{q}}$ (essendo i vincoli fissi per ipotesi) e se ne determina la matrice \mathcal{T} corrispondente; tale matrice, valutata per $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$, è la matrice \mathcal{A} .

(3) Note le matrici \mathcal{A} e \mathcal{B} , se ne calcolano gli autovalori risolvendo la (21.8), che è un'equazione algebrica di grado n nel quadrato delle pulsazioni. Nelle ipotesi fatte, tali autovalori risultano automaticamente reali e positivi: le loro radici aritmetiche sono le pulsazioni cercate.

Osservazioni.

(i) L'ipotesi fatta nello scrivere il risultato (21.9) è che n le pulsazioni ω_k siano distinte. Si dimostra però che la caratteristica del moto di essere quasi-periodico sussiste anche se l'equazione agli autovalori (21.8) ha radici multiple; infatti nelle ipotesi assunte sulle matrici \mathcal{A} e \mathcal{B} la molteplicità algebrica degli autovalori coincide con la loro molteplicità geometrica (cioè se un autovalore è soluzione di ordine m_k dell'equazione agli autovalori, m_k è anche la dimensione del suo autospazio, e quindi l'autovalore possiede m_k autovettori indipendenti): la (21.9) è allora sostituita da

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^{m_k} \mathbf{X}_{ik} \right) (C_{1ik} \cos(\omega_k t) + C_{2ik} \sin(\omega_k t)) , \quad \left(\sum_{k=1}^p m_k = n \right) .$$

(ii) In generale, le pulsazioni ω_k , e quindi i periodi $\tau_k = 2\pi / \omega_k$, non sono in rapporto razionale, per cui il moto del sistema non è periodico: si parla in questo caso di moto *quasi-periodico*. Se però i periodi τ_k sono in rapporto razionale, allora il moto è periodico, con un periodo che è il minimo comune multiplo degli n periodi τ_k .

(iii) L'esistenza di coordinate normali, e quindi la possibilità di descrivere il moto attraverso un sistema di n equazioni dell'oscillatore armonico, chiarisce maggiormente la caratteristica del moto di essere quasi-periodico, cioè il comportamento del sistema come un insieme ideale di n oscillatori armonici. Tuttavia per determinare le caratteristiche salienti di tale moto, che sono le pulsazioni ω_k , ovvero le frequenze $\nu_k = \omega_k / 2\pi$ (*frequenze proprie o caratteristiche* del sistema) o i periodi $\tau_k = 1/\nu_k$, non è necessario passare a coordinate normali, ma è sufficiente risolvere un problema algebrico, cioè determinare le soluzioni dell'equazione agli autovalori (21.8), di grado n in ω^2 .

(iv) L'uso delle coordinate normali consente di verificare agevolmente che la stabilità di un punto di equilibrio che sia un massimo isolato del potenziale (teorema di Dirichlet), che abbiamo dimostrato come applicazione del secondo metodo di Liapunov, non è invece deducibile dal primo metodo di Liapunov: per sistemi di tipo lagrangiano tale metodo consente in effetti di individuare solo posizioni di equilibrio asintoticamente stabili. Utilizzando le coordinate normali, consideriamo infatti le equazioni di Lagrange linearizzate nell'intorno della configurazione di

equilibrio; come visto in precedenza, abbiamo allora il sistema di equazioni del secondo ordine

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \Omega \boldsymbol{\xi} = 0 \quad \Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2) .$$

A tale sistema corrisponde il sistema dinamico lineare

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) , \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ -\Omega \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} ,$$

la cui matrice Jacobiana \mathcal{J} è

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} .$$

Si dimostra che per una matrice con questa forma a blocchi si ha

$$\det(\mathcal{J} - \mu I) = \prod_{k=1}^n (\mu^2 + \omega_k^2) ,$$

per cui gli autovalori di \mathcal{J} sono immaginari puri: $\mu_k = \pm i \omega_k \Rightarrow \text{Re}(\mu_k) \leq 0$. ◇

22 Elementi di meccanica dei fili e delle verghe.

Consideriamo un corpo continuo monodimensionale, rappresentato geometricamente da una curva in \mathbf{R}^3 . Supporremo tale curva rettificabile, per cui la variabile di configurazione è l'ascissa curvilinea s ; la posizione di ogni punto del continuo è quindi data da un vettore $P = P(s(t), t)$ in condizioni dinamiche e da un vettore $P = P(s)$ all'equilibrio. Nelle applicazioni che faremo, considereremo il caso semplice di *continui inestensibili*, per cui l'ascissa curvilinea s di un generico punto non dipende da t ; le equazioni generali che dedurremo non dipendono però da tale ipotesi.

I continui monodimensionali si classificano in base all'ipotesi sulla natura della sollecitazione interna scambiata tra le parti di continuo. Precisamente, in un punto P di ascissa s consideriamo l'azione che la parte di continuo di ascissa $> s$ esercita sulla parte di ascissa $< s$; diciamo che il continuo è un **filo** se tale azione è rappresentata da una forza $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s, t)$, detta la *tensione* del filo, mentre diciamo che il continuo è una **verga** se l'azione interna è rappresentata oltre che da una forza $\mathbf{T}(s, t)$ anche da una coppia di momento $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}(s, t)$.

Postuleremo che anche per tali continui valga il principio di azione e reazione; ne segue che l'azione che la parte di continuo di ascissa $< s$ esercita sulla parte di ascissa $> s$ è data da $-\mathbf{T}(s, t)$ e $-\mathbf{\Gamma}(s, t)$.

Per quanto riguarda la sollecitazione esterna (attiva o reattiva) applicata, facciamo l'ipotesi che essa sia *distribuita con continuità*; se quindi $\Delta \mathbf{f}$ è la forza (attiva o reattiva) applicata ad un tratto di lunghezza Δs , *postuliamo* che esista il limite per $\Delta s \rightarrow 0$ del rapporto $\Delta \mathbf{f} / \Delta s$, e chiamiamo forza specifica il limite

$$\mathbf{F}(s, t) := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta s} \quad (22.1)$$

(con abuso di linguaggio, data la forza specifica \mathbf{F} , abbreviamo la (22.1) dicendo che $d\mathbf{f} = \mathbf{F}ds$ è la forza esterna infinitesima applicata ad un tratto di lunghezza infinitesima ds).

Per $0 \leq s \leq \ell$, essendo ℓ la lunghezza del continuo, il risultante $\mathbf{R}(s, t)$ e il momento $\mathbf{M}_0(s, t)$ rispetto ad un punto O delle forze distribuite su un tratto di continuo di lunghezza s sono quindi dati da

$$\mathbf{R}(s, t) = \int_0^s \mathbf{F}(u, t) du, \quad \mathbf{M}_0(s, t) = \int_0^s (Q(u) - O) \wedge \mathbf{F}(u, t) du, \quad (22.2)$$

essendo Q il generico punto del tratto di curva tra $P(0)$ e $P(s)$.

Statica dei fili e delle verghe. Consideriamo ora il problema dell'equilibrio, introducendo il seguente postulato.

Postulato. *In condizioni di equilibrio, per ogni parte del continuo sono soddisfatte le equazioni cardinali della statica: $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M} = 0$.*

Consideriamo l'equazione del risultante; siano A e B il punto *iniziale* e *finale* del continuo, di ascisse rispettive $s = 0$ e $s = \ell$, ed indichiamo con \mathbf{f}_A , \mathbf{C}_A e \mathbf{f}_B , \mathbf{C}_B le forze e le coppie eventualmente applicate in tali estremi; l'equazione del risultante è allora

$$\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B + \int_0^\ell \mathbf{F}(u) du = 0 \quad (22.3)$$

per tutto il continuo, mentre per un generico tratto \widehat{AP} di lunghezza s si ha

$$\mathbf{f}_A + \mathbf{T}(s) + \int_0^s \mathbf{F}(u) du = 0 . \quad (22.4)$$

Valutando tale equazione per $s = 0$ e $s = \ell$ e tenendo conto della (22.3)), otteniamo le condizioni al contorno per la tensione

$$\mathbf{T}(0) = -\mathbf{f}_A, \quad \mathbf{T}(\ell) = \mathbf{f}_B . \quad (22.5)$$

Derivando la (22.4) rispetto al parametro s si ha invece l'equazione differenziale

$$\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} + \mathbf{F}(s) = 0 \quad (22.6)$$

valida in ogni punto interno, cioè per $0 < s < \ell$.

Se si procede in modo del tutto analogo per la seconda equazione cardinale, annullando rispetto ad un generico punto O il momento delle forze esterne si perviene all'equazione integrale

$$(A - O) \wedge \mathbf{f}_A + \mathbf{C}_A + (P(s) - O) \wedge \mathbf{T}(s) + \mathbf{\Gamma}(s) + \int_0^s (Q - O) \wedge \mathbf{F}(u) du = 0 ; \quad (22.7)$$

se valutiamo tale equazione per $s = 0$ e $s = \ell$, e teniamo conto delle condizioni al contorno sulla tensione prima dedotte, otteniamo le condizioni al contorno per il momento della verga

$$\mathbf{\Gamma}(0) = -\mathbf{C}_A, \quad \mathbf{\Gamma}(\ell) = \mathbf{C}_B. \quad (22.8)$$

Derivando la (22.7) (e tenendo conto dell'equazione del risultante (22.6)), si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{dP(s)}{ds} \wedge \mathbf{T}(s) + \frac{d\mathbf{\Gamma}(s)}{ds} = 0 . \quad (22.9)$$

Nel caso di un filo è $\mathbf{\Gamma}(s) = 0$, per cui tale equazione diventa

$$\frac{dP(s)}{ds} \wedge \mathbf{T}(s) = 0$$

e implica (ricordando che dP/ds è il versore tangente della curva) che *in ogni punto la tensione è tangente al filo.*

Per determinare l'equilibrio di un continuo monodimensionale, occorre quindi risolvere le due equazioni differenziali (22.6), (22.9); distinguendo per comodità le forze specifiche attive $\mathbf{F}(s)$ dalla reazione vincolare specifica $\mathbf{\Phi}(s)$ si ha quindi il sistema

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{F} + \mathbf{\Phi} = 0 \\ \frac{d\mathbf{\Gamma}}{ds} + \frac{dP}{ds} \wedge \mathbf{T} = 0 \end{cases} \quad (22.10)$$

con le condizioni al contorno (22.5) (22.8), nelle incognite $P(s)$, $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{\Gamma}(s)$. Per la determinazione dell'equilibrio, le equazioni cardinali, che abbiamo postulato essere condizioni necessarie, non sono quindi sufficienti, e vanno completate da informazioni sulla struttura materiale del continuo, cioè da **relazioni costitutive** .

Nelle applicazioni, è conveniente considerare le proiezioni delle equazioni vettoriali ora ottenute su una terna cartesiana fissa ed esterna al continuo, oppure sulla terna intrinseca $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ della curva.

Proiezione su assi cartesiani fissi. Considerando per semplicità che il continuo sia libero e posto in un piano cartesiano $(O; x, y)$, dal sistema (22.10) si ottiene

$$\begin{cases} \frac{dT_x}{ds} + F_x = 0 \\ \frac{dT_y}{ds} + F_y = 0 \\ \frac{d\Gamma_z}{ds} + T_y \frac{dx}{ds} - T_x \frac{dy}{ds} = 0 \end{cases} \quad (22.11)$$

in cui le incognite sono le azioni interne T_x, T_y, Γ_z e la configurazione del continuo, che supponiamo nella forma cartesiana $y = y(x)$ (occorre inoltre ricordare che $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$). Si tratta quindi di un sistema di tre equazioni differenziali non lineari in quattro incognite, che va completato, come detto, da una relazione costitutiva; nel caso del filo, assumeremo come relazione costitutiva la *inestendibilità* del filo, cioè la condizione $\ell = \text{costante}$, mentre nel caso della verga assumeremo l'ipotesi di *inestendibilità ed elasticità* (Eulero).

Proiezione sulla terna intrinseca. Consideriamo un filo soggetto a forze distribuite attive \mathbf{F} e reattive $\mathbf{\Phi}$. Poichè l'equazione del momento implica il parallelismo tra la tensione e la tangente al filo, scriviamo $\mathbf{T}(s) = T(s) \mathbf{t}$; tenendo conto di ciò, l'equazione del risultante proiettata sulla terna intrinseca dà luogo al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} + F_t + \Phi_t = 0 \\ \frac{T}{r} + F_n + \Phi_n = 0 \\ F_b + \Phi_b = 0 \end{cases} \quad (22.12)$$

dove $r = r(s)$ è il raggio di curvatura della curva secondo cui si atteggia il filo (ricordiamo che se $\mathbf{t}(s)$ è il versore tangente, si ha $d\mathbf{t}/ds = (1/r) \mathbf{n}$, essendo \mathbf{n} il versore normale principale).

Se $\Phi_t = 0$ (filo libero oppure appoggiato ad un vincolo liscio) e se esiste una funzione $U = U(s)$ per cui sia $F_t = dU/ds$ (²³), dalla prima equazione (22.12) segue un risultato interessante che permette spesso di semplificare la soluzione del problema; si ha infatti l'esistenza di un integrale primo

$$0 = \frac{dT}{ds} + F_t = \frac{dT}{ds} + \frac{dU}{ds} \Rightarrow T(s) + U(s) = \text{costante} .$$

²³questo è senz'altro vero se la forza specifica attiva è posizionale e conservativa: $\mathbf{F} = \text{grad } U$, essendo allora $F_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} = \text{grad } U \cdot dP/ds = dU/ds$.

Esempio. Come semplice esempio di uso delle equazioni (22.12) consideriamo le condizioni di equilibrio di un filo appoggiato senza attrito su una superficie (convessa) di normale \mathbf{N} , soggetto solo a due “trazioni” \mathbf{f}_A e \mathbf{f}_B negli estremi A e B e alle reazioni vincolari della superficie. Per le ipotesi sulle forze e sui vincoli, poniamo allora nelle (22.12)

$$F_t = F_n = F_b = 0, \quad \Phi_t = 0, \quad \Phi_n = \Phi \mathbf{N} \cdot \mathbf{n}, \quad \Phi_b = \Phi \mathbf{N} \cdot \mathbf{b}.$$

Otteniamo così

$$\frac{dT}{ds} = 0 \Rightarrow T = \text{costante},$$

ma questo implica, tenendo conto delle condizioni al contorno sulla tensione, che

$$f_A = f_B :$$

in assenza di forze attive distribuite lungo il filo, questo può essere in equilibrio solo se è tirato negli estremi da due forze di uguale modulo.

