Politecnico di Milano - Facoltà di Ingegneria Industriale

IV Facoltà di Ingegneria - Anno Accademico 2003/2004

Elementi di Analisi Matematica A e di Geometria

Corso di Studi in Ingegneria Aerospaziale

Esercizi

Federico M. Vegni

Indice

CAPITOLO 1

Logica, insiemi, calcolo combinatorio

1. Esercizi proposti

Esercizio La relazione in $\mathbf{Z}$ descritta da $r(x,y) \Leftrightarrow \{x, y \in \mathbf{Z} \wedge |x| = 5|y|\}$ è una funzione? Se ne disegni il grafico.

Esercizio Quanti sono i possibili anagrammi della parola *analisi*?

Esercizio Si ricordi la definizione di *permutazione con ripetizioni.*

Esercizio Quanti sono i possibili anagrammi della parola *ermeneutica*?

Esercizio Quante sono le quadruplette di numeri interi naturali soluzioni dell'equazione $x_1+x_2+x_3+x_4 = 10$? Si scriva una formula che conta il numero di possibili soluzioni nel caso $x_1+x_2+x_3+x_4 = k$.

Esercizio Si dia una definizione di *funzione.*

Esercizio Ad una competizione sciistica partecipano 23 atleti. Quanti sono i possibili podi?

Esercizio Quante permutazioni di 8 mele possiamo ottenere se 3 sono rosse e 5 gialle?

Esercizio Se Q è un insieme di 10 oggetti distinti, quante sono le funzioni biunivoche che possono essere definite da Q in Q? Quante quelle suriettive? Quante quelle iniettive?

Esercizio Quante schedine da 14 partite si possono giocare impiegando 7 simboli **2** e 7 simboli **x**?

Esercizio La relazione tra l'insieme A delle mele e l'insieme B degli alberi di mele che associa a una mela l'albero che l'ha nutrita è una funzione? La relazione che associa ad un albero le mele che ha prodotto è una funzione?

Esercizio Si ricordi la definizione di *disposizione semplice.*

Esercizio Quante sono le possibili colonne del totocalcio a 14 partite?

Esercizio Quanti numeri si possono rappresentare con tre cifre decimali?

Esercizio Quanti numeri interi si possono rappresentare con 32 cifre binarie?

Esercizio Quante sono le cinquine di numeri interi che risolvono l'equazione $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 8$? Quante quelle che risolvono l'equazione $x_1+x_2+x_3+x_4+3x_5 = 8$?

Esercizio Si ricordi la definizione di *permutazione con ripetizioni* di n oggetti di 4 tipi diversi; sono del primo tipo g_1 oggetti, del secondo tipo f_2 oggetti, del terso tipo r_3 oggetti e del quarto tipo y_4 oggetti. Cos'è un coefficiente polinomiale?

Esercizio L'urna del lotto contiene i numeri $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\ ,\ 89,\ 90\}$ Quante possibili sequenze di 5 numeri possono essere estratte?

Esercizio Si scriva la formula del binomio di Newton. Si dimostri che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3.$

Esercizio Si definisca il *prodotto cartesiano* tra insiemi.

Esercizio Quanti numeri di 7 cifre si possono ottenere usando una sola volta le cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? Quanti di questi sono più grandi di 5.000.000?

Esercizio Quale è il coefficiente di c^5 nello sviluppo del binomio $(a^2c+b)^7$?

Esercizio Trovare gli anagrammi della parola *babbo* della parola *figli.*

Esercizio Dato $q \neq 1$, si dimostri che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$

Esercizio Cos'è una *relazione* tra due elementi x ed y appartenenti ad insiemi diversi (X e Y rispettivamente)? Cos'è il suo *grafico*? Quando questa può dirsi una *funzione*?

Esercizio Quante sono le diagonali di un poligono irregolare di m lati?

Esercizio La funzione

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

è iniettiva? Restringendo il suo dominio all'intervallo reale $0 \leq x \leq 2\pi$ la funzione è iniettiva? Restringendo il suo dominio all'intervallo reale $-\pi \leq x \leq \pi$ la funzione è iniettiva? Restringendo il suo dominio all'intervallo reale $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ la funzione è iniettiva?

Esercizio La somma dei primi $n+1$ numeri dispari è esattamente pari a $(n+1)^2$. Si scriva una formula che esprime questo fatto. Si dimostri la formula per induzione.

Esercizio Un'urna contiene 5 palline rosse e 5 gialle. Se vengono estratte 4 palline, quante sono le configurazioni finali che si possono ottenere (tenendo conto dell'ordine di estrazione)? Se l'urna contenesse solo 3 palline rosse, quante sono le configurazioni finali possibili estraendo quattro palline?

Esercizio Si dimostri per induzione che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Esercizio In quanti modi possono disporsi 7 persone intorno ad un tavolo rotondo?

Esercizio Si dimostri per induzione che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Esercizio La funzione

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

è iniettiva? è suriettiva? Quale è la sua inversa?

Esercizio Si ricordi la definizione di *permutazione (semplice)*.

Esercizio Con 6 bandiere di colore diverso quanti segnali si possono fare usando contemporaneamente 4 bandiere? N.B.: l'ordine con cui le bandiere sono disposte è importante. Usandole tutte e 6? Usandone solo 5?

Esercizio Si dimostri che $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2)^k = 1$.

2. Sfida

Le *Sfide* non sono in programma!

Tuttavia, se siete arrivati fin qui risolvendo gli esercizi, avrete cominciato a capire l'argomento e le tecniche che abbiamo usato nelle dimostrazioni. Potete allora provare a rispondere a questi quesiti da soli.

Esercizio

Definizione 2.1. Diciamo *combinazione con ripetizioni* di n oggetti distinti di classe k un insieme di k oggetti comunque scelti tra gli n.

Osserviamo che: un oggetto può essere scelto più volte.
Osserviamo che: l'ordinamento degli oggetti all'interno dell'insieme non è importante.

Indichiamo con $C^*_{n,k}$ il numero delle possibili combinazione con ripetizioni di n oggetti distinti di classe k.

Si provi a dimostrare la formula

$$C^*_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

CAPITOLO 2

Topologia in $\mathbf{R}^n$

1. Definizioni

Si danno le seguenti definizioni riferite a un insieme A di punti in $\mathbf{R}^n$ con $n \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$. Solo quando esplicitamente ricordato ci riferiremo al caso monodimensionale $n = 1$.

