

3

Equazioni del prim'ordine (tempo discreto)

3.1 Introduzione

In questo capitolo ci occupiamo delle equazioni alle differenze a un passo o del prim'ordine, in forma normale, del tipo

$$x_{t+1} = f(t, x_t), \quad t \in \mathbf{N} \quad (3.1)$$

solitamente accoppiate ad una condizione iniziale

$$x_0 \text{ assegnato.} \quad (3.2)$$

Abbiamo assunto $t \in \mathbf{N}$, ma può succedere che l'equazione abbia senso da un certo intero t_0 in poi, nel qual caso si assegna x_{t_0} come condizione iniziale.

Per alcuni tipi di equazione, sono disponibili formule esplicite per totalità della soluzione, che chiameremo per analogia col caso continuo, *soluzione generale*. Un caso importante è quello delle equazioni lineari che analizzeremo nella sezione **2**.

La parte di teoria che si occupa dell'esistenza e dell'unicità per il problema (3.1), (3.2) è più semplice rispetto al caso continuo; è sufficiente che, una volta calcolato x_t , la funzione f sia ben definita in (t, x_t) per generare un'unica soluzione del problema.

L'analisi degli equilibri ed il comportamento asintotico per $t \rightarrow +\infty$ possono invece presentare aspetti notevolmente più complessi che nel caso continuo. Il caso particolare delle equazioni *non lineari* autonome, ci servirà per introdurre gli importanti concetti di punto *fisso* o di *equilibrio*, di *orbite periodiche* e di *caos deterministico*.

3.2 Equazioni lineari

Le equazioni del tipo

$$x_{t+1} = a_t x_t + b_t, \quad t \in \mathbf{N} \quad (3.3)$$

si dicono *lineari*. Le successioni a_t e b_t sono i *coefficienti* dell'equazione. Se $b_t = 0$ l'equazione si dice *omogenea*. Per queste equazioni è disponibile una formula esplicita per la soluzione generale. Cominciamo a considerare il caso in cui coefficienti siano (successioni) costanti.

3.2.1 Equazioni lineari omogenee

Iniziamo con il caso dell'equazione *omogenea*

$$x_{t+1} = ax_t,$$

in cui il coefficiente a è costante (indipendente da t). L'abbiamo già incontrata nell'introduzione: è la versione discreta del modello di Malthus, dove abbiamo scritto a al posto di $1 + \varepsilon$. Come abbiamo già visto, la soluzione generale è

$$x_t = ca^t, \quad c \in \mathbf{R}$$

dove il parametro c coincide con il valore iniziale della variabile di stato: $c = x_0$.

Se a_t non è costante, l'equazione è

$$x_{t+1} = a_t x_t. \quad (3.4)$$

Per arrivare a scrivere la soluzione generale, scriviamo la relazione (3.4) per $t = 0, 1, 2, \dots$; si trova:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 x_0, \\ x_2 &= a_1 x_1 = (a_1 a_0) x_0, \\ x_3 &= a_2 x_2 = (a_2 a_1 a_0) x_0, \\ &\dots \end{aligned}$$

e la formula per il generico termine x_t si intuisce:

$$x_t = (a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{t-1}) x_0 = x_0 \prod_{s=0}^{t-1} a_s.$$

Se fosse t_0 l'istante iniziale, si troverebbe la formula

$$x_t = x_{t_0} \prod_{s=t_0}^{t-1} a_s.$$

La famiglia di soluzioni della (3.4) si ottiene dunque moltiplicando per una costante reale c (che in questo caso coincide con il valore iniziale della variabile di stato: $c = x_0$) una particolare soluzione dell'equazione stessa:

$$x_t = c \prod_{s=t_0}^{t-1} a_s, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Esempio 2.1. Consideriamo l'equazione

$$x_{t+1} = \frac{t}{t+1} x_t, \quad t \geq 1.$$

Abbiamo $t_0 = 1$ e

$$a_t = \frac{t}{t+1}.$$

La soluzione è data dalla formula

$$x_t = x_1 \prod_{s=1}^{t-1} \frac{s}{s+1} = x_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{t-1}{t} = \frac{x_1}{t}.$$