La seconda e terza equazione (22.12) implicano poi che

$$\Phi \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = -\frac{T}{r}, \quad \Phi \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (22.13)$$

Essendo allora $\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = 0$ e $\mathbf{N} \cdot \mathbf{t} = 0$, abbiamo che \mathbf{n} è parallelo a \mathbf{N} , e questa è la condizione caratteristica perché la curva sia una geodetica della superficie; la prima delle (22.13) diventa allora $|\Phi| = T/r = f_A/r$. In conclusione: *in assenza di forze attive distribuite, un filo può essere in equilibrio su una superficie liscia solo se le forze agli estremi hanno modulo uguale; in tale situazione il filo si dispone lungo un tratto di geodetica della superficie, e la reazione vincolare esercitata dalla superficie è direttamente proporzionale alla curvatura della linea.* \diamond

Il modello della linea elastica. In un piano cartesiano $(O; x, y)$, consideriamo l'equilibrio di una verga (o trave) OA , posta nel piano in una configurazione (deformata) dovuta alle forze applicate, di equazione cartesiana $y = y(x)$. Facciamo queste ipotesi:

- (i) in assenza di carichi, la configurazione di equilibrio *indeformata* della trave è data dal tratto OA dell'asse x , di lunghezza ℓ , cioè dall'equazione $y(x) = 0$.
- (ii) vale la *relazione costitutiva di Eulero*: la variazione di curvatura $\Delta(1/r)$ nella configurazione deformata è direttamente proporzionale al momento flettente Γ_z della trave (regime elastico).
- (iii) le deformazioni sono piccole (assunte come infinitesime del primo ordine nella linearizzazione delle equazioni di equilibrio).

Sotto tali ipotesi, le equazioni di equilibrio sono date dal sistema (22.11), alle quali va aggiunta la relazione costitutiva (ii), espressa da

$$\Gamma_z = EJ \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \quad (22.14)$$

dove E e J sono due costanti (dipendenti rispettivamente dal materiale e dalla sezione trasversale della trave che è schematizzata dalla curva di equazione $y = y(x)$). Ricordiamo inoltre che per una curva piana di equazione cartesiana $y = y(x)$ la curvatura $1/r$ è data da $1/r = y''(1 + y'^2)^{-3/2}$.

Nell'ipotesi di piccole deformazioni, la deformata (data da una funzione incognita $y = y(x)$) è *quasi orizzontale*, cioè si ha $y'(x) \ll 1$; essendo nulla la curvatura dell'indeformata $y(x) = 0$ è allora

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} = \frac{y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}} \simeq y''(x) \quad (22.15)$$

per cui la relazione costitutiva di Eulero, linearizzata, diventa

$$E J y''(x) = \Gamma_z(x) . \quad (22.16)$$

Occorre quindi risolvere il sistema di equazioni dato dalle (22.11) e (22.16): si tratta di un sistema non lineare di quattro equazioni differenziali nelle incognite $y(x)$, T_x , T_y e Γ_z . Data la difficoltà di risolvere esattamente tale sistema, possiamo cercarne una soluzione approssimata nelle ipotesi in cui ci siamo posti: nell'ipotesi di linearizzazione possiamo quindi *sostituire al momento* Γ_z *valutato sulla deformata* $y(x)$ *il momento valutato sull'indeformata* $y(x) = 0$, cioè *il momento flettente* M_f *dell'asta* OA *rigida*; le equazioni differenziali non lineari (22.11) vengono sostituite dalle equazioni della statica del corpo rigido che forniscono le azioni interne, in particolare il momento flettente M_f .

Con tali approssimazioni, il *modello della linea elastica* consente di determinare la deformata di una trave con i seguenti passi:

(i) si determina il momento flettente $M_f(x)$ per il corpo rigido dato dall'asta rettilinea OA , in cui x è identificata con l'ascissa curvilinea s .

(ii) si integra l'equazione differenziale lineare $E J y''(x) = M_f(x)$ con le condizioni al contorno del problema; la soluzione di tale equazione fornisce, nell'approssimazione lineare, la deformata della trave.

Linea elastica e reazioni iperstatiche. Un'applicazione interessante del modello della linea elastica si ha nel calcolo di reazioni vincolari iperstatiche su aste rigide. Se ad esempio si ha un'asta AB vincolata con un vincolo iperstatico in B , si può procedere nel modo seguente: si elimina il vincolo in B , riducendo l'asta ad isostatica e sostituendo la reazione vincolare in B con una sollecitazione X supposta nota (incognita iperstatica); supponendo l'asta come una verga deformabile e applicando il modello della linea elastica, si calcolano allora le reazioni vincolari isostatiche, il momento flettente e la deformazione, che risulteranno in generale dipendenti dall'incognita iperstatica X ; a questo punto si impone la condizione che la deformata rispetti il vincolo assegnato in B , e tale condizione geometrica consente di determinare X e quindi le reazioni vincolari.

Esempio I. In un piano cartesiano $(O; x, y)$, con y verticale ascendente, consideriamo una trave OA omogenea, di peso p e lunghezza ℓ , disposta orizzontalmente con un incastro nell'estremo O e soggetta ad una forza $\mathbf{F} = F \mathbf{j}$ nel secondo estremo A .

Analizziamo anzitutto l'asta rigida OA : le reazioni nell'incastro O sono date da una forza verticale di componente $\Phi_y = p - F$ e da una coppia antioraria di momento $M_0 = p\ell/2 - F\ell$. Nel generico punto P della trave, parametrizzato da $x = \overline{OP}$, il momento flettente (antiorario) $M_f(x)$ è dato dall'equazione $\mathbf{M}_0 = 0$ per il tratto OP , da cui otteniamo

$$M_f(x) = -p \frac{\ell}{2} + F\ell + (p - F)x - p \frac{x^2}{2\ell} . \quad (22.17)$$

L'equazione differenziale della linea elastica è allora

$$E J y''(x) = -p \frac{\ell}{2} + F\ell + (p - F)x - p \frac{x^2}{2\ell} \quad (22.18)$$

che deve essere integrata con le condizioni

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

corrispondenti all'incastro in O ; il risultato è quindi

$$E J y(x) = -p \frac{\ell}{4} x^2 + F \ell \frac{x^2}{2} + (p - F) \frac{x^3}{6} - p \frac{x^4}{24\ell}. \quad (22.19)$$

In particolare, lo spostamento verticale dell'estremo A è dato da

$$E J y(\ell) = \frac{\ell^3}{3} (F - \frac{3}{8}p). \quad (22.20)$$

Applichiamo ora tale risultato al caso di una trave una volta iperstatica, incastrata in O ed appoggiata in A , di cui vogliamo determinare le reazioni vincolari. Eliminiamo il vincolo di appoggio in A , sostituendolo con una forza $X = \Phi_A$ verticale diretta verso l'alto (incognita iperstatica). Siamo allora nella situazione appena descritta, con $X = \Phi_A = F$; pertanto la trave subisce la deformazione ora calcolata, e la richiesta che lo spostamento dell'estremo A sia nullo, in modo da rispettare la presenza in A dell'appoggio, fornisce univocamente il valore dell'incognita iperstatica, e quindi la determinazione completa delle reazioni vincolari sull'asta:

$$y(\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \Phi_A = \frac{3}{8}p \quad \Rightarrow \quad \Phi_y = \frac{5}{8}p \quad \Rightarrow \quad M_0 = \frac{1}{8}p\ell. \quad \diamond$$

Esempio II. Come secondo esempio di calcolo di reazione vincolare iperstatica tramite la teoria della linea elastica, determiniamo le reazioni vincolari agenti su un'asta omogenea AB , di lunghezza ℓ e peso p , orizzontale, appoggiata negli estremi A e B e in un punto interno C , posto a $2/3\ell$ da A . Scegliamo un riferimento cartesiano $(A; x, y)$ con l'asse x diretto come l'asta e l'asse y verticale verso l'alto.

Assumiamo come incognita iperstatica $X = \Phi_C$ la reazione vincolare nell'appoggio interno C . Le equazioni cardinali del risultante e del momento, risolte rispetto alle reazioni Φ_A e Φ_B , hanno la soluzione

$$\Phi_A = \frac{1}{2}p - \frac{1}{3}X, \quad \Phi_B = \frac{1}{2}p - \frac{2}{3}X.$$

Detti M_f e \tilde{M}_f i momenti flettenti (antiorari) nei tratti AC ($0 \leq x \leq 2/3\ell$) e CB ($2/3\ell \leq x \leq \ell$), si ha allora

$$M_f(x) = \Phi_A x - p \frac{x^2}{2\ell}, \quad \tilde{M}_f(x) = \Phi_A x - p \frac{x^2}{2\ell} + X \left(x - \frac{2}{3}\ell \right).$$

Chiamando con $y = y(x)$ ($0 \leq x \leq 2/3\ell$) e $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ ($2/3\ell \leq x \leq \ell$) le equazioni cartesiane della curva secondo cui si pone la trave nel primo e nel secondo tratto, tali funzioni sono determinate dall'integrazione della corrispondente equazione di Eulero:

$$E J y''(x) = M_f(x) \quad \Rightarrow \quad E J y(x) = \Phi_A \frac{x^3}{6} - p \frac{x^4}{24\ell} + C_1 x + C_2$$

$$E J \tilde{y}''(x) = \tilde{M}_f(x) \quad \Rightarrow \quad E J \tilde{y}(x) = \Phi_A \frac{x^3}{6} - p \frac{x^4}{24\ell} + X \frac{1}{6} \left(x - \frac{2}{3}\ell \right)^3 + C_3 x + C_4.$$

Le costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni

$$y(0) = 0, \quad \tilde{y}(\ell) = 0; \quad y(2\ell/3) = \tilde{y}(2\ell/3), \quad y'(2\ell/3) = \tilde{y}'(2\ell/3);$$

le prime due rappresentano il passaggio delle linee $y(x)$ e $\tilde{y}(x)$ per gli appoggi in A e in B , la terza e la quarta la continuità del profilo della trave e della sua tangente nel punto C . Si ottiene così

$$C_1 = C_3 = p \frac{\ell^2}{24} - \Phi_A \frac{\ell^2}{6} - \frac{X \ell^2}{162}, \quad C_2 = C_4 = 0.$$

Sostituendo i valori delle costanti e delle reazioni vincolari nell'espressione di $\tilde{y}(x)$ (o di $y(x)$) si trova in particolare che il punto interno C ha uno spostamento verticale $\tilde{y}(2\ell/3)$ dato da

$$E J \tilde{y}\left(\frac{2}{3}\ell\right) = \frac{4}{243} \ell^3 \left(X - \frac{11}{6} p \right).$$

L'incognita iperstatica X deve essere tale che la curva passi per l'appoggio C ; imponendo quindi la condizione $\tilde{y}(2/3\ell) = 0$ si ha

$$X = \Phi_C = \frac{11}{16} p \quad \Rightarrow \quad \Phi_A = \frac{13}{48} p, \quad \Phi_B = \frac{1}{24} p.$$

Linea elastica e carico di punta. Come ulteriore esempio di applicazione del modello della linea elastica, consideriamo, in un riferimento cartesiano $(O; x, y)$, un'asta OA , di lunghezza ℓ e peso trascurabile, incernierata in O e con il secondo estremo A vincolato con un carrello liscio all'asse x . In questo caso abbiamo quindi una struttura isostatica.

Sul carrello è applicata una forza $\mathbf{F} = -q\mathbf{i}$, per cui, in condizioni di equilibrio, la reazione nella cerniera è data da $\Phi_x = q$, $\Phi_y = 0$, mentre la reazione nel carrello è nulla.

Vogliamo determinare se l'asta possiede, oltre alla ovvia configurazione di equilibrio indeformata $y(x) = 0$, altre configurazioni di equilibrio non rettilinee date da una curva di equazione $y = y(x)$. Nell'approssimazione lineare della linea elastica, il momento flettente Γ_z in un punto $P = (x, y(x))$ della curva è dato da

$$M_P = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_z(x) + \Phi_x y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_z(x) = -q y(x); \quad (22.21)$$

l'equazione di Eulero (22.16) diventa allora

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 \quad \left(\omega := \sqrt{\frac{q}{EJ}} \right)$$

con le condizioni al contorno

$$y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0$$

che tengono conto della cerniera in O e del carrello in A . Imponendo tali condizioni alla soluzione generale

$$y(x) = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$$

si trova

$$C_1 \sin(\omega \ell) = 0, \quad C_2 = 0;$$

pertanto se q è generico si ha $C_1 = 0$, e quindi la sola soluzione è data dalla configurazione indeformata $y(x) = 0$; se invece

$$\omega\ell = \pm k\pi \quad \text{e quindi} \quad q = \frac{EJ\pi^2}{\ell^2}k^2 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

si hanno delle configurazioni di tipo sinusoidale, di ampiezza C_1 indeterminata; il primo valore

$$q_{\text{crit}} = \frac{EJ\pi^2}{\ell^2}$$

è detto il *carico critico*.

Osservazione. Il fatto che si abbiano soluzioni corrispondenti a valori discreti del carico, con un'ampiezza indeterminata, deriva dall'uso dell'approssimazione lineare; in effetti, come del tutto intuitivo, abbandonando l'approssimazione lineare si dimostra che esistono configurazioni deformate per ogni valore del carico superiore al carico critico, con un'ampiezza che si determina esplicitamente. \diamond

Dinamica dei fili e delle verghe: l'equazione della corda vibrante. In vista dell'applicazione al caso della corda vibrante, accenniamo brevemente alle equazioni differenziali di moto, che si possono dedurre applicando ad ogni parte del continuo i teoremi della quantità di moto e del momento delle quantità di moto, tenendo conto del postulato di conservazione della massa (per maggiori dettagli, si veda la successiva deduzione delle equazioni analoghe per il caso più generale del continuo tridimensionale).

Se $\mathbf{a} = \mathbf{a}(s, t)$ e $\varrho = \varrho(s, t)$ sono rispettivamente l'accelerazione e la densità di un generico elemento di continuo di ascissa s , al tempo t , il sistema di equazioni di moto è dato da

$$\begin{cases} \varrho \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} + \mathbf{F} + \mathbf{\Phi} \\ \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial s} + \frac{\partial P}{\partial s} \wedge \mathbf{T} = 0 \end{cases} \quad (22.22)$$

Diversamente dal caso statico, le grandezze dipendono ora dal tempo oltre che dall'ascissa curvilinea s , per cui, *nell'ipotesi di continuo con densità costante assegnata*, le (22.22) sono un sistema di equazioni alle derivate parziali nelle incognite $P(s, t)$, $\mathbf{T}(s, t)$ e $\mathbf{\Gamma}(s, t)$; a tali equazioni vanno naturalmente aggiunte le condizioni iniziali, che specificano la configurazione e l'atto di moto del continuo per $t = t_0$, e le condizioni al contorno.

La prima equazione si riduce all'equazione del risultante nel caso statico; la seconda equazione è invariata rispetto al caso statico (a parte l'ovvia sostituzione delle derivate ordinarie con derivate parziali); in particolare, *per il filo sussiste quindi ancora, in ogni punto e ad ogni istante, il parallelismo tra tensione e direzione del filo*.

Venendo ora all'applicazione, consideriamo il moto di un filo inestendibile OA , con estremi O e A fissi, sotto le seguenti ipotesi:

(i) il filo ha densità costante ϱ .

(ii) non ci sono forze distribuite lungo il filo: $\mathbf{F} = \mathbf{\Phi} = 0$.