Dati due punti

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

appartenenti ad $\mathbf{R}^n$ indichiamo con

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

la distanza tra questi due punti.

df. Dato un qualunque punto x di $\mathbf{R}^n$ chiamiamo **intorno sferico** di x di raggio r l'insieme di punti che hanno distanza da x strettamente minore di r:

$$\mathcal{I}(x, r) = \{y \in \mathbf{R}^n : d(x, y) < r\}\,.$$

Osserviamo che nel caso monodimensionale $n = 1$, l'intorno sferico è un intervallo della retta reale di ampiezza $2r$ centrato in x, estremi esclusi. Nel caso bidimensionale $n = 2$, l'intorno sferico di raggio r del punto x è un disco di raggio r, circonferenza esclusa. Solo nel caso tridimensionale $n = 3$, l'intorno sferico di raggio r coincide effettivamente coi punti appartenenti ad una sfera (superficie laterale esclusa). Nel caso $n \geq 4$ si parla comunque di intorno sferico di x di raggio r intendendo l'insieme di punti con distanza da x inferiore ad r. Tale insieme generalizza il concetto di sfera e costituisce una *ipersfera* in n dimensioni.

Si considera un insieme $A \in \mathbf{R}^n$. Definiamo alcune importanti proprietà topologiche relative ai punti di A.

df. Diciamo che $x \in A$ è **punto interno** ad A se esiste un intorno sferico tutto contenuto in A, ovvero se esiste r (sufficientemente piccolo) tale che

$$\mathcal{I}(x, r) \subset A.$$

oss. Si osserva che necessariamente un punto interno ad un insieme appartiene all'insieme.

df. Diciamo insieme **complementare** di A in $\mathbf{R}^n$ l'insieme

$$\mathcal{C}_A = \{y \in \mathbf{R}^n \setminus A\}\,.$$

df. Diciamo che x è **punto esterno** ad A se è interno a $\mathcal{C}_A$.

oss. Necessariamente un punto esterno non può appartenere all'insieme.

df. Diciamo che x è **punto di frontiera** per A se non è né interno né esterno.

oss. Un punto di frontiera può appartenere o non appartenere all'insieme.

df. Diciamo che x è **punto di accumulazione** per A se in ogni intorno sferico di x cade almeno un punto (diverso da x) di A, ovvero se

$$\forall r > 0 \; \exists y \in A \; (y \neq x) : y \in \mathcal{I}(x, r) \cap A.$$

oss. 1 Un punto di accumulazione per l'insieme A può appartenere o non appartenere ad A.

oss. 2 Necessariamente ogni punto interno è punto di accumulazione.

df. Un punto $x \in A$ che non sia di accumulazione per A si dice **punto isolato**.

Dato un insieme A in $\mathbf{R}^n$ indichiamo allora con

$\dot{A}$	l'insieme dei punti interni di A
∂A	l'insieme dei punti di frontiera di A.
A'	l'insieme dei punti di accumulazione di A

oss. $A' \supseteq \dot{A}$.

df. Un insieme A è detto **discreto** se non ha punti di accumulazione ovverosia

$$A' = \emptyset.$$

Le definizioni seguenti sono di importanza capitale.

df. Un insieme A è **aperto** se è costituito solo da punti interni, ovvero se coincide con l'insieme dei suoi punti interni:

$$A = \dot{A}.$$

df. Un insieme A è **chiuso** se è aperto $\mathcal{C}_A$.

df. Diciamo **chiusura** dell'insieme A, e la indichiamo con $\overline{A}$, l'insieme $\overline{A} = A \cup \partial A$.

df. Dati due insiemi $A \subset B$, se accade che $\overline{A} = \overline{B}$ si dice che A è **denso** in B.

df. Un insieme A è **limitato** in $\mathbf{R}^n$ se esiste un intorno sferico dell'origine che contiene A, ovvero se

$$\exists \, r > 0 : A \subset \mathcal{I}(0, r).$$

df. Un insieme A è **finito** in $\mathbf{R}^n$ se è costituito da un numero finito di punti.

df. Un insieme A è **infinito** in $\mathbf{R}^n$ se è costituito da un numero infinito di punti.

df. Un insieme A infinito che può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbf{N}$ è detto **numerabile**.

Teorema di Bolzano Weierstrass. Ogni insieme A di $\mathbf{R}^n$ che sia infinito e limitato possiede almeno un punto di accumulazione.

Per concludere, diamo alcune definizioni relative ad insiemi A in $\mathbf{R}$. Come è noto $\mathbf{R}$ è *totalmente ordinato*, è quindi possibile introdurre in concetto di *maggiorante* M di un insieme A limitato in $\mathbf{R}$.

df. M è un **maggiorante** dell'insieme A se

$$\forall x \in A \; x \leq M.$$

oss. Se un insieme A possiede un maggiorante, necessariamente ne ha infiniti.

df. Diciamo **estremo superiore** di A il più piccolo dei maggioranti e lo indichiamo con

$$\sup_{x \in A} x.$$

Analogamente,

df. m è un **minorante** dell'insieme A se per ogni $x \in A \Rightarrow m \leq x$.

df. Diciamo **estremo inferiore** di A il più grande dei minoranti e lo indichiamo con $\inf_{x \in A} x$.

Se l'estremo superiore o inferiore di A appartengono all'insieme prendono, rispettivamente, il nome di massimo e di minimo dell'insieme e vengono indicati con

$$\max_{x\in A} x \qquad \min_{x\in A} x.$$

2. Esercizi a risposta multipla

Esercizio 1.
$\min_{x\in\mathbf{R}} |x-17| =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ 17 $\boxed{\mathbf{b}}$ $\frac{17}{2}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ non esiste $\boxed{\mathbf{d}}$ 0

Notazione Si indica con

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

l'unione tra gli n insiemi $E_1,\ E_2,\ \cdots\ ,E_n$; essa viene definita in modo analogo a quanto fatto definendo l'unione tra 2 insiemi:

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \{x : x \in E_1 \vee x \in E_2 \vee x \in E_3 \vee \cdots \vee x \in E_n\}\,.$$

Tale unione può anche essere fatta tra infiniti insiemi.