3.2.2 Equazioni lineari non omogenee

Come per le equazioni differenziali, si può dimostrare che *la soluzione generale della (3.3) si può ottenere come somma della soluzione generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare della non omogenea.*

In altri termini, una generica soluzione x_t della (3.3) si può scrivere nella forma

$$x_t = z_t + y_t.$$

dove z_t è una soluzione (che dipende da x_t) dell'*equazione omogenea associata*

$$z_t = a_t z_t$$

e con y_t una soluzione particolare (fissata) della (3.3).

Coefficienti costanti

Nel caso particolare che l'equazione sia a *coefficienti costanti*, cioè $a_t = a$ costante e $b_t = b$ costante, una soluzione particolare si trova facilmente. Infatti, provando con una successione costante $\bar{x}_t = k$, deve essere, dato che $\bar{x}_{t+1} = k$,

$$k = ak + b.$$

Se $a \neq 1$ si trova

$$\bar{x}_t = k = \frac{b}{1-a}$$

che, essendo costante, è una *soluzione di equilibrio*. Di conseguenza, la soluzione generale dell'equazione

$$x_{t+1} = ax_t + b, \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 1$$

è

$$\boxed{x_t = ca^t + \frac{b}{1-a}, \quad c \in \mathbf{R}} \quad (3.5)$$

e la soluzione che “parte” da x_0 è

$$\boxed{x_t = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^t + \frac{b}{1-a}} \quad (3.6)$$

Infatti, sostituendo nella (3.5) $t = 0$, si trova

$$x_0 = c + \frac{b}{1-a}$$

e quindi

$$c = x_0 - \frac{b}{1-a}.$$

Se $\boxed{a = 1}$ da

$$x_{t+1} = x_t + b$$

sostituendo $t = 0, 1, 2, \dots$ si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + b, \\ x_2 &= x_1 + b = x_0 + 2b, \\ x_3 &= x_2 + b = x_0 + 3b, \\ &\vdots \end{aligned}$$

e si ricava facilmente

$$\boxed{x_t = x_0 + tb}$$

Esempio 2.2. Cerchiamo la soluzione dell'equazione alle differenze

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + 1,$$

che soddisfa la condizione iniziale $x_0 = 1$. La soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente è

$$z_t = c \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

mentre la soluzione di equilibrio è (qui $a = 1/2 \neq 1$) $\bar{x}_t = 2$ per cui la soluzione generale è

$$x_t = c \left(\frac{1}{2}\right)^t + 2, \quad c \in \mathbf{R}. \quad (3.7)$$

Per determinare la soluzione particolare che verifica la condizione iniziale assegnata determiniamo la costante c , sostituendo il valore 0 nella (3.7); si ha

$$x_0 = 1 = c + 2 \quad \Rightarrow \quad c = -1.$$

La soluzione cercata è quindi

$$x_t = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Si controlla facilmente che $x_t \rightarrow 2$ per $t \rightarrow +\infty$.

3.2.3 Capitalizzazione semplice e composta

Un capitale C , investito in capitalizzazione semplice con tasso mensile d'interesse semplice r , ogni mese frutta interessi pari a rC . Indicando con C_t la somma disponibile dopo t mesi e con C_{t+1} la somma disponibile al mese successivo, si ha

$$C_{t+1} = C_t + rC. \quad (3.8)$$

Se la stessa somma fosse investita in capitalizzazione composta con tasso mensile d'interesse composto i , indicando sempre con C_t la somma disponibile dopo t mesi e con C_{t+1} la somma disponibile al mese successivo, si avrebbe, essendo gli interessi calcolati non sul capitale iniziale ma sul capitale maturato,