(iii) il filo è *molto teso*; con questa dizione intendiamo che O e A siano posti sull'asse x di un riferimento cartesiano $(O; x, y)$ a distanza ℓ , essendo ℓ la lunghezza del filo (cioè supponiamo che

durante il moto il filo subisca allungamenti trascurabili e che la configurazione del filo sia data da una funzione $y = y(x, t)$, con y piccolo e x identificato con l'ascissa curvilinea s). Dal punto di vista dinamico, intendiamo che il filo abbia una tensione \mathbf{T}_0 molto elevata nella configurazione orizzontale, e che durante il moto la variazione della componente orizzontale di tale tensione sia trascurabile, per cui scriviamo

$$\mathbf{T} = T_0 \mathbf{i} + T_y \mathbf{j} . \quad (22.23)$$

Cerchiamo ora soluzioni particolari dell'equazione di moto (22.22) che rappresentino *moti trasversali*, in cui cioè i punti del filo hanno velocità solo parallele all'asse y e quindi con $\partial x / \partial t = 0$. Con questa ipotesi, l'ascissa del generico punto P del filo non varia nel tempo, e la posizione di P è data da

$$P(x, t) = x \mathbf{i} + y(x, t) \mathbf{j} ; \quad (22.24)$$

derivando rispetto al tempo otteniamo quindi

$$\mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \frac{d^2 P(x, t)}{dt^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mathbf{j} .$$

Nell'ipotesi che il filo sia molto teso, si ha infine

$$T_y = T_x \frac{\partial y}{\partial x} = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} (T_0 \mathbf{i} + T_y \mathbf{j}) = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \mathbf{j} . \quad (22.25)$$

Inserendo tali risultati nell'equazione di moto (22.22), si verifica che essa ha solo la componente lungo y non identicamente nulla: l'equazione è data da

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 , \quad c := \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} . \quad (22.26)$$

Tale equazione è nota in fisica matematica come equazione di d'Alembert (o equazione della corda vibrante).

La costante c introdotta ha le dimensioni di una velocità, e rappresenta la velocità di propagazione delle onde trasversali nel filo. Si dimostra infatti che la soluzione più generale dell'equazione di d'Alembert può scriversi nella forma

$$y(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (22.27)$$

con F e G funzioni arbitrarie ⁽²⁴⁾; il primo addendo rappresenta un'onda che si propaga nel verso positivo dell'asse x con velocità c , il secondo un'onda che si propaga nel verso opposto con la stessa velocità.

²⁴Se effettuiamo il cambiamento di variabili indipendenti $u = x - ct$, $v = x + ct$, l'equazione (22.26) si scrive nella forma più semplice

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0 , \quad w(u, v) = y \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right) .$$

Tale equazione ha evidentemente la soluzione generale $w(u, v) = F(u) + G(v)$, da cui, tornando alle variabili iniziali x e t , segue la (22.27).

Come applicazione del precedente risultato generale, determiniamo la soluzione corrispondente alle condizioni iniziali

$$y(x, 0) = u(x) \quad \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = w(x) \quad (22.28)$$

con $u(0) = u(\ell) = 0$ e $w(0) = w(\ell) = 0$: il filo ha quindi estremi fissi e all'istante iniziale ha un profilo $u(x)$ e una distribuzione di velocità $w(x)$. Imponendo che F e G soddisfino le condizioni iniziali si ha allora dalle (22.27) e (22.28)

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = u(x) \\ -c F'(x) + c G'(x) = w(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2} u(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x w(\xi) d\xi \\ G(x) = \frac{1}{2} u(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x w(\xi) d\xi \end{cases}$$

Dalla (22.27) segue allora che la soluzione (dovuta a d'Alembert) è

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2} (u(x+ct) + u(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} w(\xi) d\xi - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x-ct} w(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} (u(x+ct) + u(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} w(\xi) d\xi . \end{aligned}$$

Ad esempio, se il filo è inizialmente in quiete a forma di senoide:

$$u(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{\ell} x\right), \quad w(x) = 0$$

la soluzione è

$$y(x, t) = \frac{a}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{\ell} (x+ct)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{\ell} (x-ct)\right) \right] = a \sin\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{\ell} ct\right) .$$

Se invece il filo è inizialmente rettilineo con distribuzione sinusoidale di velocità

$$u(x) = 0, \quad w(x) = v \sin\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)$$

la soluzione è data da

$$y(x, t) = -\frac{v\ell}{2\pi c} \left[\cos\left(\frac{\pi}{\ell} (x+ct)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{\ell} (x-ct)\right) \right] = \frac{v\ell}{\pi c} \sin\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{\ell} ct\right) .$$

23 Continui deformabili: postulati generali.

Premettiamo alcune notazioni. Consideriamo un corpo continuo deformabile che occupa una regione $V \subset \mathbf{R}^3$, in generale variabile nel tempo. Il contorno $S = \partial V$ di V sia regolare, cioè dotato in ogni punto di versore normale \mathbf{N} , uscente da V , dipendente con continuità dalla posizione (più in generale, S può essere unione di un numero finito di superfici regolari). Indichiamo poi con τ una generica parte interna di V , che per semplicità supponiamo semplicemente connessa e arbitrariamente scelta; il contorno regolare $\sigma = \partial\tau$ ha normale uscente \mathbf{n} .

Nella deduzione delle equazioni per i continui deformabili è utile far uso di alcuni risultati noti dal calcolo differenziale in \mathbf{R}^3 , e che qui si richiamano senza darne la dimostrazione.

Il primo teorema è importante per dedurre dall'annullamento di integrali di volume di funzioni continue delle relazioni valide in ogni punto del continuo.

23.1 Teorema. *Sia $\mathbf{w} \in C^0(\tau, \mathbf{R}^3)$ un campo vettoriale continuo e integrabile in un volume τ , arbitrariamente scelto. È allora*

$$\int_{\tau} \mathbf{w} d\tau = 0 \quad \forall \tau \quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{w} = 0. \quad (23.1)$$

Il secondo risultato è una generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo integrale in \mathbf{R} , e stabilisce una relazione tra un integrale su un dominio τ ed un integrale sul bordo $\sigma = \partial\tau$ di τ , di normale uscente \mathbf{n} (\mathbf{n} continuo su σ).

23.2 Teorema (Green). *Sia $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, y, z) \in C^1(\tau, \mathbf{R}^3)$, $\mathbf{w} \in C^0(\sigma, \mathbf{R}^3)$. Si ha*

$$\int_{\tau} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{w} n_x d\sigma \quad (23.2)$$

(analogamente per $\partial \mathbf{w} / \partial y$ e $\partial \mathbf{w} / \partial z$).

Dal teorema di Green discendono altri due teoremi, quello di Gauss e quello del trasporto (o di Reynolds).

Il teorema di Gauss stabilisce una relazione tra la divergenza $\text{div } \mathbf{w}$ di un campo vettoriale ⁽²⁵⁾ e il flusso uscente $\Phi_{\sigma}(\mathbf{w}) := \int_{\sigma} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ del campo attraverso la superficie σ :

23.3 Teorema (Gauss). *Siano $\mathbf{w} \in C^1(\tau, \mathbf{R}^3)$ un campo vettoriale, σ il bordo di τ , con normale uscente \mathbf{n} . È allora*

$$\int_{\tau} \text{div } \mathbf{w} d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (23.3)$$

Infine sia $\tau = \tau(t)$ il dominio, variabile nel tempo, occupato da una porzione di continuo e sia $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ la distribuzione di velocità (atto di moto) dei punti del continuo: il teorema del trasporto (o di Reynolds) permette di calcolare la derivata temporale di un integrale di volume esteso al dominio τ .

²⁵Come noto, utilizzando coordinate cartesiane ortogonali la divergenza di un campo vettoriale \mathbf{w} è il campo scalare

$$\text{div } \mathbf{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

23.4 Teorema (Reynolds). Siano $\tau(t) \subset \mathbf{R}^3$ un dominio regolare, dipendente dal tempo, e $f = f(x, y, z, t) \in C^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$. È allora

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} f d\tau = \int_{\tau(t)} \left(\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\tau . \quad (23.4)$$

Osservazioni.

(i) È immediato dimostrare che questo risultato vale anche per un campo vettoriale: nel seguito useremo il teorema anche nella forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \mathbf{w} d\tau = \int_{\tau} \left(\frac{d\mathbf{w}}{dt} + \mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\tau \quad \mathbf{w} \in C^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^3) .$$

(ii) In termini del campo di velocità \mathbf{v} , la derivata totale df/dt di ogni campo scalare $f = f(x(t), y(t), z(t), t)$ è data da

$$\frac{df}{dt} := \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

e quindi può essere espressa nella forma

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f .$$

Utilizzando l'identità

$$\operatorname{div}(f\mathbf{w}) = f \operatorname{div} \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} f ,$$

valida per f e \mathbf{w} è allora

$$\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\mathbf{v}) ;$$

il teorema di Reynolds può quindi essere espresso, invece che dalla (23.4), nella forma equivalente

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} f d\tau = \int_{\tau(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\mathbf{v}) \right) d\tau . \quad (23.5)$$

(iii) In modo del tutto analogo, la derivata totale $d\mathbf{w}/dt$ di un campo vettoriale $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, y, z, t)$ è data da

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} := \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} ;$$

introducendo l'operatore differenziale $\mathbf{v} \cdot \nabla$ definito da ⁽²⁶⁾

$$\mathbf{v} \cdot \nabla := v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (23.6)$$

²⁶La notazione si giustifica vedendo $v_x \partial/\partial x + v_y \partial/\partial y + v_z \partial/\partial z$ come l'espressione cartesiana del prodotto scalare tra il vettore \mathbf{v} ed il "vettore" ∇ dato dall'operatore differenziale vettoriale

$$\nabla := \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} .$$

abbiamo allora

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{w} . \quad (23.7)$$

(iv) In letteratura la derivata totale rispetto al tempo t è anche detta *derivata convettiva* ed indicata con D/Dt , per cui si scrive

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f\mathbf{v}) , \quad \frac{D\mathbf{w}}{Dt} \equiv \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{w} . \quad \diamond \quad (23.8)$$

Alcune conseguenze ed applicazioni del teorema di Reynolds sono le seguenti.

- Assumendo $f = \text{costante}$ il teorema fornisce la variazione temporale del volume:

$$\frac{d\tau}{dt} = \int_{\tau} \text{div}\mathbf{v} \, d\tau ;$$

per un volumetto infinitesimo $\delta\tau$ si ha infine

$$\frac{d(\delta\tau)}{dt} = \text{div}\mathbf{v} \, \delta\tau .$$

Queste relazioni danno il significato intrinseco della divergenza del campo di velocità come misura della variazione temporale dell'elemento di volume; in particolare quindi la condizione di *incomprimibilità* (o *incompressibilità*) è tradotta dalla condizione di divergenza nulla (o *solenoidalità*):

$$\text{incomprimibilità} \quad \Leftrightarrow \quad \text{div}\mathbf{v} = 0 . \quad (23.9)$$

Ricordando la definizione (6.9) della matrice velocità di deformazione, e il fatto che $\text{tr}\mathcal{D} = \text{div}\mathbf{v}$, abbiamo allora che nel caso *incomprimibile* non si ha variazione di volume, ma in generale si ha deformazione: $\text{tr}\mathcal{D} = 0$, $\mathcal{D} \neq 0$: nel caso dell'atto di moto rigido non si ha variazione di volume e neppure deformazione: $\mathcal{D} \equiv 0$.

- Utilizzando le (23.3) e (23.5), il teorema di Reynolds può anche essere scritto nella forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} f \, d\tau = \Phi_{\sigma}(f\mathbf{v}) + \int_{\tau} \frac{\partial f}{\partial t} \, d\tau ,$$

facendo comparire il flusso (uscente) $\Phi_{\sigma}(f\mathbf{v})$ del campo $f\mathbf{v}$ attraverso il contorno σ di τ .

- Assumendo come funzione f la densità materiale ϱ del continuo, il teorema del trasporto fornisce la variazione temporale della massa $m = \int_{\tau} \varrho \, d\tau$ contenuta nel volume τ :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \varrho \, d\tau = \int_{\tau} \left(\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \, \text{div}\mathbf{v} \right) \, d\tau = \int_{\tau} \left(\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \text{div}(\varrho\mathbf{v}) \right) \, d\tau . \quad (23.10)$$

Il primo postulato della meccanica dei continui è quello, già ripetutamente utilizzato nella meccanica del punto e dei corpi rigidi, della *Conservazione della massa*: la massa m contenuta in un generico volume τ del continuo è costante nel tempo: $dm/dt = 0$. Dalla (23.10) segue allora che l'integrale a secondo membro è nullo per ogni volume τ , per cui, in base al Teorema 23.1, la densità ed il campo di velocità devono soddisfare, in ogni punto del continuo ed in ogni istante, l'equazione differenziale (alle derivate parziali)

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \, \text{div}\mathbf{v} = 0 , \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \text{div}(\varrho\mathbf{v}) = 0 . \quad (23.11)$$

Tale equazione è detta anche *equazione di continuità*.

Se il continuo è *omogeneo*, la densità è dipende solo dal tempo: $\varrho = \varrho(t)$; in tal caso l'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 ;$$

se il continuo è *incomprimibile* si ha, come detto, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, per cui l'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varrho = 0 ;$$

pertanto *la densità è costante se e solo se il continuo è omogeneo e incomprimibile*

$$\varrho = \text{costante} \Leftrightarrow \text{continuo omogeneo e incomprimibile} .$$

• Consideriamo ora un generico campo scalare f e l'integrale $\int_{\tau} \varrho f d\tau$, essendo ϱ la densità; utilizzando il teorema di Reynolds e la legge di conservazione della massa è allora

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \varrho f d\tau = \int_{\tau} \left(\frac{d}{dt}(\varrho f) + (\varrho f) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\tau = \int_{\tau} \left(\varrho \frac{df}{dt} + f \left(\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right) d\tau = \int_{\tau} \varrho \frac{df}{dt} d\tau ,$$

per cui vale la relazione

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \varrho f d\tau = \int_{\tau} \varrho \frac{df}{dt} d\tau . \quad (23.12)$$

Questo risultato si estende immediatamente ad un generico campo vettoriale \mathbf{w} , per cui abbiamo

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \varrho \mathbf{w} d\tau = \int_{\tau} \varrho \frac{d\mathbf{w}}{dt} d\tau . \quad (23.13)$$

Tenendo conto di questo risultato, possiamo ora scrivere le derivate temporali della quantità di moto \mathbf{Q} e del momento delle quantità di moto $\mathbf{\Gamma}_0$ per un generico volume τ di continuo

$$\mathbf{Q} := \int_{\tau} \varrho \mathbf{v} d\tau, \quad \mathbf{\Gamma}_0 := \int_{\tau} (P - O) \wedge \varrho \mathbf{v} d\tau . \quad (23.14)$$

Applicando la (23.13) con $\mathbf{w} = \varrho \mathbf{v}$ otteniamo

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \int_{\tau} \varrho \mathbf{a} d\tau , \quad (23.15)$$

dove $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ è il campo di accelerazione nel continuo.

In modo del tutto analogo, prendendo $\mathbf{w} = (P - O) \wedge \varrho \mathbf{v}$ si calcola la derivata del momento delle quantità di moto; supponendo per semplicità che O sia un punto fisso e ricordando che $d/dt((P - O) \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + (P - O) \wedge \mathbf{a} = (P - O) \wedge \mathbf{a}$ otteniamo

$$\frac{d\mathbf{\Gamma}_0}{dt} = \int_{\tau} (P - O) \wedge \varrho \mathbf{a} d\tau . \quad (23.16)$$

I postulati generali della meccanica dei continui.