Esercizio 2.
$B_n = [-1, 1+\cos(n\pi))$ allora $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $(-1,2]$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $[-1,2)$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $[-1,2]$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $(-1,2)$

Esercizio 3.
$\mathbf{Q}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ aperto in $\mathbf{R}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ limitato in $\mathbf{R}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ denso in $\mathbf{R}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ chiuso in $\mathbf{R}$

Esercizio 4.
$\displaystyle\max_{x\in\mathbf{R}} \frac{1}{1+x^2} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $+\infty$ $\boxed{\mathbf{b}}$ 0 $\boxed{\mathbf{c}}$ non esiste $\boxed{\mathbf{d}}$ 1

Esercizio 5.
$A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < xy < 1\big\}$ allora $A =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $(0,1)\times(0,1)$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 :\ x^2+y^2<1\big\}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ è illimitato $\boxed{\mathbf{d}}$ $(-1,1)\times(-1,1)$

Esercizio 6.
$A = \big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : |x|>1\big\}$ e $B = \big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+2y^2\le 1\big\}$ allora
$A\cap B =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $\left\{\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\{(0,0)\}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\emptyset$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\{(0,1),(-1,0)\}$

Esercizio 7.
Dato l'insieme $\big\{x\in\mathbf{R} : \exists k \in \mathbf{Z} : x = k^3\big\}$, tale insieme è $\boxed{\mathbf{a}}$ denso in $\mathbf{R}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ numerabile $\boxed{\mathbf{c}}$ limitato $\boxed{\mathbf{d}}$ aperto

Esercizio 8.
$E = \big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : 0 < xy < 3\big\}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ aperto $\boxed{\mathbf{b}}$ chiuso $\boxed{\mathbf{c}}$ limitato $\boxed{\mathbf{d}}$ denso in $\mathbf{R}^2$

Esercizio 9.
$A = \{x\in\mathbf{R} : \sin x = \cos x\}$ $\boxed{\mathbf{a}}$ A è denso in $\mathbf{R}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $A\cap\mathbf{Q}=\emptyset$ $\boxed{\mathbf{c}}$ A è limitato $\boxed{\mathbf{d}}$ A non è numerabile

Esercizio 10.
$A = \left\{ \dfrac{n}{n+1}, n \in \mathbf{N} \right\}$ $\boxed{\mathbf{a}}$ A non ha punti di accumulazione $\boxed{\mathbf{b}}$ $\sup A = +\infty$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\inf A = 1$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\sup A = 1$

Esercizio 11.
$A \subset \mathbf{R}$ è aperto e non vuoto in $\mathbf{R}$, allora A $\boxed{\mathbf{a}}$ ha infiniti punti di accumulazione $\boxed{\mathbf{b}}$ contiene tutti i propri punti di accumulazione $\boxed{\mathbf{c}}$ è un intervallo $\boxed{\mathbf{d}}$ non contiene alcun punto di accumulazione

Esercizio 12.
$E_n = \left[-\dfrac{3}{n}, \dfrac{\pi}{n} \right)$, con $n = 1, 2, 3, ...$; risulta $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $\{0\}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\emptyset$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $[-3, \pi)$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $[-3, \pi]$

Esercizio 13.
$E = \left\{ x \in \mathbf{R} : x = n + \dfrac{2}{n}, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \right\}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ denso in $\mathbf{R}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ contenuto in $\mathbf{Q}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ aperto in $\mathbf{R}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ limitato

Esercizio 14.
Sia $A = \{\{1, 2\}, \{2\}, \{4, 5\}\}$. Allora A $\boxed{\mathbf{a}}$ A è finito $\boxed{\mathbf{b}}$ $A \equiv \{1, 2, 4, 5\}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $A \subset \mathbf{N}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $4 \in A$

Esercizio 15.
Sia E il generico insieme chiuso, si indica con E' il derivato (insieme dei punti di accumulazione) e con ∂E la sua frontiera, allora $\boxed{\mathbf{a}}$ $E' \subset E$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $E' \neq \emptyset$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $E = E'$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $E = \partial E$

Esercizio 16.
Sia $E \subset \mathbf{R}$. La scrittura $\inf E = 4$ significa $\boxed{\mathbf{a}}$ $\forall x \in E, 4 \leq x$ e $\forall x \in E, \exists \epsilon > 0 : 4 < x < 4 - \epsilon$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\forall x \in E, x \leq 4$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\forall x \in E, 4 \leq x$ e $\forall \epsilon > 0, \exists x \in E : 4 \leq x < 4 + \epsilon$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\forall x \in E, 4 \leq x$ e $\forall \epsilon > 0, \exists x \in E : 4 - \epsilon < x \leq 4$

Esercizio 17.
L'insieme delle soluzioni reali della disequazione $x^2 - x - 10 > 0$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ finito $\boxed{\mathbf{b}}$ limitato $\boxed{\mathbf{c}}$ dotato di massimo $\boxed{\mathbf{d}}$ aperto

Esercizio 18.
L'insieme delle soluzioni reali della disequazione $x^2 - x - 11 \geq 0$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ limitato $\boxed{\mathbf{b}}$ finito $\boxed{\mathbf{c}}$ dotato di minimo $\boxed{\mathbf{d}}$ chiuso

Esercizio 19.
L'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ verificanti la condizione $(y-1)^{\frac{1}{4}} + (4 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = 0$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ finito $\boxed{\mathbf{b}}$ vuoto $\boxed{\mathbf{c}}$ illimitato $\boxed{\mathbf{d}}$ aperto

Esercizio 20.
L'insieme $A \subset \mathbf{R}^2$ definito da $A = \{(x, y) : x = y\}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ né chiuso né aperto $\boxed{\mathbf{b}}$ non ha punti di accumulazione $\boxed{\mathbf{c}}$ chiuso $\boxed{\mathbf{d}}$ limitato

Esercizio 21.
Sia $E = \{x \in \mathbf{R} : \log x \leq 5\}$. Allora E $\boxed{\textbf{a}}$ è limitato $\boxed{\textbf{b}}$ non è dotato di massimo $\boxed{\textbf{c}}$ è dotato di minimo $\boxed{\textbf{d}}$ è finito

Esercizio 22.
L'insieme $A = \{x : x = 1 + 6^{-n}, n \in \mathbf{N}\}$, è $\boxed{\textbf{a}}$ finito $\boxed{\textbf{b}}$ ha minimo $\boxed{\textbf{c}}$ ha massimo $\boxed{\textbf{d}}$ non è limitato inferiormente

Esercizio 23.
Sia $E = \left\{n + \dfrac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, ...\right\}$, allora $\boxed{\textbf{a}}$ E è aperto $\boxed{\textbf{b}}$ $\inf E = 0$ $\boxed{\textbf{c}}$ E è costituito di punti isolati $\boxed{\textbf{d}}$ E è finito

Esercizio 24.
L'insieme delle soluzioni reali della disequazione $x^2 - 2x - 7 \leq 0$ è $\boxed{\textbf{a}}$ illimitato $\boxed{\textbf{b}}$ finito $\boxed{\textbf{c}}$ non è dotato di minimo $\boxed{\textbf{d}}$ chiuso

SOLUZIONI

Esercizio 1. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 2. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 3. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 4. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 5. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 6. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 7. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 8. $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 9. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 10. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 11. $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 12. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 13. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 14. $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 15. $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 16. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 17. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 18. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 19. $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 20. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 21. $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 22. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 23. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 24. $\boxed{\mathbf{d}}$

CAPITOLO 3

Grafici di funzioni elementari

1. Esercizi proposti

Esercizio Si disegnino i grafici delle funzioni $y = \sin(-x)$, $y = \cos(-x)$, $y = \arctan(-x)$, $y = \log(-x)$.