$$C_{t+1} = C_t + iC_t = (1 + i) C_t. \quad (3.9)$$

La (3.8) e la (3.9) sono equazioni lineari a coefficienti costanti, la seconda è anche omogenea. Per le due equazioni (3.8) e (3.9), tenendo conto della condizione iniziale $C_0 = C$ (il capitale in data 0 è C), si ottengono, rispettivamente, le soluzioni

$$C_t = C(1 + rt), \quad C_t = C(1 + i)^t.$$

3.2.4 Modello della ragnatela

Le quantità domandata e offerta d'un bene dipendono dal prezzo dello stesso. In un semplice modello che descrive la formazione del prezzo di mercato, si assume che domanda e offerta siano funzioni lineari (affini) del prezzo.

Consideriamo prima il caso statico, in cui il prezzo p , e quindi anche domanda e offerta siano costanti. Se D è la quantità domandata, O la quantità offerta e a, b, c, d parametri positivi¹, si ha

$$D(p) = a - bp, \quad O(p) = -c + dp.$$

¹Il parametro a rappresenta il *mercato potenziale*. Il parametro c può anche essere nullo.

Il mercato è in equilibrio se $D = O$ ovvero se

$$a - bp = -c + dp$$

da cui s'ottiene il prezzo p^* d'equilibrio

$$p^* = \frac{a + c}{b + d}.$$

Supponiamo ora che il prezzo e, quindi, la domanda e l'offerta siano funzioni del tempo. Mentre la domanda s'adeguа immediatamente al prezzo, l'offerta richiede un po' di tempo. La quantità offerta dipende, in particolare, dal prezzo nel periodo temporale precedente. Scegliamo come unità di tempo il "ritardo" nell'adeguamento dell'offerta. Per molti prodotti, per esempio agricoli, che vengono seminati un anno prima dell'immissione sul mercato, l'offerta dipende dal prezzo dell'anno precedente. In tal caso l'unità di tempo è un anno. Siano, quindi,

$$\begin{cases} D_n = a - bp_n \\ O_n = -c + dp_{n-1} \end{cases}$$

rispettivamente, la funzione di domanda e la funzione di offerta (con a, b, c, d parametri positivi). All'equilibrio sarà $D_n = O_n$, ovvero

$$a - bp_n = -c + dp_{n-1}.$$

Risolviendo rispetto a p_n s'ottiene

$$p_n = -\frac{d}{b}p_{n-1} + \frac{a+c}{b},$$

equazione alle differenze del primo ordine lineare a coefficienti costanti, la cui soluzione è (il primo coefficiente è diverso da 1) data dalla formula (3.6):

$$p_n = \left(-\frac{d}{b}\right)^n (p_0 - p^*) + p^*,$$

dove p_0 indica il prezzo iniziale e $p^* = \frac{a+c}{b+d}$ è il prezzo di equilibrio del mercato in condizioni statiche.

Osserviamo che se $p_0 = p^*$, la soluzione è costante e coincide con il prezzo di equilibrio: $p_n = p^*$ per ogni n . Se $p_0 \neq p^*$, abbiamo una dinamica oscillante: il prezzo p_n oscilla attorno a p^* .

L'andamento per $n \rightarrow +\infty$ dipende dal rapporto d/b . Se $d > b$ le oscillazioni s'amplificano, se $d < b$ le oscillazioni si smorzano. Se $d = b$ l'ampiezza delle oscillazioni rimane costante. *La dinamica converge verso l'equilibrio se e solo se $d < b$* , cioè se la pendenza della curva d'offerta è minore del modulo della pendenza della curva di domanda:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p^* \quad \text{se e solo se } d < b}$$

La dinamica del sistema può essere illustrata graficamente: si tracciano le due rette d'equazione

$$D = a - bp \quad \text{e} \quad O = -c + dp,$$

che rappresentano, rispettivamente, la funzione di domanda e la funzione d'offerta. Si colloca p_0 sull'asse p e si determina l'ordinata O_1 sulla retta di offerta. Spostandosi orizzontalmente sulla retta di domanda si determina D_1 (essendo $O_1 = D_1$): l'ascissa corrispondente è p_1 . Trovato p_1 si ripete il percorso precedente e si determinano O_2 , poi $D_2 = O_2$ e quindi p_2 . Procedendo in questo modo, s'ottengono le rappresentazioni sull'asse p dei termini della successione p_n .