Con queste premesse, scriveremo le equazioni della meccanica dei continui deformabili come un sistema di equazioni alle derivate parziali nelle incognite ϱ e \mathbf{v} (densità e campo di velocità), che otterremo imponendo i seguenti postulati.

(P1) Conservazione della massa. *La massa contenuta in ogni volume $\tau \subset V$, arbitrariamente scelto, è costante nel tempo.*

Come già visto, tale postulato si traduce nell'equazione differenziale (23.11).

(P2) Equazioni cardinali. *Per ogni volume $\tau \subset V$, arbitrariamente scelto, sono soddisfatte le equazioni cardinali esprimenti i teoremi della quantità di moto e del momento delle quantità di moto.*

Per il secondo postulato, dobbiamo scrivere esplicitamente le equazioni

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}, \quad \frac{d\mathbf{\Gamma}_0}{dt} = \mathbf{M}_0 \quad (23.17)$$

assumendo per semplicità O punto fisso.

Le derivate temporali a primo membro sono date dalle (23.15) e (23.16); a secondo membro delle (23.17), \mathbf{R} e \mathbf{M}_0 sono il risultante ed il momento delle forze esterne esercitate sul volume τ .

Nel modello che adotteremo qui di seguito, accanto alle forze di volume (elettriche, gravitazionali, ecc.) dovremo considerare come forze esterne sul dominio τ anche le forze di superficie, esercitate attraverso il contorno σ , dovute all'interazione degli elementi superficiali di τ con gli elementi superficiali dell'insieme complementare $V \setminus \tau$ (forze a corto range). *Il modello ora assunto deve essere quindi completato da un' ipotesi sulla natura e le proprietà delle forze che si esercitano tra le varie parti di un continuo deformabile attraverso una generica superficie di separazione* (si veda quanto già detto per la tensione \mathbf{T} e la coppia $\mathbf{\Gamma}$ nel caso di un continuo monodimensionale).

24 Stato di sforzo.

Siano dati un punto P interno al continuo, ed una superficie σ passante per P , di normale \mathbf{n} , che idealmente divide il continuo in due parti. Consideriamo le forze interne al continuo, dovute alle interazioni a corto range tra gli strati molecolari vicini alla superficie σ che una parte del continuo, quella verso cui punta \mathbf{n} , esercita sull'altra parte attraverso un elemento di superficie $\Delta\sigma$ passante per P e di normale \mathbf{n} (*convenzione della normale uscente*). Supponiamo che tali forze siano descritte da un risultante $\Delta\mathbf{R}$ e da una coppia di momento $\Delta\mathbf{C}$, e consideriamo le corrispondenti grandezze specifiche $\Delta\mathbf{R}/\Delta\sigma$ e $\Delta\mathbf{C}/\Delta\sigma$, passando al limite per elementi di superficie tendenti a 0, *mantenendo fissa la direzione \mathbf{n} ed il punto P* .

Nel modello di continuo che consideriamo, si assume il seguente postulato.

Postulato. *Dato un generico punto interno al continuo, per ogni orientazione \mathbf{n} esistono i limiti di $\Delta\mathbf{R}/\Delta\sigma$ e di $\Delta\mathbf{C}/\Delta\sigma$ ed è*

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta\sigma} = \mathbf{p}_n, \quad \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{C}}{\Delta\sigma} = 0. \quad (24.1)$$

Osservazioni.

(i) Il vettore \mathbf{p}_n , in generale dipendente dal punto P e dal tempo t , è definito lo *sforzo specifico interno* relativo al punto P ed alla normale \mathbf{n} . Osserviamo subito che tale vettore è incognito, e non si ha in particolare alcuna informazione sulla sua direzione; l'indice \mathbf{n} non indica quindi la direzione del vettore, ma quella della superficie attraverso cui si misurano le forze: il vettore \mathbf{p}_n potrebbe essere diretto come \mathbf{n} (sforzo normale) o ortogonale (sforzo tangenziale o di taglio), ma in generale avrà sia componente normale che di taglio.

(ii) Con abuso di linguaggio, abbreviamo la scrittura (24.1) scrivendo $\mathbf{p}_n = \frac{d\mathbf{f}}{d\sigma}$, ovvero diciamo che la forza esercitata da una parte di continuo su un'altra attraverso una superficie infinitesima $d\sigma$ di normale (uscente) \mathbf{n} è $d\mathbf{f} = \mathbf{p}_n d\sigma$.

(iii) Dalla definizione di sforzo specifico interno ora introdotta, e dal principio di azione e reazione, che *postuliamo valido anche in meccanica dei continui deformabili*, segue che in ogni punto e in ogni istante, e per ogni direzione \mathbf{n} , è

$$\mathbf{p}_{-\mathbf{n}} = -\mathbf{p}_n. \quad (24.2)$$

(iv) Nel modello assunto, si postula che il limite per $\Delta\mathbf{C}/\Delta\sigma$ sia nullo; in modelli più generali di continuo (*continui micropolari*) si ammette l'esistenza di un limite non nullo per $\Delta\mathbf{C}/\Delta\sigma$ (*microcoppie*) ⁽²⁷⁾. \diamond

In base al postulato di Cauchy sullo stato di sforzo, la sollecitazione interna in un generico punto del continuo è descritta da una collezione di (infiniti) vettori, ciascuno per ogni direzione \mathbf{n} ; si dimostra però, come *diretta conseguenza della validità della prima equazione cardinale della dinamica*, che lo sforzo \mathbf{p}_n è noto se sono noti gli sforzi relativi a tre direzioni indipendenti (che assumeremo per comodità come direzioni ortogonali x, y, z), essendo esprimibile come loro combinazione lineare; precisamente, vale il seguente fondamentale risultato, dovuto a Cauchy.

²⁷Un esempio di materiali in cui si considerano anche le microcoppie è dato dai cosiddetti cristalli liquidi, modellizzati già nella prima metà del secolo scorso e di recente ampia applicazione.

24.1 Relazione di Cauchy. In ogni punto $P \in V$ interno del continuo, e in ogni istante, lo sforzo specifico interno \mathbf{p}_n relativo ad una generica direzione \mathbf{n} (di coseni direttori n_x, n_y, n_z) è dato dalla combinazione lineare degli sforzi relativi alle direzioni x, y, z :

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_x n_x + \mathbf{p}_y n_y + \mathbf{p}_z n_z . \quad (24.3)$$

Dimostrazione. La relazione di Cauchy si ottiene scrivendo il teorema della quantità di moto per il più semplice volume che coinvolga quattro direzioni (un tetraedro a facce piane) e passando al limite al tendere a zero del volume.

Precisamente, consideriamo una terna cartesiana ortogonale $(P; x, y, z)$ centrata nel generico punto $P \in V$ interno al continuo; come elemento di volume $\tau \subset V$ consideriamo un tetraedro di vertici $P = (0, 0, 0)$, $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$, $C = (0, 0, c)$, con tre facce di normali uscenti $-\mathbf{i}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k}$ ed aree rispettive $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, e con una faccia obliqua di normale uscente \mathbf{n} ed area σ_n .

Scriviamo ora che per il tetraedro è soddisfatta la prima equazione cardinale della dinamica, cioè il teorema della quantità di moto:

$$\int_{\tau} \rho \mathbf{a} d\tau = \int_{\tau} \mathbf{F} d\tau + \int_{\sigma_n} \mathbf{p}_n d\sigma + \int_{\sigma_x} \mathbf{p}_{-x} d\sigma + \int_{\sigma_y} \mathbf{p}_{-y} d\sigma + \int_{\sigma_z} \mathbf{p}_{-z} d\sigma ,$$

dove \mathbf{F} è la forza specifica di volume; tenendo conto del principio di azione e reazione (24.2) possiamo scrivere l'equazione nella forma

$$\int_{\tau} (\rho \mathbf{a} - \mathbf{F}) d\tau = \int_{\sigma_n} \mathbf{p}_n d\sigma - \int_{\sigma_x} \mathbf{p}_x d\sigma - \int_{\sigma_y} \mathbf{p}_y d\sigma - \int_{\sigma_z} \mathbf{p}_z d\sigma . \quad (24.4)$$

Facciamo ora alcune osservazioni.

(i) Per una proprietà di geometria elementare in un tetraedro a facce piane i rapporti tra le aree delle facce ortogonali e della faccia obliqua sono dati dai coseni direttori della normale uscente alla faccia obliqua, per cui si ha:

$$\sigma_x = n_x \sigma_n \quad \sigma_y = n_y \sigma_n \quad \sigma_z = n_z \sigma_n . \quad (24.5)$$

(ii) Se indichiamo con ϵ il massimo spigolo del tetraedro, il volume è dell'ordine di ϵ^3 , mentre le aree sono dell'ordine di ϵ^2 , per cui

$$\frac{\tau}{\sigma_n} = O(\epsilon) . \quad (24.6)$$

(iii) Supponiamo che tutti i campi vettoriali che stiamo considerando ($\rho \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{p}_n, \dots, \mathbf{p}_z$) siano $C^1(V)$; detto \mathbf{w} uno qualunque di tali campi, siano R un generico punto di τ e Q un generico punto delle facce costituenti il suo contorno: si ha allora

$$\mathbf{w}(R) = \mathbf{w}(P) + \mathbf{O}(\epsilon) , \quad \mathbf{w}(Q) = \mathbf{w}(P) + \mathbf{O}(\epsilon)$$

dove con tale notazione intendiamo che esistono due costanti K e K' tali che

$$|\mathbf{w}(R) - \mathbf{w}(P)| \leq K \epsilon , \quad |\mathbf{w}(Q) - \mathbf{w}(P)| \leq K' \epsilon .$$

Da tale osservazione (e dal fatto che $\tau = O(\epsilon^3)$ e $\sigma = O(\epsilon^2)$) segue che per ogni campo vettoriale $\mathbf{w} \in C^1(V)$, per ogni volume τ e ogni superficie σ possiamo scrivere

$$\int_{\tau} \mathbf{w} d\tau = \mathbf{w}(P) \tau + \mathbf{O}(\epsilon^4) , \quad \int_{\sigma} \mathbf{w} d\sigma = \mathbf{w}(P) \sigma + \mathbf{O}(\epsilon^3) . \quad (24.7)$$

Fatte tali premesse, torniamo ora all'equazione (24.4). Applicando le (24.7) (24.5) alla (24.4) e tralasciando di indicare esplicitamente la dipendenza dei campi vettoriali dal punto P possiamo scrivere

$$(\varrho \mathbf{a} - \mathbf{F}) \tau + \mathbf{O}(\epsilon^4) = (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_x n_x - \mathbf{p}_y n_y - \mathbf{p}_z n_z) \sigma_n + \mathbf{O}(\epsilon^3) ;$$

dividendo per σ_n e tenendo presente la (24.6) otteniamo

$$(\varrho \mathbf{a} - \mathbf{F}) O(\epsilon) + \mathbf{O}(\epsilon^2) = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_x n_x - \mathbf{p}_y n_y - \mathbf{p}_z n_z + \mathbf{O}(\epsilon) . \quad (24.8)$$

Il risultato (24.3) si ottiene allora facendo tendere al punto P i vertici A, B, C del tetraedro, cioè considerando il limite per $\epsilon \mapsto 0$. \square

Una conseguenza immediata della relazione di Cauchy è la dimostrazione formale del fatto che se gli sforzi sono normali allora sono isotropi (sperimentalmente, questo fatto era noto già prima di Cauchy per i fluidi, e costituisce il cosiddetto *principio di isotropia di Pascal*). Precisamente, chiamiamo *normale lo stato di sforzo in un punto se per ogni direzione \mathbf{n} il vettore \mathbf{p}_n è parallelo a \mathbf{n}* ; dalla relazione di Cauchy segue allora il seguente corollario.

24.2 Corollario. *Se in un punto del continuo lo sforzo è normale allora è isotropo.*

Dimostrazione. Per definizione, se lo sforzo in un punto è normale si ha

$$\mathbf{p}_x = p_x \mathbf{i}, \quad \mathbf{p}_y = p_y \mathbf{j}, \quad \mathbf{p}_z = p_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_n = p_n \mathbf{n} \quad (24.9)$$

dove p_x, p_y, p_z, p_n sono funzioni scalari, a priori diverse; inserendo le (24.9) nella (24.3) si ottiene allora

$$p_n \mathbf{n} = p_x \mathbf{i} n_x + p_y \mathbf{j} n_y + p_z \mathbf{k} n_z ;$$

proiettando questa equazione vettoriale sugli assi cartesiani x, y, z si ottiene $p_x = p_y = p_z = p_n$ e quindi l'isotropia, cioè l'indipendenza del valore dello sforzo dalla direzione. \square

Osservazione. In base alla relazione di Cauchy, lo stato di sforzo in ogni punto e ad ogni istante è determinato dando tre campi vettoriali; in modo più preciso, l'ente che descrive questa situazione è un *tensore doppio* , ma per quello che verrà utilizzato nel seguito è sufficiente associare ad ogni punto del continuo una matrice 3×3 , denotata con \mathcal{P} e chiamata *matrice degli sforzi*, le cui righe sono date dalle componenti cartesiane dei tre sforzi specifici; si ha allora

$$\mathcal{P}_{ik} = k\text{-sima componente dello sforzo } \mathbf{p}_i = p_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3); \quad (24.10)$$

gli elementi diagonali sono allora gli sforzi normali, mentre gli elementi fuori dalla diagonale rappresentano gli sforzi di taglio. \diamond

Introducendo, con notazione matriciale, i vettori colonna \mathbf{p}_n dello sforzo e \mathbf{n} del versore normale

$$\mathbf{p}_n := \begin{pmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{pmatrix} \quad \mathbf{n} := \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

la relazione di Cauchy può allora scriversi nella forma

$$\mathbf{p}_n = \mathcal{P}^T \mathbf{n}.$$

Se lo sforzo è normale, e quindi isotropo, si ha $p_{ik} = 0$ per $i \neq k$ e $p_{11} = p_{22} = p_{33}$; indicando con $-p$ il valore comune dei tre sforzi normali, la matrice degli sforzi è semplicemente un multiplo della matrice identità 3×3 $\mathcal{I} = \text{diag}(1, 1, 1)$, si ha cioè : $\mathcal{P} = -p\mathcal{I}$; le proprietà dello stato di sforzo sono allora date essenzialmente dal solo scalare p (come vedremo, nel caso dei fluidi in equilibrio tale scalare è la usuale pressione idrostatica).

25 Equazioni di moto e di equilibrio.

Introdotta lo stato di sforzo e le sue principali proprietà, possiamo ora scrivere le equazioni generali di moto e di equilibrio valide in ogni punto del continuo.

Consideriamo un continuo che occupa, al generico istante t , un volume $V \subset \mathbf{R}^3$, di contorno regolare S e normale uscente \mathbf{N} , ed un generico elemento $\tau \subset V$, di contorno regolare σ e normale uscente \mathbf{n} . Sia \mathbf{F} la forza specifica di volume distribuita in V , e \mathbf{f} la forza specifica di superficie distribuita sul contorno S ; in ogni punto sul contorno σ del generico elemento τ le forze specifiche interne, applicate a τ dalle altre parti di V , sono date, per definizione di sforzo specifico interno, da \mathbf{p}_n .