Esercizio Si disegnino i grafici delle funzioni $y = \sin|x|$, $y = \cos|x|$, $y = \arctan|x|$, $y = \log|x|$, $y = e^{|x|}$.

Esercizio Si disegni il grafico della funzione periodica di periodo 2 che coincide con la retta $y = x$ nell'intervallo $0 \leq x < 2$.

Esercizio Si disegni il grafico della funzione periodica di periodo 2 che coincide con $y = x^2$ nell'intervallo $-1 \leq x < 1$.

Esercizio Si definisce la funzione *segno* di x come $y = \dfrac{|x|}{x}$ per ogni $x \neq 0$. Essa viene indicata con $y = \operatorname{sign} x$. Se ne disegni il grafico.

Esercizio Si disegni il grafico della funzione periodica di periodo 2 che coincide con $y = x + 1$ nell'intervallo $-1 \leq x < 0$ e con $y = -x + 1$ nell'intervallo $0 \leq x < 1$.

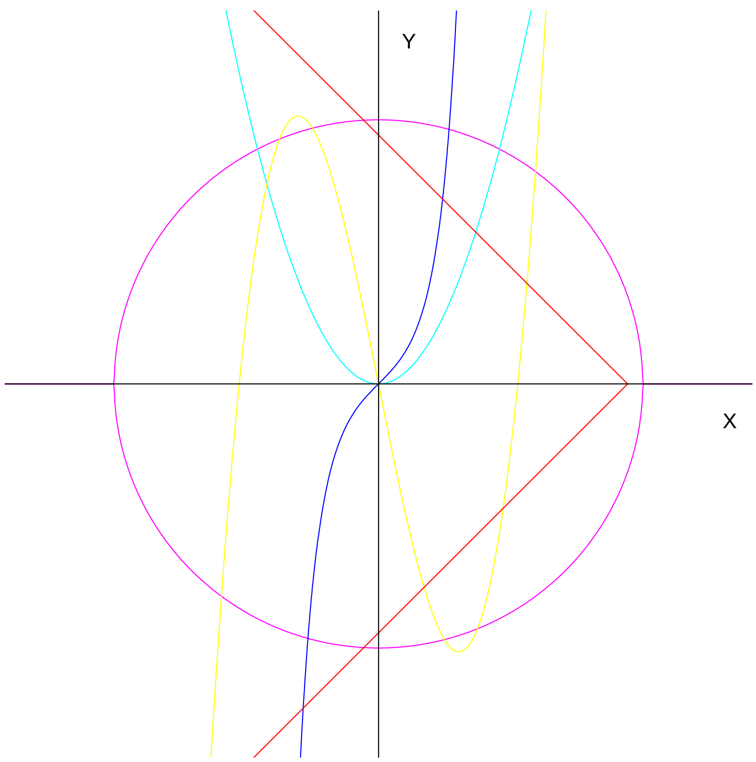

FIGURA 1

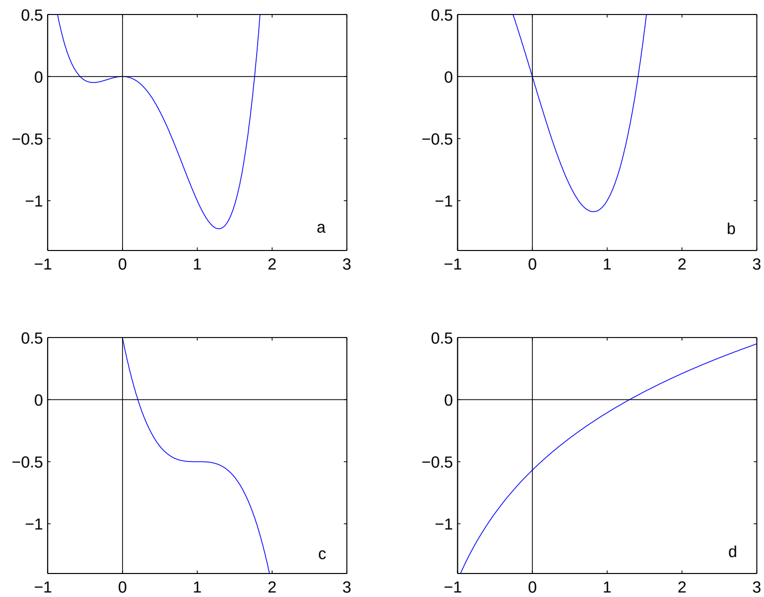

FIGURA 2

Esercizio Si disegni il grafico della funzione $y = \operatorname{sign} x \arctan x$, specificando il dominio.

Esercizio Si disegnino i grafici delle funzioni $y = x\operatorname{sign} x$, $y = x^2 \operatorname{sign} x$, $y = \dfrac{\operatorname{sign} x}{x}$ precisando il dominio.

Esercizio Si disegni il grafico di $y = \cos(x - \frac{\pi}{6})$, $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $y = |x - \frac{\pi}{3}|$, $y = \operatorname{sign}(x-1)$, $y = \operatorname{sign} x + 1$, $y = \arctan(x + \frac{\pi}{4}) - 1$, $y = \cos(x + \frac{5\pi}{6}) + \frac{1}{2}$, $y = \exp(x-1)$, $y = \exp(x) - 1$, $y = \exp(x+4) - 6$, $y = x^4 - 2$.

Esercizio Si disegni il grafico delle funzioni $y = \cos 2x$, $y = \sin \frac{x}{2}$, $y = |2x - \frac{\pi}{3}| - 1$, $y = \operatorname{sign} 3x$, $y = \operatorname{sign} 3x - 2$, $y = 3\operatorname{sign} x + 1$, $y = \arctan 4x + 2$, $y = \cos \frac{x}{\pi}$, $y = \exp(2x - 1)$, $y = 2\exp x - 1$. Per ciascuna si trovino le intersezioni con l'asse x.

Esercizio Si disegni il grafico della funzione così definita:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ se } x \text{ è razionale} \\ 0 \text{ se } x \text{ è irrazionale.} \end{cases} \end{array}$$

Esercizio Si disegnino i grafici delle funzioni $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt[3]{x}$ precisando il dominio.

Esercizio I grafici nei vari colori in Figura 1 rappresentano delle relazioni in $X \times Y$. Si dica quali tra questi rappresentano delle funzioni $f : X \longrightarrow Y$ e quali delle funzioni $f : Y \longrightarrow X$.

Esercizio In Figura 2 sono rappresentati i grafici di 4 funzioni $y = f(x)$ definite dall'intervallo $[-1, 3]$ all'intervallo $[-2, 0.5]$:

$$f : \begin{array}{ccc} [-1,3] & \longrightarrow & [-2, 0.5] \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Per ciascuna funzione (a), (b), (c), (d) si dica se è iniettiva, suriettiva, biunivoca, precisando (con l'approssimazione consentita dalla scala dei grafici) quale è il dominio della funzione e quale la sua immagine.