Per visualizzare la dinamica del sistema, si può "automatizzare" la costruzione geometrica, procedendo nel modo seguente. Si parte da p_0 sull'asse p , ci si sposta in verticale sulla retta O , poi in orizzontale sulla retta D , poi in verticale su O , poi in orizzontale su D e così via. Nel caso di convergenza, si traccia un cammino a "ragnatela", che giustifica il nome del modello.

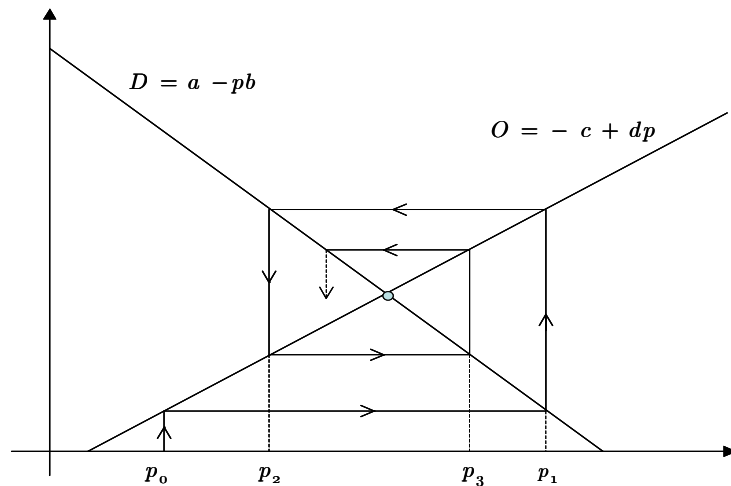


Figura 3.1. Modello della ragnatela

Caso generale

In analogia al caso a tempo continuo, una soluzione particolare dell'equazione (3.3) si può ricavare col metodo di variazione della costante, cercando cioè una successione \bar{x}_t tale che

$$y_t = \bar{x}_t \prod_{s=0}^{t-1} a_s$$

sia soluzione della (3.3). Più direttamente, si può scrivere la (3.3) per $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned}x_1 &= a_0 x_0 + b_0, \\x_2 &= a_1 x_1 + b_1 = a_1 (a_0 x_0 + b_0) + b_1 = (a_1 a_0) x_0 + a_1 b_0 + b_1 \\x_3 &= a_2 x_2 + b_2 = (a_2 a_1 a_0) x_0 + (a_2 a_1) b_0 + a_2 b_1 + b_2, \dots\end{aligned}$$

Si intuisce che

$$x_t = (a_{t-1} \cdots a_2 a_1 a_0) x_0 + (a_{t-1} \cdots a_2 a_1) b_0 + (a_{t-1} \cdots a_2) b_1 + \cdots + a_{t-1} b_{t-2} + b_{t-1}$$

che può essere scritta in modo più compatto:

$$x_t = \underbrace{x_0 \prod_{u=0}^{t-1} a_u}_{\text{soluzione dell'omogenea}} + \underbrace{\sum_{s=0}^{t-2} b_s \prod_{v=s+1}^{t-1} a_v}_{\text{soluzione particolare}} + b_{t-1}. \quad (3.10)$$

Se $a_t = a$ è costante (ma non b_t), in certi casi la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa può essere semplificata (si veda l'esercizio **3** a pag. 92).