L'equazione della quantità di moto. Il risultante delle forze esterne applicate a τ è allora:

$$\mathbf{R} = \int_{\tau} \mathbf{F} d\tau + \int_{\sigma} \mathbf{p}_n d\sigma .$$

Trasformiamo ora l'integrale di superficie in un integrale di volume, utilizzando la relazione di Cauchy (24.3) ed il teorema di Green:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \mathbf{p}_n d\sigma &\stackrel{(24.3)}{=} \int_{\sigma} \mathbf{p}_x n_x d\sigma + \int_{\sigma} \mathbf{p}_y n_y d\sigma + \int_{\sigma} \mathbf{p}_z n_z d\sigma \\ &\stackrel{(23.2)}{=} \int_{\tau} \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} d\tau + \int_{\tau} \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} d\tau + \int_{\tau} \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} d\tau . \end{aligned}$$

Ricordando allora l'espressione (23.15) della derivata della quantità di moto, il teorema della quantità di moto (23.17), che vale per il postulato (P2), implica

$$\int_{\tau} \rho \mathbf{a} d\tau = \int_{\tau} \left(\mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \right) d\tau .$$

Nell'ipotesi che gli integrandi nei due membri siano continui, dall'arbitrarietà di τ segue allora, per il teorema 23.1, che in ogni punto del continuo deve essere soddisfatta l'equazione differenziale

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} , \quad (25.1)$$

detta *l'equazione della quantità di moto*. Tale equazione è detta anche *equazione della divergenza degli sforzi*, intendendo per divergenza dello sforzo il campo vettoriale \mathbf{S} definito da

$$\mathbf{S} := \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} ; \quad (25.2)$$

scriveremo quindi più brevemente la (25.1) nella forma

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{S} .$$

Per esprimere l'equazione ora ottenuta in termini della densità ρ e del campo di velocità \mathbf{v} , occorre scrivere il campo di accelerazione $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z, t)$ in funzione di $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$; ricordando

la (23.7) abbiamo allora

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} \quad (25.3)$$

per cui l'equazione della quantità di moto si scrive nella forma

$$\varrho \left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} \right) = \mathbf{F} + \mathbf{S} . \quad (25.4)$$

L'equazione del momento delle quantità di moto. Consideriamo il teorema del momento delle quantità di moto (23.17), che per semplicità scriviamo rispetto ad un punto fisso O . Il momento delle forze esterne relative al volume τ è dato dal momento delle forze di volume distribuite in τ e dal momento degli sforzi sul contorno σ

$$\mathbf{M}_0 = \int_{\tau} (P - O) \wedge \mathbf{F} \, d\tau + \int_{\sigma} (Q - O) \wedge \mathbf{p}_n \, d\sigma ,$$

dove P e Q rappresentano il generico punto nel volume τ e, rispettivamente, sul contorno σ . Consideriamo il secondo integrale, che rappresenta il momento degli sforzi; per trasformarlo in un integrale di volume, applichiamo ancora la relazione di Cauchy ed il teorema di Green ottenendo

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} (Q - O) \wedge \mathbf{p}_n \, d\sigma &\stackrel{(24.3)}{=} \int_{\sigma} (Q - O) \wedge \mathbf{p}_x n_x \, d\sigma + \int_{\sigma} (Q - O) \wedge \mathbf{p}_y n_y \, d\sigma + \int_{\sigma} (Q - O) \wedge \mathbf{p}_z n_z \, d\sigma \\ &\stackrel{(23.2)}{=} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x} ((P - O) \wedge \mathbf{p}_x) \, d\tau + \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial y} ((P - O) \wedge \mathbf{p}_y) \, d\tau + \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial z} ((P - O) \wedge \mathbf{p}_z) \, d\tau . \end{aligned}$$

Consideriamo il primo integrale nell'ultimo termine: ricordando che $\partial(P - O)/\partial x = \mathbf{i}$, si ha allora

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x} ((P - O) \wedge \mathbf{p}_x) \, d\tau = \int_{\tau} \mathbf{i} \wedge \mathbf{p}_x \, d\tau + \int_{\tau} (P - O) \wedge \frac{\partial\mathbf{p}_x}{\partial x} \, d\tau :$$

un risultato del tutto analogo si ottiene naturalmente per il secondo e terzo integrale, sostituendo x, \mathbf{p}_x con y, \mathbf{p}_y e con z, \mathbf{p}_z .

Da tale risultato e dall'espressione (23.16) della derivata del momento delle quantità di moto, segue allora che l'equazione (23.17) che esprime il teorema del momento delle quantità di moto (Postulato (P2)) si può porre nella forma

$$\int_{\tau} (P - O) \wedge \left(\varrho \mathbf{a} - \mathbf{F} - \frac{\partial\mathbf{p}_x}{\partial x} - \frac{\partial\mathbf{p}_y}{\partial y} - \frac{\partial\mathbf{p}_z}{\partial z} \right) \, d\tau = \int_{\tau} (\mathbf{i} \wedge \mathbf{p}_x + \mathbf{j} \wedge \mathbf{p}_y + \mathbf{k} \wedge \mathbf{p}_z) \, d\tau .$$

²⁸Può essere utile scrivere il campo di accelerazione in una forma equivalente utilizzando l'identità vettoriale

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{v}$$

(che si può dimostrare agevolmente utilizzando coordinate cartesiane ortogonali), per cui

$$\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{v} .$$

Per l'equazione (25.1), l'integrale a primo membro è identicamente nullo; con le usuali ipotesi di continuità dell'integrando e di arbitrarietà di τ , dal secondo membro segue allora che in ogni punto del continuo deve valere l'equazione

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{p}_x + \mathbf{j} \wedge \mathbf{p}_y + \mathbf{k} \wedge \mathbf{p}_z = 0 . \quad (25.5)$$

Tale equazione è anche detta l'equazione della *simmetria* degli sforzi. Infatti proiettando la (25.5) sull'asse x si ottiene (ricordando la proprietà ciclica del prodotto misto)

$$0 = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{i} \wedge \mathbf{p}_x + \mathbf{j} \wedge \mathbf{p}_y + \mathbf{k} \wedge \mathbf{p}_z) = \mathbf{p}_y \cdot \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + \mathbf{p}_z \cdot \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = p_{yz} - p_{zy} \quad (25.6)$$

da cui $p_{yz} = p_{zy}$. Analogamente, proiettando sull'asse y segue che $p_{xz} = p_{zx}$ e proiettando sull'asse z si ha $p_{xy} = p_{yx}$, per cui il teorema del momento delle quantità di moto implica la simmetria della matrice degli sforzi:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^T . \quad (25.7)$$

Riassumendo i risultati sin qui ottenuti, per un generico continuo in moto la densità ϱ , il campo di velocità \mathbf{v} e lo stato di sforzo \mathcal{P} devono soddisfare il sistema di equazioni alle derivate parziali

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0 \\ \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{p}_x + \mathbf{j} \wedge \mathbf{p}_y + \mathbf{k} \wedge \mathbf{p}_z = 0 \end{cases} \quad (25.8)$$

Nel caso particolare di equilibrio, tali equazioni diventano più semplicemente

$$\begin{cases} \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} = 0 \\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{p}_x + \mathbf{j} \wedge \mathbf{p}_y + \mathbf{k} \wedge \mathbf{p}_z = 0 \end{cases} \quad (25.9)$$

Accanto alle (25.8), occorre aggiungere le condizioni iniziali per la densità ed il campo di velocità:

$$\varrho(P, t_0) = \varrho_0(P) , \quad \mathbf{v}(P, t_0) = \mathbf{v}_0(P) \quad (25.10)$$

e le condizioni al contorno, che sono date da

$$\mathbf{p}_N(Q, t) = \mathbf{f}(Q, t) \quad \forall Q \in S \quad (25.11)$$

dove \mathbf{f} è la forza specifica distribuita sulla superficie S del volume V e \mathbf{N} è la normale uscente di S ⁽²⁹⁾.

²⁹La condizione al contorno può ricavarsi applicando, ad esempio, il teorema della quantità di moto ad un parallelepipedo superficiale di altezza ϵ , le cui basi sono date da una faccia esterna σ , di normale \mathbf{N} , su cui è applicata la forza \mathbf{f} , ed una faccia interna σ' , di normale \mathbf{n} , su cui agisce lo sforzo \mathbf{p}_n . Passando al limite per $\epsilon \rightarrow 0$, i termini di volume ed i contributi degli sforzi relativi alle quattro facce di altezza ϵ sono trascurabili, mentre $\sigma' \mapsto \sigma$ e $\mathbf{n} \mapsto -\mathbf{N}$ e quindi $\mathbf{p}_n \mapsto \mathbf{p}_{-\mathbf{N}} = -\mathbf{p}_N$; l'equazione della quantità di moto diventa allora $(\mathbf{f} - \mathbf{p}_N) \sigma = 0$, da cui la (25.11) per l'arbitrarietà di σ .

In conclusione, scontando la simmetria degli sforzi, le equazioni differenziali che reggono la dinamica dei continui deformabili sono l'equazione di continuità e l'equazione della quantità di moto, date dalle prime due equazioni del sistema (25.8); abbiamo cioè quattro equazioni alle derivate parziali nelle 10 incognite rappresentate dalla densità ρ , dal campo di velocità \mathbf{v} e dalle sei componenti indipendenti della matrice simmetrica degli sforzi ⁽³⁰⁾. Tali equazioni, che hanno una validità del tutto generale, non sono quindi sufficienti a determinare il moto se non si introducono delle *relazioni costitutive* che permettano di esprimere la dipendenza dello stato di sforzo dal campo di velocità e dalla densità; *tali relazioni sono caratteristiche del modello particolare di corpo continuo che si intende analizzare, e ne costituiscono in un certo senso la definizione meccanica.*

Diamo infine la scrittura esplicita, in componenti cartesiane ortogonali, delle equazioni sino ad ora ottenute. Adottando la notazione indiciale per le coordinate ($x = x_1, y = x_2, z = x_3$), per le componenti w_i dei vettori e p_{ik} della matrice degli sforzi ($p_{xx} = p_{11}, p_{xy} = p_{12}$ etc.), le (25.8) si scrivono nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = F_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} \\ p_{ki} = p_{ik} \end{array} \right. \quad (25.12)$$

L'espressione $\sum_k \partial p_{ki} / \partial x_k$ giustifica la denominazione di *divergenza dello sforzo* attribuita al vettore $\mathbf{S} = \partial \mathbf{p}_x / \partial x + \partial \mathbf{p}_y / \partial y + \partial \mathbf{p}_z / \partial z$ introdotto nella (25.2) ⁽³¹⁾.

Naturalmente, le precedenti equazioni contengono come caso particolare le equazioni di equilibrio; scontando la simmetria degli sforzi $p_{ki} = p_{ik}$ ($i, k = 1, 2, 3$), l'equilibrio del continuo è dato dalla sola equazione

$$\mathbf{F} + \mathbf{S} = 0 : \quad F_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} = 0 . \quad (25.13)$$

Infine le condizioni al contorno (25.11) diventano $p_{Ni} = f_i$ in ogni punto del contorno S e ad ogni istante t .

³⁰Tale scelta è quella usualmente adottata in meccanica dei fluidi; un'altra scelta, più adatta per descrivere i continui elastici, è ad esempio quella della densità e del campo di spostamenti \mathbf{s} rispetto ad una configurazione di riferimento.

³¹Come la divergenza di un vettore è un operatore differenziale che associa ad un campo vettoriale \mathbf{v} (oggetto *ad un indice*) un campo scalare (oggetto *a zero indici*) $\text{div } \mathbf{v} = \sum_k \partial v_k / \partial x_k$, così l'espressione $\sum_k \partial p_{ki} / \partial x_k$ ora introdotta associa al tensore degli sforzi (oggetto *a due indici*) un campo vettoriale.

26 La relazione costitutiva dei fluidi perfetti e viscosi.

Diamo un breve cenno al modello del fluido, introducendo due relazioni costitutive ampiamente usate nelle applicazioni.

Idrostatica. Il comportamento all'equilibrio dei fluidi (liquidi e gas) è ben descritto assumendo la seguente definizione.

26.1 Definizione. *Un fluido è un continuo deformabile che, in condizioni di equilibrio, ha solo sforzi normali.*

Da quanto detto sullo stato di sforzo, segue che all'equilibrio è

$$\mathcal{P} = -p\mathcal{I}$$

ove la funzione scalare $p = p(P)$ è la *pressione idrostatica*.

Considerando allora le equazioni cardinali della statica (25.9), l'equazione del momento è identicamente soddisfatta, mentre l'equazione del risultante diventa l'*equazione di Stevino*

$$\text{grad } p = \mathbf{F} ; \quad (26.1)$$

essendo infatti $\mathbf{p}_x = -p\mathbf{i}$, $\mathbf{p}_y = -p\mathbf{j}$, $\mathbf{p}_z = -p\mathbf{k}$, per la divergenza dello sforzo si ha

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} = -\text{grad } p .$$

Per l'identità vettoriale $\text{rot grad} \equiv 0$, segue dalla (26.1) che se un fluido è in equilibrio le forze specifiche di volume devono essere irrotazionali, cioè $\text{rot } \mathbf{F} = 0$; in tal caso, la pressione idrostatica è il potenziale della forza specifica. Se il campo di forze specifiche non è irrotazionale, il fluido non può quindi essere in equilibrio.

Poichè \mathbf{F} può dipendere dalla densità ρ (come nel caso del peso specifico), la (26.1) contiene come incognite (oltre alla configurazione di equilibrio) la densità e la pressione: occorre quindi aggiungere all'equazione di Stevino una relazione costitutiva $\varphi(\rho, p) = 0$ che dipende dalle caratteristiche del fluido: ad esempio $\rho = \text{costante}$ per il fluido incomprimibile (liquido), $p = k\rho$ per il gas perfetto isoterma, $p = k\rho^\gamma$ per il gas perfetto adiabatico.

La condizione al contorno $p_N = \mathbf{f}$ diventa

$$-p\mathbf{N} = \mathbf{f} ,$$

da cui segue che:

- (i) la pressione idrostatica al contorno eguaglia in modulo la forza specifica applicata: $p = f$.
- (ii) la superficie libera del fluido è ortogonale alla direzione della forza applicata.

Fluido perfetto. Si definisce *fluido perfetto* un fluido per il quale anche in condizioni di moto si ha assenza di sforzi di taglio, per cui è ancora $\mathcal{P} = -p\mathcal{I}$ (in condizioni dinamiche, p è in generale diversa dalla pressione idrostatica).

Le equazioni di moto sono allora, per le (25.8)

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0 \\ \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \operatorname{grad} p = \mathbf{F} \end{cases} \quad (26.2)$$

nelle incognite ϱ , p e \mathbf{v} ; come già detto, occorre quindi introdurre un'ipotesi costitutiva.