CAPITOLO 4

Numeri complessi

1. Esercizi a risposta multipla

Esercizio 1.
L'insieme $E = \{z \in \mathbf{C} : z \cdot \bar{z} = 2\}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ privo di punti di accumulazione $\boxed{\mathbf{b}}$ chiuso e limitato $\boxed{\mathbf{c}}$ aperto $\boxed{\mathbf{d}}$ numerabile

Esercizio 2.
$(1-i)e^{i\frac{\pi}{4}} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ 0 $\boxed{\mathbf{b}}$ $\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ 2 $\boxed{\mathbf{d}}$ 1

Esercizio 3.
L'equazione $z + i|z| = 0$ $\boxed{\mathbf{a}}$ ha solo due soluzioni $\boxed{\mathbf{b}}$ ha una sola soluzione $\boxed{\mathbf{c}}$ ha infinite soluzioni $\boxed{\mathbf{d}}$ non ha soluzioni

Esercizio 4.
Le radici complesse dell'equazione $(iz)^5 = 2$ sono $\boxed{\mathbf{a}}$ infinite $\boxed{\mathbf{b}}$ 3 $\boxed{\mathbf{c}}$ 5 $\boxed{\mathbf{d}}$ 7

Esercizio 5.
$e^{i\pi} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ -1 $\boxed{\mathbf{b}}$ i $\boxed{\mathbf{c}}$ 0 $\boxed{\mathbf{d}}$ 1

Esercizio 6.
$e^{2\pi i} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ -1 $\boxed{\mathbf{b}}$ i $\boxed{\mathbf{c}}$ $-i$ $\boxed{\mathbf{d}}$ 1

Esercizio 7.
L'equazione $z - \bar{z} = |z|$ $\boxed{\mathbf{a}}$ non ha soluzioni in $\mathbf{C}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ ha infinite soluzioni in $\mathbf{C}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ ha una soluzione in $\mathbf{C}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ ha due soluzioni in $\mathbf{C}$

Esercizio 8.
$i^{501} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ -1 $\boxed{\mathbf{b}}$ i $\boxed{\mathbf{c}}$ $-i$ $\boxed{\mathbf{d}}$ 1

Esercizio 9.
L'equazione $z \cdot \bar{z} = (\mathrm{Re}(z))^2$ in $\mathbf{C}$ $\boxed{\mathbf{a}}$ ha solo due soluzioni $\boxed{\mathbf{b}}$ non ha alcuna soluzione $\boxed{\mathbf{c}}$ ha infinite soluzioni $\boxed{\mathbf{d}}$ ha solo la soluzione $z = 0$

Esercizio 10.
e^{1+i} $\boxed{\mathbf{a}}$ $= e\,(\cos 1 + i \sin 1)$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $= e\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $\boxed{\mathbf{c}}$ i $\boxed{\mathbf{d}}$ non esiste

Esercizio 11.
Sia $z = x + iy$ allora $|3+z|^2$ vale $\boxed{\mathbf{a}}$ $9 + z^2$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $(3+x)^2 + y^2$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $(3+x)^2 - y^2$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $3 + x + y$

Esercizio 12.
Le soluzioni di $\arg(\bar{z}) = \dfrac{\pi}{2}$ sono rappresentate nel piano di Gauss da $\boxed{\mathbf{a}}$ la semiretta $x > 0$ $\boxed{\mathbf{b}}$ la semiretta $y > 0$ $\boxed{\mathbf{c}}$ la semiretta $y < 0$ $\boxed{\mathbf{d}}$ la semiretta $x = y$, con $x > 0$

Esercizio 13.
$\sqrt{7i} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $\pm\sqrt{7}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\sqrt{\dfrac{7}{2}}(1+i)$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\pm\sqrt{\dfrac{7}{2}}(1+i)$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\pm i\sqrt{7}$

Esercizio 14.
In $\mathbf{C}$, una delle $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{27}}$ è data da $\boxed{\mathbf{a}}$ $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\dfrac{1}{3}i$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\dfrac{1}{3}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Esercizio 15.
$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{564} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ -1 $\boxed{\mathbf{b}}$ i $\boxed{\mathbf{c}}$ $-i$ $\boxed{\mathbf{d}}$ 1

Esercizio 16.
Se $z = \cos 3 + i \sin 3$ allora $z^2 =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $\cos^2 3 + i \sin^2 3$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\cos^2 3 - i \sin^2 3$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\cos 6 + i \sin 6$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\cos 9 + i \sin 9$

Esercizio 17.
$(|z| - 1)\left(z^2 - 1\right) = 0$ ha $\boxed{\mathbf{a}}$ 3 radici $\boxed{\mathbf{b}}$ solo radici reali $\boxed{\mathbf{c}}$ infinite radici $\boxed{\mathbf{d}}$ due radici

Esercizio 18.
Nel piano di Gauss l'insieme $E = \left\{z \in \mathbf{C} : z^4 = 1\right\}$ corrisponde $\boxed{\mathbf{a}}$ ai vertici di un quadrato di centro 0 $\boxed{\mathbf{b}}$ all'insieme $\{-1, 1\}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ ai vertici di un quadrato di lato 1 $\boxed{\mathbf{d}}$ ai vertici di un quadrato di centro 1

Esercizio 19.
$A = \left\{z \in \mathbf{C} : z = \dfrac{1}{z}\right\} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $\emptyset$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\{1, -1, i, -i\}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\{-1, 1\}$

Esercizio 20.
$A = \{z \in \mathbf{C} : |z - 9| = i\}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ una retta $\boxed{\mathbf{b}}$ un cerchio $\boxed{\mathbf{c}}$ il punto $i + 9$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\emptyset$

Esercizio 21.
$A = \left\{z \in \mathbf{C} : \left|\dfrac{3z}{4 - i\sqrt{3}}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ la parte interna di un cerchio $\boxed{\mathbf{b}}$ la parte esterna di un cerchio $\boxed{\mathbf{c}}$ una circonferenza $\boxed{\mathbf{d}}$ un semipiano aperto

Esercizio 22.
$A = \left\{z \in \mathbf{C} : \left|\dfrac{7i}{z - 3i}\right| < 3\right\}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ la parte esterna di un cerchio $\boxed{\mathbf{b}}$ un insieme limitato $\boxed{\mathbf{c}}$ un semipiano $\boxed{\mathbf{d}}$ un cerchio chiuso

Esercizio 23.
$A = \left\{z \in \mathbf{C} : \left|\dfrac{z - i}{z + 4}\right| < 1\right\}$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ la parte esterna di un cerchio $\boxed{\mathbf{b}}$ un insieme limitato $\boxed{\mathbf{c}}$ un semipiano $\boxed{\mathbf{d}}$ un cerchio chiuso

Esercizio 24.

$e^{1+i\pi} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ -1 $\boxed{\mathbf{b}}$ i $\boxed{\mathbf{c}}$ $-e$ $\boxed{\mathbf{d}}$ e

Esercizio 25.
$\mathrm{Im}(e^{6-\pi i}) =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ 0 $\boxed{\mathbf{b}}$ 6 $\boxed{\mathbf{c}}$ -1 $\boxed{\mathbf{d}}$ -6

Esercizio 26.
L'equazione $z\bar{z} = |z|$ $\boxed{\mathbf{a}}$ non ha soluzioni in $\mathbf{C}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ ha un numero finito di soluzioni in $\mathbf{C}$ $\boxed{\mathbf{c}}$ ha una soluzione in $\mathbf{C}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ ha soluzioni descritte da un cerchio e da un punto esterno al cerchio.

Esercizio 27.
$\sqrt{i^{227}} =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $\sqrt{2}\big(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\big)$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\sqrt{2}\big(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\big)$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\pm\sqrt{2}\big(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\big)$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\pm\sqrt{2}\big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\big)$

Esercizio 28.
$e^{\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)}$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $= e\,(\cos 1 + i\sin 1)$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $= e\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $\boxed{\mathbf{c}}$ i $\boxed{\mathbf{d}}$ non esiste

Esercizio 29.
Sia $z = x+iy$ allora z^6 vale $\boxed{\mathbf{a}}$ $(x^2+y^2)^3\Big(\cos\big(6\arctan\frac{x}{y}\big)+i\sin\big(6\arctan\frac{x}{y}\big)\Big)$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\pm(x^2+y^2)^3\Big(\cos\big(6\arctan\frac{y}{x}\big)+i\sin\big(6\arctan\frac{y}{x}\big)\Big)$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $(x^2+y^2)\Big(\cos\big(\arctan\frac{y}{x}\big)+i\sin\big(\arctan\frac{y}{x}\big)\Big)$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $(x^2+y^2)^3\Big(\cos\big(6\arctan\frac{y}{x}\big)+i\sin\big(6\arctan\frac{y}{x}\big)\Big)$

Esercizio 30.
Le soluzioni di $\begin{cases} |z-3| > |z+1| \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ sono rappresentate nel piano di Gauss da $\boxed{\mathbf{a}}$ un semipiano $\boxed{\mathbf{b}}$ un segmento compreso un estremo $\boxed{\mathbf{c}}$ un segmento compresi entrambi gli estremi $\boxed{\mathbf{d}}$ un segmento esclusi gli estremi

Esercizio 31.
In $\mathbf{C}$, $\sqrt[3]{1} =$ è $\boxed{\mathbf{a}}$ 1; $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$; $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ 1 $\boxed{\mathbf{c}}$ 1; $\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ 1; i; $-i$

Esercizio 32.
In $\mathbf{C}$, una delle $\sqrt[4]{-16}$ è data da $\boxed{\mathbf{a}}$ -2 $\boxed{\mathbf{b}}$ $\sqrt{2}(1-i)$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $2(i+1)$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

Esercizio 33.
Se $z = \cos 2 + i\sin 2$ allora $z^6 =$ $\boxed{\mathbf{a}}$ $\cos^6 2 + i\sin^6 2$ $\boxed{\mathbf{b}}$ e^{12i} $\boxed{\mathbf{c}}$ $6e^{2i}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\cos 12 - i\sin 12$

Esercizio 34.
$(|z|+1)\left(z^2+1\right) = 0$ ha $\boxed{\mathbf{a}}$ 3 radici complesse $\boxed{\mathbf{b}}$ solo radici reali $\boxed{\mathbf{c}}$ infinite radici complesse $\boxed{\mathbf{d}}$ due radici complesse

SOLUZIONI

Esercizio 1. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 2. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 3. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 4. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 5. $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 6. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 7. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 8. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 9. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 10. $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 11. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 12. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 13. $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 14. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 15. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 16. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 17. $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 18. $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 19. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 20. $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 21. $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 22. $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 23: $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 24: $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 25: $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 26: $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 27: $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 28 $\boxed{\mathbf{a}}$ Esercizio 29: $\boxed{\mathbf{d}}$ Esercizio 30: $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 31: $\boxed{\mathbf{c}}$ Esercizio 32: $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 33: $\boxed{\mathbf{b}}$ Esercizio 34: $\boxed{\mathbf{d}}$

2. Esercizi proposti

Esercizio Risolvere la disequazione $\mathrm{Re}\big(\frac{1}{z^2}\big) \geq 0$.

Esercizio Descrivere l'insieme $A = \{z \in \mathbf{C} : |z-2| > |z-2i|\}$.

Esercizio Descrivere l'insieme $A = \{z \in \mathbf{C} : |z-1+i| > |2z-1-i|\}$.

Esercizio Descrivere l'insieme $A = \{z \in \mathbf{C} : -2 \leq \mathrm{Re}(iz) < 4\}$.

Esercizio Risolvere in $\mathbf{C}$ le equazioni:

(a) $(2z-3i)^4 = 1-\sqrt{3}i$;

(b) $\overline{z}^8 = i$;

(c) $\dfrac{1}{z+1} + \dfrac{1}{z+3} + 1 = 0$;

(d) $\dfrac{1}{\overline{z}+1} + \dfrac{1}{z+3} + 1 = 0$;

(e) $z^6 + 5i\overline{z}^4 = 0$.

Esercizio Trovare la parte reale ed immaginaria di $\dfrac{1+i}{(1-2i)\,(2+3i)}$.

Esercizio Per quali $z \in \mathbf{C}$ il numero complesso $\dfrac{z^5\overline{z}}{2i}$ è reale e di modulo 1?

Esercizio Dato $z = \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{1-i}$ determinare $\sqrt{z}$, z^2, z^4, z^{18}.

Esercizio Verificare che $1-3i$ è radice cubica di $-2(13-9i)$. Trovare le altre.

Esercizio Calcolare e disegnare $\big(\pm\sqrt{3} \pm i\big)^{\frac{1}{6}}$.

Esercizio Per quali valori reali di λ l'equazione $4z^2 + \dfrac{1-\lambda}{z^2} + 12 = 0$ ha tutte le radici con parte immaginaria non nulla?

Esercizio Risolvere $\big|z^2+1\big| = z - z^2$.

Esercizio Provare che $\dfrac{|\mathrm{Re}z| + |\mathrm{Im}z|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\mathbf{R}z| + |\mathrm{Im}z|$.