(i) Il caso più semplice è quello di *fluido incomprimibile*, definito dalla condizione (23.9), cioè

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 ;$$

questa condizione descrive accuratamente il comportamento dei liquidi (e quello dei gas a velocità significativamente inferiori alla velocità del suono). Le equazioni sono allora

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varrho = 0 \\ \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \operatorname{grad} p = \mathbf{F} \end{cases} \quad (26.3)$$

(ii) Se il fluido è *omogeneo e incomprimibile*, dall'equazione di conservazione della massa segue che la densità è costante: $\varrho(x, y, z, t) = \text{costante}$, ed è quindi un dato del problema; le equazioni diventano allora le *equazioni di Eulero*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p = \mathbf{f} \end{cases} \quad (26.4)$$

nelle incognite p e \mathbf{v} , essendo $\mathbf{f} = \mathbf{F}/\varrho$ la forza per unità di massa.

La condizione al contorno sul campo di velocità è data dalla condizione che non vi sia nè distacco nè penetrazione tra fluido e parete, mentre non si impongono vincoli sulla velocità con cui il fluido scorre sulla parete; in particolare, se il bordo è fisso, la componente tangente della velocità è libera, mentre si ha $v_N = 0$.

Teorema di Bernoulli. Diamo un'applicazione delle equazioni di Eulero (26.4); oltre alle ipotesi di fluido perfetto ed incomprimibile, supponiamo anche che:

(i) il moto è stazionario: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$, e quindi $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$;

(ii) le forze specifiche di volume sono posizionali e conservative: $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$.

Nelle ipotesi assunte, ed utilizzando l'identità $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 1/2 \operatorname{grad} v^2 - \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v}$ precedentemente ricordata, la seconda equazione (26.4) si scrive nella forma seguente

$$\operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \left(\frac{p}{\varrho} \right) = \operatorname{grad} \left(\frac{U}{\varrho} \right) . \quad (26.5)$$

Essendo il moto stazionario, le linee di corrente coincidono con le linee di flusso, e sono in ogni punto tangenti al campo di velocità ⁽³²⁾: indichiamo con $\mathbf{u} = \mathbf{v}/v$ il versore tangente di tali linee, e con $\partial/\partial u$ la derivata direzionale lungo la tangente, la proiezione della (26.5) lungo la tangente è allora

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot \mathbf{u} + \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} \right) \cdot \mathbf{u} = \text{grad} \left(\frac{U}{\rho} \right) \cdot \mathbf{u} ;$$

ricordando che la derivata direzionale $\partial f/\partial u$ per ogni funzione f è data da $\partial f/\partial u = \text{grad } f \cdot \mathbf{u}$ otteniamo allora

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{U}{\rho} \right) = 0 .$$

Pertanto per un fluido perfetto incomprimibile in moto stazionario sotto l'azione di forze esterne posizionali e conservative sussiste la seguente *legge di conservazione, valida lungo ogni linea di flusso del fluido*

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{U}{\rho} = \text{costante} , \quad (26.6)$$

che esprime appunto il cosiddetto *teorema di Bernoulli*. In particolare, per un fluido pesante si ha

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{costante}$$

essendo z la quota misurata verso l'alto; in assenza di campi di forza si ha

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{costante} ,$$

e quindi la pressione è massima dove la velocità è minima, in particolare nulla.

Fluido viscoso (o newtoniano). Il *fluido viscoso* è definito dalla relazione costitutiva

$$\mathcal{P} := -p\mathcal{I} + \lambda \text{div } \mathbf{v}\mathcal{I} + 2\mu \mathcal{D} \quad (26.7)$$

dove:

- (i) λ, μ (*coefficienti di viscosità*) sono parametri caratteristici del fluido, che assumiamo positivi.
- (ii) \mathcal{D} è una matrice simmetrica, detta *matrice velocità di deformazione*, le cui componenti in un riferimento cartesiano ortogonale sono date da

$$\mathcal{D}_{ik} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (i, k = 1, 2, 3; x_1 = x, \dots; v_1 = v_x, \dots) . \quad (26.8)$$

³²Ricordiamo che dato un campo vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P, t)$, le *linee di flusso* sono le curve che in ogni punto sono tangenti al campo \mathbf{v} : esse sono date quindi dalle ∞^2 soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} .$$

Le *linee di corrente* sono invece le curve date dalla soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{dP}{dt} = \mathbf{v}(P, t) , \quad P(t_0) = P_0$$

e sono quindi ∞^3 curve, parametrizzate da P_0 . Si dimostra però che se il campo \mathbf{v} non dipende dal tempo: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$, cioè se il moto è stazionario, allora le linee di corrente coincidono con le linee di flusso.

La relazione (26.7) è detta la *relazione costitutiva dei fluidi viscosi (o newtoniani)* ⁽³³⁾.

La (26.7), scritta in coordinate cartesiane ortogonali, è data da

$$p_{ki} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) \delta_{ki} + \mu \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \quad (26.9)$$

essendo δ_{ki} il simbolo di Krönecker.

Vogliamo calcolare la divergenza dello sforzo \mathbf{S} in corrispondenza alla relazione costitutiva (26.7). A tal fine, introduciamo, per ogni vettore \mathbf{v} , il suo laplaciano $\Delta \mathbf{v}$, che è il vettore definito da

$$(\Delta \mathbf{v})_i := \Delta v_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

(la componente i -sima del laplaciano di \mathbf{v} è quindi il laplaciano della i -sima componente v_i di \mathbf{v}); si ha allora il seguente risultato.

26.2 Lemma. *Per un fluido newtoniano, la divergenza dello sforzo è data da*

$$\mathbf{S} = -\operatorname{grad} p + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v} . \quad (26.10)$$

Dimostrazione. Ricordando la definizione di \mathbf{S} , si ha

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} \stackrel{(26.9)}{=} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left((-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) \delta_{ki} \right) + \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \\ &= \left(\operatorname{grad}(-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) \right)_i + \mu (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v})_i + \mu (\Delta \mathbf{v})_i \end{aligned}$$

da cui, passando alla scrittura vettoriale, segue la (26.10). \square

Tenendo conto di tale risultato, le equazioni di moto sono

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0 \\ \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} + \operatorname{grad} p = \mathbf{F} \end{cases} \quad (26.11)$$

che sono dette le *equazioni di Navier-Stokes*; si tratta di un sistema di quattro equazioni alle derivate parziali nelle cinque incognite date dalla densità, dalla pressione e dal campo di velocità, supponendo assegnati i coefficienti di viscosità e le forze specifiche esterne.

Come già detto nel caso del fluido perfetto, è necessario introdurre una relazione costitutiva.

³³Molti continui, quali l'acqua, l'aria ecc..., si modellizzano in modo soddisfacente con la relazione costitutiva considerata: si parla in questo caso di fluidi newtoniani. Si hanno però numerosi esempi di continui, quali i polimeri, il sangue, sostanze viscoelastiche, ecc..., che si descrivono con relazioni costitutive in cui la dipendenza dello stato di sforzo dal campo di velocità è più complicata: tali continui si chiamano spesso, genericamente, *fluidi non-newtoniani*.

(i) Per un fluido *incomprimibile*, le equazioni di Navier-Stokes diventano

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varrho = 0 \\ \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} + \operatorname{grad} p = \mathbf{F} \end{cases} \quad (26.12)$$

nelle incognite ϱ , p e \mathbf{v} .

(ii) Per un fluido *omogeneo ed incomprimibile*, la densità è costante e da ritenersi nota, e le equazioni assumono la forma

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p = \mathbf{f} \end{cases} \quad (26.13)$$

nelle incognite p e \mathbf{v} , essendo $\mathbf{f} = \mathbf{F}/\varrho$ la forza per unità di massa e $\nu = \mu/\varrho$ la cosiddetta *viscosità cinematica*.

La condizione al contorno sul campo di velocità è data da una *condizione di non scorrimento* del fluido sui bordi, per cui la velocità relativa tra fluido e contorno è nulla: nel caso particolare di bordi fissi, si ha quindi $\mathbf{v} = 0$ al contorno.

Flusso di Poiseuille. Come applicazione delle equazioni di Eulero e di Navier-Stokes consideriamo un fluido incomprimibile in *moto piano*, in un riferimento cartesiano $(O; x, y)$, lungo un canale rettangolare di larghezza $2h$ e di lunghezza infinita; sia x l'asse mediano del canale, i cui bordi hanno quindi equazione $y = \pm h$.

Vogliamo determinare l'esistenza di una soluzione di moto sotto queste ulteriori ipotesi:

- (i) il moto è *stazionario*, cioè p e \mathbf{v} non dipendono esplicitamente dal tempo: $p = p(x, y)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y)$;
- (ii) il moto è *laminare*, cioè la velocità \mathbf{v} è parallela all'asse del canale: $\mathbf{v} = v(x, y) \mathbf{i}$;
- (iii) non si hanno forze specifiche di volume distribuite nel fluido: $\mathbf{F} = 0$.

Dall'equazione di conservazione della massa segue allora

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = w(y) \mathbf{i},$$

con w funzione per ora indeterminata. Tenendo conto di tale risultato, concludiamo che (indipendentemente dalla relazione costitutiva introdotta) *nel moto piano, laminare e stazionario il campo di accelerazione è nullo*, essendo

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = w(y) \frac{\partial}{\partial x} (w(y) \mathbf{i}) = 0.$$

(a) Supponiamo il *fluido perfetto*: la condizione al contorno è identicamente soddisfatta dall'ipotesi di moto laminare, per cui la funzione $w = w(y)$ può assumere al contorno valori arbitrari. Dall'equazione di moto ($\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{F} = 0$) segue

$$\varrho \mathbf{a} + \operatorname{grad} p = \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \text{costante};$$

la soluzione delle equazioni di Eulero è quindi data da un campo di pressione costante lungo il canale e da un campo di velocità $\mathbf{v} = w(y)\mathbf{i}$ con w arbitraria: si tratta evidentemente di una soluzione poco realistica ed insoddisfacente dal punto di vista fisico (ad esempio filetti fluidi potrebbero scorrere in un verso lungo il canale, filetti adiacenti in verso opposto e con velocità di modulo arbitrario).

(b) Supponiamo il *fluido viscoso*: la condizione al contorno è data ora dall'annullamento della velocità lungo le pareti

$$w(\pm h) = 0 . \quad (26.14)$$

Dall'equazione di moto si ha

$$\rho \mathbf{a} - \mu \Delta \mathbf{v} + \text{grad } p = \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \text{grad } p = \mu \Delta \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} = \mu w''(y) \mathbf{i} . \quad (26.15)$$

Dalla componente secondo y segue che $p = p(x)$, cioè la pressione può variare lungo il canale ma è costante in ogni sezione trasversale; supponiamo ad esempio che siano assegnati i valori della pressione in corrispondenza alle sezioni trasversali $x = 0$ e $x = \ell$ del canale:

$$p(x = 0) = p_0, \quad p(x = \ell) = p_1 \quad (p_0 > p_1) . \quad (26.16)$$

La componente secondo x della (26.15) fornisce allora l'equazione

$$p'(x) = \mu w''(y) ;$$

poichè il primo membro dell'equazione dipende da x ed il secondo da y , la soluzione generale è data da

$$p'(x) = -a , \quad \mu w''(y) = -a \quad (26.17)$$

con a costante arbitraria. Integrando la prima equazione con le condizioni (26.16) si ottiene

$$p'(x) = -a \quad \Rightarrow \quad p(x) = -ax + C_0 , \quad C_0 = p_0, \quad a = \frac{p_0 - p_1}{\ell}$$

da cui segue che la pressione decresce linearmente lungo il canale

$$p(x) = p_0 - \frac{p_0 - p_1}{\ell} x .$$

La seconda equazione (26.17) diventa

$$w''(y) = -\frac{p_0 - p_1}{\mu \ell} \quad \Rightarrow \quad w(y) = -\frac{p_0 - p_1}{2\mu \ell} y^2 + C_1 y + C_2 ;$$

imponendo la condizione al contorno (26.14) otteniamo che

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{p_0 - p_1}{2\mu \ell} h^2 ;$$

il profilo di velocità (*flusso di Poiseuille*) ha quindi un andamento parabolico in funzione di y

$$\mathbf{v} = w(y) \mathbf{i} = \frac{p_0 - p_1}{2\mu \ell} (h^2 - y^2) \mathbf{i} ;$$

la velocità è massima lungo l'asse mediano del canale ($y = 0$), dove vale $(p_0 - p_1) h^2 / 2\mu \ell$, e decresce fino ad annullarsi al bordo.

27 Il teorema dell'energia.

Torniamo al caso di un generico continuo deformabile, che occupa un volume V di contorno S , per il quale valgono le equazioni di moto (25.8); inoltre sia $\tau \subset V$ una parte di continuo arbitrariamente scelta, e sia \mathbf{n} la normale uscente al contorno σ di τ . Nel formulare il teorema dell'energia, introduciamo la seguente ipotesi: l'energia del continuo è data, oltre che dall'energia cinetica

$$\int_{\tau} \frac{1}{2} \varrho v^2 d\tau \quad (27.1)$$

che tiene conto del moto *macroscopico*, anche da un'energia interna dovuta ai moti microscopici degli elementi del continuo. Introdotta quindi l'energia interna per unità di massa e , si ha un termine della forma

$$\int_{\tau} \varrho e d\tau, \quad (27.2)$$

per cui l'energia \mathcal{E} della parte τ di continuo è data da

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varrho v^2 d\tau + \int_{\tau} \varrho e d\tau.$$

Assumeremo che la variazione nel tempo di tale energia sia dovuta ai seguenti tre fattori:

- (i) la potenza $\int_{\tau} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\tau$ di tutte le forze specifiche di volume \mathbf{F} distribuite in τ ;
- (ii) la potenza $\int_{\sigma} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} d\sigma$ degli sforzi \mathbf{p}_n , cioè delle forze di superficie esercitate sul volume τ attraverso il suo contorno σ ;
- (iii) l'energia termica scambiata tra il volume τ e l'esterno attraverso il contorno σ . Consideriamo solo lo scambio di energia per *conduzione*, e descriviamo questo contributo introducendo un *vettore densità flusso di calore* \mathbf{q} : assumiamo che la potenza entrante per conduzione nell'unità di tempo nel volume τ attraverso il contorno σ sia data da

$$- \int_{\sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (27.3)$$

(si ricordi la convenzione adottata della normale \mathbf{n} uscente: il termine che rappresenta l'energia scambiata è allora negativo se \mathbf{q} forma con \mathbf{n} un angolo acuto, positivo se \mathbf{q} forma con \mathbf{n} un angolo maggiore di $\pi/2$).

Con tali ipotesi, scriviamo il teorema dell'energia si scriva nella forma seguente:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \varrho \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) d\tau = \int_{\tau} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\tau + \int_{\sigma} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} d\sigma - \int_{\sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (27.4)$$

Come già fatto per le altre equazioni cardinali di moto, anche in questo caso vogliamo pervenire ad una formulazione locale in termini di equazione differenziale, che può essere più utile in alcune applicazioni; dobbiamo allora scrivere ogni termine nella precedente equazione come integrale di volume. Utilizzando la regola di derivazione sotto il segno di integrale (23.12) con $f = v^2/2 + e$, il termine a primo membro si scrive nella forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \varrho \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) d\tau = \int_{\tau} \varrho \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} + \frac{de}{dt} \right) d\tau.$$

Consideriamo ora il termine che esprime la potenza degli sforzi; ricordando che per la relazione di Cauchy è $p_{ni} = \sum_{k=1}^3 p_{ik} n_k$ in ogni punto del contorno σ ed applicando il teorema di Green, è allora

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} \, d\sigma &= \sum_{i=1}^3 \int_{\sigma} p_{ni} v_i \, d\sigma = \sum_{i,k=1}^3 \int_{\sigma} p_{ik} n_k v_i \, d\sigma \\ &= \sum_{i,k=1}^3 \int_{\tau} (p_{ik} v_i)_{,k} \, d\tau = \sum_{i,k=1}^3 \int_{\tau} p_{ik,k} v_i \, d\tau + \sum_{i,k=1}^3 \int_{\tau} p_{ik} v_{i,k} \, d\tau \end{aligned} \quad (27.5)$$

dove la virgola indica per brevità la derivata parziale ($f_{,k} = \partial f / \partial x^k$). Osserviamo ora che

$$\sum_{i,k=1}^3 p_{ik,k} v_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 p_{ik,k} \right) v_i = \sum_{i=1}^3 S_i v_i = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$$

dove $\mathbf{S} = \partial \mathbf{p}_x / \partial x + \partial \mathbf{p}_y / \partial y + \partial \mathbf{p}_z / \partial z$ è il vettore divergenza dello sforzo precedentemente introdotto.

Per quanto riguarda l'ultimo termine della (27.5) introduciamo la matrice velocità di deformazione \mathcal{D} data dalla (26.8); ricordando la simmetria del tensore degli sforzi (conseguenza del teorema del momento delle quantità di moto) è allora

$$\sum_{i,k=1}^3 p_{ik} v_{i,k} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 p_{ik} (v_{i,k} + v_{k,i}) = \sum_{i,k=1}^3 p_{ik} \mathcal{D}_{ik} = \text{tr}(\mathcal{P}\mathcal{D}) \quad (34).$$

In conclusione, la potenza degli sforzi sul contorno σ del volume τ considerato si scrive nella forma

$$\int_{\sigma} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \int_{\tau} \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \, d\tau + \int_{\tau} \text{tr}(\mathcal{P}\mathcal{D}) \, d\tau.$$

Il secondo integrale di superficie nella (27.4) diventa (ancora per il teorema della divergenza)

$$\int_{\sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\tau} \text{div} \mathbf{q} \, d\tau.$$

Inserendo questi risultati nell'espressione (27.4) del teorema dell'energia ed utilizzando l'arbitrarietà di τ e l'ipotesi di continuità di tutte le funzioni integrande, dalla (27.4) deduciamo allora che in ogni punto del continuo e ad ogni istante deve essere verificata l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} + \varrho \frac{de}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} + \text{tr}(\mathcal{P}\mathcal{D}) - \text{div} \mathbf{q}.$$

³⁴Per ogni coppia di matrici simmetriche A e B si definisce:

$$\text{tr}AB := \sum_{i=1}^3 (AB)_{ii} = \sum_{i,k=1}^3 A_{ik} B_{ik}. \quad (27.6)$$

Tenendo inoltre conto dell'equazione della quantità di moto (25.8): $\varrho \mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{S}$, il teorema dell'energia si esprime nella forma

$$\varrho \frac{de}{dt} = \text{tr}(\mathcal{P}\mathcal{D}) - \text{div } \mathbf{q} \quad (27.7)$$

noti che siano il campo di velocità \mathbf{v} (e quindi la velocità di deformazione \mathcal{D}), lo stato di sforzo \mathcal{P} e il flusso di calore \mathbf{q} , tale equazione fornisce quindi la variazione nel tempo dell'energia interna.

Consideriamo ora qualche caso particolare.

(i) Per un fluido newtoniano, definito dalla relazione costitutiva (26.7), si ha

$$\text{tr}(\mathcal{P}\mathcal{D}) = -p \text{div } \mathbf{v} + \lambda (\text{div } \mathbf{v})^2 + 2\mu \text{tr}\mathcal{D}^2 ,$$

da cui segue che l'equazione dell'energia assume la forma

$$\varrho \frac{de}{dt} = (-p + \lambda \text{div } \mathbf{v}) \text{div } \mathbf{v} + 2\mu \text{tr}\mathcal{D}^2 - \text{div } \mathbf{q} .$$

Nel caso incomprimibile ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) si ha in particolare

$$\varrho \frac{de}{dt} = 2\mu \text{tr}\mathcal{D}^2 - \text{div } \mathbf{q} .$$

(ii) Nel caso di un fluido perfetto e incomprimibile ($\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\text{div } \mathbf{v} = 0$) è quindi

$$\varrho \frac{de}{dt} + \text{div } \mathbf{q} = 0 . \quad (27.8)$$

Osserviamo che assumendo per l'energia interna e una dipendenza lineare dalla temperatura:

$$e = C_p T \quad C_p \text{ calore specifico a pressione costante}$$

e per il flusso di calore una dipendenza lineare dal gradiente di temperatura:

$$\mathbf{q} = -\chi \text{grad } T \quad (\text{relazione di Fourier}) ,$$

la (27.8) diventa l'equazione

$$\frac{dT}{dt} = k \Delta T , \quad \left(k := \frac{\chi}{\varrho C_p} \right) , \quad (27.9)$$

nota come *equazione del calore*.

(iii) Infine nel caso di un solido, in cui $\mathcal{D} = 0$, dalla (27.7) otteniamo ancora la (27.8); in questo caso poniamo $e = C_v T$ (con C_v calore specifico a volume costante), per cui con la relazione di Fourier otteniamo ancora l'equazione del calore (27.9) (con C_v al posto di C_p). \diamond

28 Meccanica analitica e meccanica dei continui.

Diamo un breve cenno introduttivo all'approccio alla formulazione delle equazioni della meccanica dei continui deformabili dal punto di vista della meccanica analitica. Considereremo solo:

- (i) la formulazione delle condizioni di equilibrio attraverso il principio dei lavori virtuali,
- (ii) un esempio di formulazione lagrangiana delle equazioni di moto.

A questo fine, premettiamo alcune osservazioni sulla cinematica di un sistema continuo.

Matrice di deformazione. Consideriamo la formula fondamentale dello spostamento infinitesimo rigido, data dalla formula dell'atto di moto rototraslatorio nella quale alla velocità \mathbf{v} sostituiamo lo spostamento infinitesimo $\mathbf{s} := \mathbf{v} dt$, e alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ la rotazione infinitesima $\boldsymbol{\epsilon} := \boldsymbol{\omega} dt$. Scegliamo un generico punto A , ed un sistema cartesiano ortogonale $(A; x, y, z)$; indichiamo con \mathbf{s}_A lo spostamento infinitesimo di A , e con $\mathbf{s} = \mathbf{s}(x, y, z)$ lo spostamento di un generico punto P , di coordinate (x, y, z) nel riferimento cartesiano assunto. Utilizziamo per comodità notazioni indiciali, ponendo

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z; \quad \epsilon_1 = \epsilon_x, \quad \epsilon_2 = \epsilon_y, \quad \epsilon_3 = \epsilon_z; \quad s_{Ax} = a_1, \quad s_{Ay} = a_2, \quad s_{Az} = a_3;$$

otteniamo allora che \mathbf{s} e \mathbf{s}_A sono legati dalla formula dello spostamento rigido infinitesimo

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_A + \boldsymbol{\epsilon} \wedge (P - A) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = a_1 + \epsilon_2 z - \epsilon_3 y \\ s_2 = a_2 + \epsilon_3 x - \epsilon_1 z \\ s_3 = a_3 + \epsilon_1 y - \epsilon_2 x \end{cases} \quad (28.1)$$

Pertanto fissato A , al variare del punto P nell'intorno di A il campo di spostamenti infinitesimi rigidi è funzione lineare (affine) delle coordinate del punto.

Introduciamo ora la seguente matrice \mathcal{E} , 3×3 , reale e simmetrica, di elementi e_{ij}

$$\mathcal{E} : \quad e_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) . \quad (28.2)$$

È immediato verificare che tale matrice è nulla in corrispondenza del campo di spostamenti (28.1); viceversa, se consideriamo il sistema di 6 equazioni a derivate parziali (nelle tre componenti del campo \mathbf{s})

$$\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) ,$$

che esprimono l'annullamento di \mathcal{E} , si dimostra che la soluzione più generale di tale sistema è data dal campo di spostamenti (28.1); pertanto abbiamo il seguente risultato, che giustifica anche la definizione di \mathcal{E} come *matrice di deformazione del continuo*.

28.1 Teorema. *L'annullamento della matrice \mathcal{E} è condizione necessaria e sufficiente perché lo spostamento infinitesimo sia rigido.*

Il significato della matrice di deformazione può essere ulteriormente chiarito dalle seguenti considerazioni. Dato un generico continuo, consideriamo un punto P di posizione $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$

ed un punto P' in un intorno di P , di posizione $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$; supponendo il campo di spostamenti sufficientemente regolare, possiamo allora scrivere

$$\mathbf{s}(P') - \mathbf{s}(P) = \mathbf{s}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_j} dx_j + O(|d\mathbf{x}|^2) = \mathcal{G} d\mathbf{x} + O(|d\mathbf{x}|^2), \quad (28.3)$$

dove si è introdotta la matrice *gradiente di spostamento* \mathcal{G} , di componenti

$$\mathcal{G}_{ij} := \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Utilizzando la decomposizione di ogni matrice quadrata nella parte simmetrica e nella parte antisimmetrica possiamo allora scrivere

$$\mathcal{G} = \mathcal{E} + \Omega, \quad \mathcal{E}_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} - \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right). \quad (28.4)$$

Per quanto detto in precedenza, per uno spostamento rigido infinitesimo si ha $\mathcal{E} = 0$, per cui $\mathcal{G} = \Omega$; la matrice antisimmetrica Ω è quindi associata ad un campo di spostamenti rigidi con rotazione infinitesima ϵ . Al primo ordine in $|d\mathbf{x}|$ possiamo quindi scrivere la (28.3) nella forma

$$\mathbf{s}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \Omega d\mathbf{x} + \mathcal{E} d\mathbf{x};$$

la distribuzione di spostamenti nell'intorno di un generico punto di un continuo può cioè essere analizzata come la composizione di uno spostamento rigido, con rotazione infinitesima ϵ , e di uno spostamento non rigido con deformazione \mathcal{E} : lo spostamento è rigido se e solo se $\mathcal{E} = 0$ ⁽³⁵⁾.

Lavoro virtuale delle forze esterne e interne in un continuo. Consideriamo un corpo continuo, di volume $V \subset \mathbf{R}^3$, con contorno regolare S (dotato cioè in ogni punto di normale uscente \mathbf{n} , variabile con continuità su S). Indichiamo con \mathbf{F} le forze attive esterne di volume, distribuite nel continuo, e con \mathbf{f} le forze attive esterne di superficie, applicate sul contorno S . Infine, sia \mathbf{s} il campo di spostamenti virtuali dei punti del continuo. Abbiamo allora che il lavoro virtuale δ^*L delle forze attive esterne, di volume e superficie, agenti sul continuo è dato da

$$\delta^*L = \int_V \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} d\tau + \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{s} d\sigma. \quad (28.5)$$

³⁵Come ulteriore illustrazione del significato della matrice di deformazione, ricordiamo che, come si può dimostrare, gli elementi diagonali

$$e_{11} = \frac{\partial s_x}{\partial x}, \quad e_{22} = \frac{\partial s_y}{\partial y}, \quad e_{33} = \frac{\partial s_z}{\partial z}$$

forniscono l'allungamento (o accorciamento) di un segmento di lunghezza unitaria lungo gli assi x, y, z , e sono detti gli *allungamenti*, mentre gli elementi fuori diagonale $e_{12} = e_{21}, e_{13} = e_{31}, e_{23} = e_{32}$ dati da

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right), \quad e_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right), \quad e_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} \right)$$

misurano la variazione degli angoli tra gli assi coordinati, e vengono detti gli *scorrimenti*.

Osserviamo infine che $\text{Tr } \mathcal{E} = \text{div } \mathbf{s}$, per cui lo spostamento infinitesimo rigido ha $\text{div } \mathbf{s} = 0$, cioè è solenoidale.

Dobbiamo ora fare alcune ipotesi sulla natura delle forze interne al continuo e sul loro lavoro virtuale, che indicheremo con $\delta^* \Lambda$ per distinguerlo dal lavoro virtuale $\delta^* L$ delle forze esterne. Estendendo ai continui deformabili i risultati validi per i sistemi finito-dimensionali costituiti da punti e da corpi rigidi, supponiamo allora che $\delta^* \Lambda$ soddisfi alle condizioni seguenti:

- (i) $\delta^* \Lambda$ è una forma lineare negli spostamenti virtuali dei punti del continuo;
- (ii) $\delta^* \Lambda$ è nullo per uno spostamento rigido (rototraslatorio) del continuo.

In base alle osservazioni precedenti secondo cui lo spostamento rigido è caratterizzato completamente dall'annullamento della matrice di deformazione, le due ipotesi introdotte ci portano a postulare che $\delta^* \Lambda$ dipenda dagli spostamenti solo attraverso la matrice di deformazione.

Postulato. *Il lavoro virtuale delle forze interne in un continuo deformabile è una forma lineare nella matrice di deformazione.*

In base a tale postulato, possiamo allora scrivere la seguente espressione

$$\delta^* \Lambda := - \sum_{i,k=1}^3 p_{ik} e_{ik} , \quad (28.6)$$

dove il segno $-$ è introdotto per convenienza.

Gli elementi di matrice e_{ik} sono dati dalla (28.2), e gli spostamenti virtuali saranno ancora indicati con \mathbf{s} , per cui se P ha coordinate x_i si ha $\delta x_i = s_i$. Osserviamo subito che essendo \mathcal{E} simmetrica i coefficienti p_{ik} possono essere assunti simmetrici, ovvero possiamo associare ad essi una matrice simmetrica \mathcal{P} , e scrivere la (28.6) nella forma

$$\delta^* \Lambda = -\text{tr } \mathcal{P} \mathcal{E} , \quad (28.7)$$

dove tr è definita dalla (27.6). Il lavoro delle forze interne è quindi determinato dalle 6 componenti della matrice \mathcal{E} (tre allungamenti e tre scorrimenti) e da 6 funzioni p_{ik} , per ora indeterminate ma che, come mostreremo poi, possono essere interpretate come le componenti della matrice degli sforzi di Cauchy.

Fatte queste premesse, consideriamo il caso dell'equilibrio, analizzato attraverso il principio dei lavori virtuali.

Principio dei lavori virtuali.