Esercizio Sia

$$A = \left\{ z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\left(\frac{z+1}{z+i}\right) < 0 \right\}.$$

Si determini l'insieme A e lo si disegni nel piano complesso.
Si determinino e si disegnino sul piano complesso gli insiemi

$$B = \left\{ w \in \mathbf{C} : w^{-1} \in A \right\} \quad \text{e} \quad C = \left\{ e^{i\pi} w : w \in B \right\}.$$

Esercizio Calcolare i valori

$$\alpha = \sup\{|z-w| : z^2 = i, w^2 = 4i\} \quad \text{e} \quad \beta = \inf\{|z-w| : z^2 = i, w^2 = 4i\}.$$

Esercizio Si rappresenti z nel piano complesso. Quindi si rappresenti iz.

Sia dato l'insieme
$$A = \left\{ z \in \mathbf{C} : \frac{1}{8} < |z| < 1, \pi < \arg(iz) < \frac{5}{4} \right\}.$$
Si rappresenti A nel piano complesso. Quindi si rappresenti nel piano complesso l'insieme
$$B = \left\{ w \in \mathbf{C} : w^3 \in A \right\}.$$

Esercizio Disegnare i seguenti sottoinsiemi del piano complesso
$$\begin{aligned} A &= \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| < 2, 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{6} \right\} \\ B &= \left\{ w = z^3 : z \in A \right\} \\ C &= \{ w = iz : z \in A \} \\ D &= \left\{ w = \frac{i}{z} : z \in A \right\}. \end{aligned}$$

Esercizio Trovare l'insieme delle soluzioni $z \in \mathbf{C}$ della seguente equazione:
$$\left| \frac{1 + iz}{1 - iz} \right| = 1.$$

Esercizio Risolvere il seguente sistema di equazioni nel campo complesso
$$\begin{cases} |z - 1| &= |z + 1| \\ |ze^z| &= 1. \end{cases}$$

Esercizio Si diano le definizioni di insieme aperto, chiuso limitato per un sottoinsieme $A \subset \mathbf{R}^2$.
Si enunci il teorema di Bolzano Weierstrass.
Disegnare nel piano di Gauss i seguenti insiemi
$$A = \left\{ z \in \mathbf{C} : z\mathrm{Im}^2(z) = i|z|^2 \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ z \in \mathbf{C} : \left| \frac{z + \bar{z}}{2i} \right| < \frac{\mathrm{Im}^2(z)}{4} + 1 \right\}.$$
Dire se B, come sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ è aperto, chiuso, limitato.

Esercizio Si risolva la seguente equazione nel campo complesso
$$\bar{z}^8 = -1.$$

Esercizio Si disegnino nel piano complesso gli insiemi
$$\begin{aligned} A &= \left\{ z \in \mathbf{C} : \left| \bar{z} + \frac{6}{z} \right| \leq 5 \right\} \\ B &= \{ v \in \mathbf{C} : v = z + i, z \in A \} \\ C &= \{ w \in \mathbf{C} : w = iv, v \in B \}. \end{aligned}$$
Si dica se gli insiemi A, B, C sono aperti, chiusi o limitati in $\mathbf{R}^2$.

3. Sfida

Qualche esercizio per cui occorre l'*intuizione*.

Esercizio Scrivere in forma cartesiana i complessi $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ per $n = 1...9$. Se $A = \left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n\right.$ $\left.n \in Z\right\}$, l'insieme A è numerabile? Se $B = \left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{n}}, n \in Z\right\}$, l'insieme B è numerabile?

Esercizio Calcolare $\sum_{k=0}^{10} \cos k\theta$, utilizzando la formula $\sum_{k=0}^{n} q_k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ che vale anche per $q \in \mathbf{C}$ purché $|q| < 1$.

Esercizio Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali. Provare che se z_0 è una radice di $P(x)$ allora anche $\overline{z_0}$ è radice. Utilizzando questo risultato provare che ogni polinomio di grado dispari con coefficienti reali ha almeno una radice reale.

Esercizio Risolvere l'equazione

$$z^3 + (2+3i)\,z^2 + (5+6i)\,z + 15i = 0$$

sapendo che ha almeno una radice immaginaria pura. Disegnare quindi le soluzioni.

CAPITOLO 5

Spazi Euclidei e Spazi Vettoriali

1. Spazi Euclidei

Esercizio Dare la definizione di Spazio Euclideo.

Esercizio Si rappresentino nello spazio le seguenti coppie di vettori di $\mathbf{R}^3$. Quali di queste sono costituite da vettori ortogonali? Riconoscere le coppie ortogonali verificando che il prodotto scalare è nullo.

(a) $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 5)$

(c) $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 3, 5)$

(d) $\mathbf{v}_1 = (\sqrt{2}, 3, -\sqrt{2})$, $\mathbf{v}_2 = (1, \sqrt{2}, 4)$

(e) $\mathbf{v}_1 = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{3})$, $\mathbf{v}_2 = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, 2)$

(f) $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$

(g) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 4, -2)$

(h) $\mathbf{v}_1 = (1/2, -1, 3/2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -3, -8/3)$

(i) $\mathbf{v}_1 = (2, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1/2, -1)$

Esercizio Si trovi l'angolo compreso tra le coppie di vettori introdotte nell'esercizio precedente.

Esercizio Dati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$, trovare il versore (vettore di modulo unitario) che individua la stessa direzione.

(a) $\mathbf{v} = (0, -1, 2, -1)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (\sqrt{3}, 3, -\sqrt{2}, -1)$

(c) $\mathbf{v}_1 = (-\sqrt{2}, 0, 0, \sqrt{3})$

(d) $\mathbf{v} = (1, 0, 1, 0)$

(e) $\mathbf{v} = (1, -1, 1, 0)$

(f) $\mathbf{v} = (1, \sqrt{2}, -1, 3/2)$

(g) $\mathbf{v} = (2, 0, 2, -1)$

Esercizio Sono date le seguenti coppie di vettori. Riconoscere a quale spazio euclideo appartengono. Per ciascuna coppia trovare il vettore somma, il vettore differenza, il prodotto scalare e, quando è definito, il prodotto vettoriale.

(a) $\mathbf{v}_1 = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 3, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 2, 0, 5)$

(c) $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 3, 5, 3, 0)$

(d) $\mathbf{v}_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\mathbf{v}_2 = (1, \sqrt{2})$

(e) $\mathbf{v}_1 = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3})$, $\mathbf{v}_2 = (\sqrt{3}, 0, 2)$

(f) $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$

(g) $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 2, 4, -2)$

(h) $\mathbf{v}_1 = (1/2, -1, 0, 3/2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -3, 2, -8/3)$

(i) $\mathbf{v}_1 = (2, 2, -4)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1/2, -1)$

Esercizio Sia dato il vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 1, 2)$ di $\mathbf{R}^4$. Si trovino tre vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ in $\mathbf{R}^4$ che siano ortogonali a $\mathbf{v}$, e che non siano uno multiplo dell'altro (cioé, ad esempio, non può essere $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$, con $\alpha \in \mathbf{R}$).