Supponendo per semplicità che gli eventuali vincoli del corpo siano bilateri, cosicché gli spostamenti virtuali sono reversibili. Generalizzando quanto visto per il corpo rigido ed i sistemi di corpi rigidi, postuliamo che anche per il corpo continuo deformabile la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio sia che il lavoro virtuale delle forze attive esterne e interne è nullo per ogni spostamento virtuale:

$$\text{Esiste equilibrio} \Leftrightarrow \delta^* L + \delta^* \Lambda = 0 \text{ per ogni spostamento virtuale} . \quad (28.8)$$

In base a quanto detto per l'espressione del lavoro virtuale, il principio (28.8) si traduce allora nell'equazione

$$\int_V \sum_{i=1}^3 F_i s_i d\tau + \int_S \sum_{i=1}^3 f_i s_i d\sigma - \int_V \sum_{i,k=1}^3 p_{ik} e_{ik} d\tau = 0 , \quad (28.9)$$

dove, per maggior semplicità di scrittura, facciamo ancora uso di notazioni indiciali: il primo termine è il lavoro virtuale delle forze specifiche di volume attive distribuite in V , il secondo termine rappresenta il lavoro virtuale delle forze specifiche di superficie applicate sul contorno S , il terzo è il lavoro virtuale delle forze interne al continuo.

Teniamo ora conto dell'espressione degli elementi e_{ik} della matrice di deformazione \mathcal{E} e della simmetria di p_{ik} : il terzo integrale si scrive allora nella forma

$$\sum_{i,k=1}^3 \int_V p_{ik} e_{ik} d\tau = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \int_V p_{ik} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_k} + \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right) d\tau = \sum_{i,k=1}^3 \int_V p_{ik} \frac{\partial s_i}{\partial x_k} d\tau . \quad (28.10)$$

Poiché per una generica coppia di funzioni f e g e per una generica coordinata x si ha, in base al teorema di Green,

$$\int_V f \frac{\partial g}{\partial x} d\tau = \int_V \frac{\partial(fg)}{\partial x} d\tau - \int_\tau g \frac{\partial f}{\partial x} d\tau = \int_S fg n_x d\sigma - \int_V f \frac{\partial g}{\partial x} d\tau$$

otteniamo allora, integrando per parti l'ultimo termine della (28.10), che il lavoro virtuale delle forze interne si scrive nella forma

$$\sum_{i,k=1}^3 \int_V p_{ik} e_{ik} d\tau = \sum_{i,k=1}^3 \int_S p_{ik} s_i n_k d\sigma - \sum_{i,k=1}^3 \int_V \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} s_i d\tau .$$

Tornando alla formulazione (28.9) del principio dei lavori virtuali, la condizione di equilibrio è allora data da

$$\sum_{i=1}^3 \int_V \left(F_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right) s_i d\tau + \sum_{i=1}^3 \int_S \left(f_i - \sum_{k=1}^3 p_{ik} n_k \right) s_i d\sigma = 0 ;$$

per l'arbitrarietà del campo di spostamenti virtuali \mathbf{s} all'interno di τ e sul contorno σ , deve allora essere

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} + F_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{in ogni punto interno del continuo} \quad (28.11)$$

$$\sum_{k=1}^3 p_{ik} n_k = f_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{in ogni punto del contorno} . \quad (28.12)$$

Abbiamo così riottenuto le equazioni differenziali di equilibrio e le condizioni al contorno dedotte nell'ambito della meccanica newtoniana come equazioni del risultante.

Gli elementi della matrice \mathcal{P} (che è simmetrica in base al postulato iniziale sul lavoro delle forze interne) si possono interpretare come sforzo di Cauchy introducendo tre vettori $\mathbf{p}_x = \mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_y = \mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_z = \mathbf{p}_3$, dati dalle righe (o colonne) della matrice. Considerando inoltre come τ un generico volume interno, di contorno σ , e chiamando *sforzo specifico interno* la forza specifica $p_{\mathbf{n}}$ esercitata attraverso la superficie, dalla condizione al contorno (28.12) in cui si pone $f_i = p_{\mathbf{n}i}$ otteniamo la relazione di Cauchy: $\mathbf{p}_{\mathbf{n}} = \mathbf{p}_x n_x + \mathbf{p}_y n_y + \mathbf{p}_z n_z$.

Modelli discreti e continui: un esempio. Prima di dare un cenno sulla formulazione lagrangiana delle equazioni di moto dei continui, premettiamo un esempio su come si possa passare da un modello discreto, che ammette formulazione lagrangiana, ad un modello continuo (la trattazione è semplificata e non rigorosa, ed ha il solo scopo di porre in evidenza il tipo di modellizzazione introdotta).

Il modello. Il modello in esame è costituito da una sbarra rettilinea, elastica e omogenea, che intendiamo modellizzare come un opportuno limite di una catena (reticolo) di $2n + 1$ oscillatori armonici, costituiti da punti P_i ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$), di ugual massa m , collegati tra loro da molle di ugual costante elastica k .

Supponiamo che il reticolo abbia una configurazione di equilibrio in cui i punti hanno ascisse \bar{x}_i e sono ad ugual distanza $d = \ell/2n$, essendo ℓ la lunghezza della catena. Indicando con $x_i(t)$ la posizione al tempo t dell' i -simo oscillatore, lo spostamento dall'equilibrio del punto P_i del reticolo al tempo t è quindi $\eta_i(t) := x_i(t) - \bar{x}_i$; durante il moto la distanza tra P_{i+1} e P_i è data da $d + \eta_{i+1}(t) - \eta_i(t)$.

Le equazioni di Newton. Dal punto di vista newtoniano, le equazioni di moto $m \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$ per ogni punto del reticolo sono allora

$$\begin{aligned} m\ddot{\eta}_i &= k(\eta_{i+1} - \eta_i) - k(\eta_i - \eta_{i-1}) & (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1)) \\ m\ddot{\eta}_n &= -k(\eta_n - \eta_{n-1}) & m\ddot{\eta}_{-n} = k(\eta_{-n+1} - \eta_{-n}) . \end{aligned} \quad (28.13)$$

Formulazione lagrangiana. Come è immediato verificare, il sistema introdotto è conservativo ed ammette formulazione lagrangiana; possiamo scrivere la funzione di Lagrange in forma compatta come

$$L = T + U = \sum_{i=-n}^n \left(\frac{1}{2} \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} k_i (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \right) \quad (k_i = k \text{ se } i \neq n, \quad k_n = 0) ; \quad (28.14)$$

le corrispondenti equazioni di moto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \eta_i} \quad (28.15)$$

sono ancora le (28.13).

In vista del passaggio al continuo, fattorizziamo d (la distanza tra i punti del reticolo all'equilibrio) nell'espressione di L , scrivendola come somma formale

$$L = d \sum_{i=-n}^n L_i, \quad L_i := \frac{1}{2} \frac{m}{d} \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} k_i d \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{d} \right)^2 . \quad (28.16)$$

Il limite continuo. Passiamo ora al limite continuo; formalmente, facciamo tendere a ∞ il numero n di punti del reticolo di oscillatori e la costante elastica $k_i = k$, e simultaneamente a 0 la distanza d tra i punti e la massa m di ogni oscillatore, supponendo che la lunghezza ℓ della catena e la massa totale M siano costanti: *supponiamo quindi che esistano finiti i limiti*

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{m}{d} = \rho, \quad \lim_{k \rightarrow \infty, d \rightarrow 0} k d = Y, \quad (28.17)$$

dove indichiamo con ϱ la densità (costante) della sbarra e con Y il modulo di elasticità (o di Young) ⁽³⁶⁾.

Definiamo ora un processo di limite dal reticolo al continuo. Sostituiamo alla sommatoria sull'indice discreto i l'integrale sulla variabile continua x ; alla famiglia di funzioni $\{\eta_{i\pm j}\}$ della variabile t la funzione $\eta(x \pm j d, t)$, essendo $\eta = \eta(x, t)$ una funzione almeno C^2 in (x, t) (sul reticolo, i numera i gradi di libertà del reticolo, nel limite continuo x non è una coordinata generalizzata, ma l'indice continuo che sostituisce i). Abbiamo allora che

$$\eta_{i\pm 1}(t) \equiv \eta(x \pm d, t) = \eta(x, t) \pm d \eta_x(x, t) + \frac{d^2}{2} \eta_{xx}(x, t) + o(d^2),$$

dove $\eta_x := \partial\eta/\partial x$, $\eta_{xx} := \partial^2\eta/\partial x^2$; abbiamo così

$$k(\eta_{i+1}(t) - \eta_i(t)) = k d \eta_x(x, t) + k \frac{d^2}{2} \eta_{xx}(x, t) + o(d^2)$$

$$k(\eta_i(t) - \eta_{i-1}(t)) = k d \eta_x(x, t) - k \frac{d^2}{2} \eta_{xx}(x, t) + o(d^2)$$

e le equazioni di moto (28.13) diventano $m \ddot{\eta} = k d^2 \eta_{xx} + o(d^2)$, ovvero

$$\frac{m}{d} \ddot{\eta} = (k d) \eta_{xx} + o(d), \quad (28.18)$$

dove $\dot{\eta} = \partial\eta(x, t)/\partial t$, etc.

Passiamo infine al limite per $d \rightarrow 0$ nelle (28.18); tenendo conto delle ipotesi (28.17), otteniamo così che le equazioni (28.13) (differenziali ordinarie nelle funzioni incognite $\eta_i(t)$) diventano l'equazione (alle derivate parziali)

$$\varrho \ddot{\eta} = Y \eta_{xx} \quad (28.19)$$

nella funzione incognita $\eta(x, t)$: si tratta della ben nota equazione delle onde in una dimensione spaziale, per cui $\eta(x, t)$ rappresenta un'onda con velocità $\sqrt{Y/\varrho}$ (costante nelle ipotesi assunte).

Formulazione variazionale dell'equazione delle onde. Osserviamo infine che, nel processo di limite, alla Lagrangiana L_i (28.16) corrisponde la *densità di Lagrangiana* \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \varrho \dot{\eta}^2 - \frac{1}{2} Y \eta_x^2. \quad (28.20)$$

Come visto nel caso delle equazioni di Lagrange per sistemi finito-dimensionali, le equazioni di moto (28.13) si possono dedurre come equazioni di Eulero-Lagrange del funzionale (azione hamiltoniana) $S(q) = \int L(q, \dot{q}, t) dt$. Come ora mostreremo, anche la relazione tra la densità di Lagrangiana (28.20) e l'equazione a derivate parziali (28.19) si può formalizzare nel senso che la (28.19) è costruita, in un senso che verrà precisato, come equazione di Eulero-Lagrange di un funzionale $\mathcal{S}(\eta)$.

³⁶L'assunzione che il secondo limite sia il modulo di Young Y si giustifica formalmente osservando che Y è il rapporto tra una forza applicata ad un elemento di continuo e l'allungamento per unità di lunghezza provocato dalla forza; nel caso discreto della catena di oscillatori la forza è la forza elastica $k(\eta_{i+1} - \eta_i)$, e l'allungamento per unità di lunghezza è $(\eta_{i+1} - \eta_i)/d$; d'altra parte possiamo scrivere

$$k d = \frac{k(\eta_{i+1} - \eta_i)}{\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{d}}.$$

Un cenno alle equazioni di Lagrange nel continuo. Generalizzando dall'esempio precedente, ad un sistema continuo in \mathbf{R} , il cui stato è individuato da una *variabile di campo* $\eta(x, t)$, associamo quindi un funzionale $\mathcal{S}(\eta)$

$$\mathcal{S}(\eta) := \iint_{\Omega} \mathcal{L} dx dt$$

che è un integrale su un opportuno sottoinsieme $\Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ di una *densità di lagrangiana*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}, \eta_x, x, t) .$$

Le equazioni di moto sono allora ottenute come equazioni di Eulero-Lagrange dalla stazionarietà (formale) del funzionale $\mathcal{S}(\eta)$. Ricordando che

$$\delta \dot{\eta} = \frac{\partial}{\partial t} \delta \eta, \quad \delta \eta_x = \frac{\partial}{\partial x} \delta \eta$$

e integrando formalmente per parti (ovvero supponendo che $\delta \eta$ soddisfi opportune condizioni di annullamento sul bordo $\partial\Omega$ del dominio) si ha

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}(\eta) &= \iint_{\Omega} \delta \mathcal{L} dx dt = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \delta \dot{\eta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \delta \eta_x \right] dx dt \\ &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \right) \right] \delta \eta dx dt \end{aligned}$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\delta \eta$, otteniamo le equazioni di moto del continuo

$$\delta \mathcal{S}(\eta) = 0 \quad \forall \delta \eta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \right) . \quad (28.21)$$

L'analogia formale con le equazioni di Lagrange (28.15) per sistemi finito-dimensionali (al di là della sostituzione della derivata totale con la derivata parziale rispetto a t) è più evidente definendo la *derivata funzionale* $\delta \mathcal{L} / \delta \eta$ data da

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \right) , \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}, \eta_x, x, t) , \quad (28.22)$$

per cui le (28.21) si scrivono nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta} . \quad (28.23)$$

Nel caso dell'esempio precedentemente considerato, è immediato verificare che l'equazione delle onde (28.19) si ottiene nella forma (28.21) con la lagrangiana (28.20).

Imponendo che le equazioni di moto del modello continuo siano le equazioni di Eulero-Lagrange di un funzionale, e definendo quindi opportunamente la derivata funzionale, la forma (28.23) delle equazioni si mantiene anche nel caso in cui il sistema sia più generale del modello ora discusso, ad esempio:

(i) sia ambientato in $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ e non in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$;

(ii) sia caratterizzato da una densità di Lagrangiana che può dipendere da più di una funzione di campo ;

(iii) contenga le derivate delle funzioni di campo di ordine superiore al primo.

Esempio I. Se $\eta = \eta(x, t)$ e \mathcal{L} dipende dalle derivate di η rispetto a x sino all'ordine k :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{\eta}, \eta, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(k)}, x, t) \quad \left(\eta^{(i)} = \frac{\partial^i \eta}{\partial x^i} \right)$$

si ha

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta} := \sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{(\ell)}} \right), \quad (\eta^{(0)} = \eta)$$

e l'equazione di moto è la (28.23). Ad esempio, per $k = 2$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{xx}} \right).$$

Esempio II. Se $\eta = \eta(x, y, z, t)$, la generalizzazione in $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ dell'equazione delle onde è ottenuta ponendo

$$\mathcal{S}(\eta) = \iiint \mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}, \eta_x, \eta_y, \eta_z, x, y, z, t) dx dy dz dt, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \dot{\eta}^2 - \frac{1}{2} Y (\text{grad } \eta)^2; \quad (28.24)$$

l'equazione di moto è allora

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_z} \right) \right]$$

da cui l'equazione delle onde in $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$:

$$\rho \ddot{\eta} = Y \Delta \eta.$$

Esempio III. Se consideriamo un modello continuo in due funzioni di campo η_1, η_2 ed una densità di Lagrangiana della forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta_1, \eta_2, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \eta_{1x}, \eta_{2x}, x, t)$$

dalla stazionarietà del funzionale $\mathcal{S}(\eta) = \iint \mathcal{L} dx dt$ otteniamo un sistema di due equazioni (del secondo ordine in t e in x):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i} \right) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta_i}, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta_i} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{ix}} \right), \quad (i = 1, 2). \quad (28.25)$$

Esplicitamente si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_1} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{1x}} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_2} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{2x}} \right). \quad \diamond$$