Esercizio Si trovi un vettore di $\mathbf{R}^5$ che sia ortogonale a $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$ e contemporaneamente a $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, -1, 1)$.

Esercizio Si calcoli l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{x} = (-1, 2, -3)$ ed $\mathbf{y} = (1, -2, 2)$.

Esercizio Dati due vettori $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ e $\mathbf{v} = (0, -1, 2)$, si trovi il versore perpendicolare ad entrambi. Quindi si trovi il vettore risultante del prodotto vettoriale $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$; si calcoli $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|$ e si trovi il versore che individua la medesima direzione di $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Esercizio Si calcoli il doppio prodotto misto tra i vettori $\mathbf{x} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{y} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{z} = (-1, -1, -1)$.

Esercizio Si calcoli l'angolo compreso tra la diagonale di un cubo ed un suo lato.

Esercizio Si calcoli l'angolo compreso tra due lati di una piramide equilatera. Si calcoli l'angolo compreso tra uno spigolo della piramide e il piano orizzontale.

Esercizio Si calcoli il volume del parallelepipedo avente per lati i vettori $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, -3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -1)$.

Esercizio Si disegni il parallelepipedo avente per lati i vettori $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -1)$. Si calcoli il suo volume.

2. Spazi Vettoriali

Esercizio Si dia la definizione di spazio vettoriale.

Esercizio Verificare, tramite la definizione, che $\mathbf{R}^5$ è uno spazio vettoriale.

Esercizio Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4 nella variabile x. Esprimere il vettore $\mathbf{v} = x^3 + x^2 + x + 1$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1 = x^3 - x$, $\mathbf{v}_2 = x^2 - 1$, $\mathbf{v}_3 = x^2 + x$, $\mathbf{v}_4 = -x + 1$.

Esercizio Sia W il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$ definito imponendo la condizione

$$W = \left\{(a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5 : a - b + c - d = 1\right\}.$$

Trovare due elementi di W che sommati non danno un elemento di W. W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?

Esercizio Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici $(2, 2)$. Si scriva uno dei seguenti vettori di V come combinazione lineare degli altri:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio L'insieme dei punti di $\mathbf{R}^2$ così definito

$$W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y = 0\}$$

è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$? DIMOSTRARE la risposta usando la DEFINIZIONE di sotto-spazio vettoriale. Disegnare W nel piano cartesiano.

Esercizio L'insieme dei punti di $\mathbf{R}^2$ così definito

$$W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y = 0\}$$

è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$? DIMOSTRARE la risposta usando un esempio opportuno. Disegnare W nel piano cartesiano.

Esercizio Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 5 nella variabile x. I vettori $\mathbf{v}_1 = x^4 - 4x$, $\mathbf{v}_2 = x^2 + x - 1$, $\mathbf{v}_3 = x^2 - x$, $\mathbf{v}_4 = x^5 + x^3 - x + 1$, $\mathbf{v}_5 = 2x^2 - 1$, appartenenti a V, sono linearmente indipendenti?

Esercizio Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori: $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 3, 4, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 0, -1, 1)$. Trovare un vettore di $\mathbf{R}^5$ che non appartenga a W.

Esercizio Siano V e W i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ rispettivamente generati dagli insiemi di vettori sotto riportati:

$$V = \{\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)\} \qquad W = \{\mathbf{w}_1 = (0, 1, 2), \mathbf{w}_2 = (-1, 0, 1)\}.$$

Trovare la dimensione ed una base di V e di W. L'insieme dei vettori di $\mathbf{R}^3$ che appartengono contemporaneamente a V ed a W (e che indico con $V \cap W$) è uno spazio vettoriale? Nel caso, trovarne la dimensione ed una base.

Esercizio Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4 nella variabile x. I vettori $\mathbf{v}_1 = x^4 - 4x$, $\mathbf{v}_2 = x^2 + x - 1$, $\mathbf{v}_3 = x^2 - x$, $\mathbf{v}_4 = x^3 - x + 1$, appartenenti a V, sono linearmente indipendenti?

Esercizio Trovare la dimensione ed una base del sottospazio W di $\mathbf{R}^5$ assegnato imponendo la condizione

$$W = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5 : a + b + d + e = 0\}.$$

Esercizio Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $(2, 2)$. Trovare un vettore appartenente a V che non sia combinazione lineare dei seguenti vettori:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $(2, 2)$. I vettori seguenti

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

sono linearmente indipendenti? Nel caso non lo fossero esprimere un vettore come combinazione degli altri.

Esercizio Trovare la dimensione ed una base del sottospazio W di $\mathbf{R}^5$ assegnato imponendo la condizione

$$W = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5 : a + 2b = d + e, b + c = 2d\}.$$

Esercizio Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $(2,2)$. Esprimere il vettore $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 5 nella variabile x. Si trovi la dimensione ed una base del sottospazio di V generato dalle combinazioni lineari dei vettori: $\mathbf{v}_1 = 2x^4 - 4x$, $\mathbf{v}_2 = x^5 + x - 1$, $\mathbf{v}_3 = x^5 - x$, $\mathbf{v}_4 = x^3 - x + 1$, $\mathbf{v}_5 = x^4 - 1$.

Esercizio Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $(2,2)$. Esprimere il vettore $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio Sia W il sottospazio vettoriale delle matrici $(2,2)$ generato dalle combinazioni lineari dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trovare la dimensione ed una base di W.

Esercizio Siccome $\mathbf{R}^n$ oltre ad essere uno spazio vettoriale è anche euclideo, disponiamo del prodotto scalare e, dunque, di un modo per verificare l'ortogonalità tra due vettori.

Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$ definito dalla relazione

$$V = \left\{(x, y, z, w, t) \in \mathbf{R}^5 : x + z - 2w = 2x - z - w = 0\right\}.$$

Trovare un vettore di $\mathbf{R}^5$ che sia ortogonale a tutti gli elementi di V.

Esercizio Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^5$ così definiti:

$$U = \left\{(x, y, z, w, t) \in \mathbf{R}^5 : x + 2y + z + w + t = x + y + t = 0\right\},$$

$$V = \left\{(x, y, z, w, t) \in \mathbf{R}^5 : 2x + 2y + z + 2w + 2t = x + y + w + t = 0\right\}.$$

Determinare la dimensione ed una base di U, V e di $U \cap V$.

Esercizio Dimostrare che i sottospazi U e V di $\mathbf{R}^2$ sono costituiti da elementi ortogonali tra loro:

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 3x - 2y = 0\right\},$$

$$V = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x + 3y = 0\right\}.$$