3.3 Equazioni autonome non lineari

3.3.1 Orbite, diagrammi a gradino e punti fissi o d'equilibrio

Tra i modelli discreti non lineari ci limitiamo a considerare equazioni alle differenze *autonome* del primo ordine del tipo:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0. \quad (3.11)$$

Assegnando x_0 , attraverso la relazione di ricorrenza (3.11) è possibile calcolare $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,... e ottenere così la successione $\{x_n\}$, che prende il nome di *orbita uscente da x_0* .

La funzione f si chiama *generatrice* e, affinché la successione x_n sia ben definita, occorre che

$$f : I \rightarrow I$$

dove $I \subseteq \mathbf{R}$ è un intervallo. Infatti, la (3.11) richiede ogni volta di calcolare f su uno dei suoi *output*, secondo la sequenza di calcolo raffigurata sotto.

$$x_0 \rightarrow \boxed{f} \rightarrow x_1 \rightarrow \boxed{f} \rightarrow x_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \rightarrow \boxed{f} \rightarrow x_{n+1} \cdots$$

Assumeremo che f sia **continua** in I . Dato che

$$\begin{aligned}x_1 &= f(x_0), \\x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = (f \circ f)(x_0), \\x_3 &= f(x_2) = f(f(f(x_0))) = (f \circ f \circ f)(x_0), \\&\dots\end{aligned}$$

indicando con f^n l'iterata n -esima di f cioè $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ volte}}$, si ha

$$\boxed{x_n = f^n(x_0)}$$

che evidenzia il punto di partenza dell'orbita.

Osservazione 3.1. Sottolineiamo che il simbolo f^n indica l'iterata n -esima di f . Occorre evitare confusioni tra

$$f^n(x) \quad \text{e} \quad [f(x)]^n.$$

Per esempio,

$$\sin^3 x = \sin(\sin(\sin x))$$

mentre

$$(\sin x)^3 = (\sin x) \cdot (\sin x) \cdot (\sin x).$$

L'andamento di un'orbita si può efficacemente visualizzare tramite il cosiddetto *diagramma di fase* o *diagramma a gradino*. Vediamo come si costruisce tale diagramma per l'equazione

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Disegniamo il grafico di f e la bisettrice $y = x$ e, in riferimento alla figura 3.2, cerchiamo di visualizzare l'orbita uscente da x_0 . Il punto sul grafico di f con

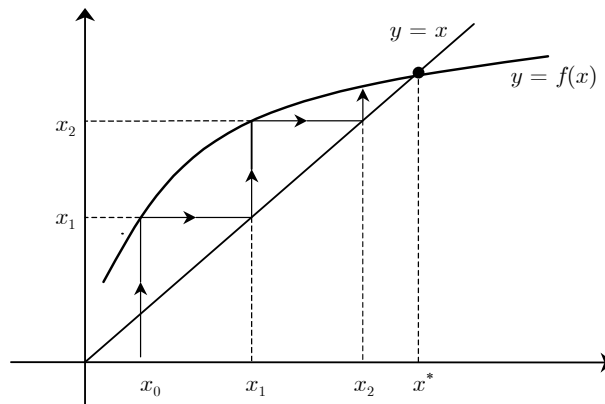


Figura 3.2. Diagramma a gradino

ascissa x_0 ha ordinata $f(x_0) = x_1$, il successivo valore assunto dalla variabile di stato. Se sfruttiamo la bisettrice possiamo “riportare” x_1 sull'asse delle ascisse ed individuare $x_2 = f(x_1)$.

Procedendo in questo modo, connettendo ogni volta con un segmento i punti di coordinate

$$(x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, x_{n+1}), (x_{n+1}, x_{n+1}), \dots$$

si visualizza l'orbita mediante una spezzata.

Dopo un po' d'esercizio la costruzione diventa automatica: si prende un punto iniziale sull'asse x , si cerca la corrispondente ordinata sulla curva, da lì ci si sposta orizzontalmente verso la bisettrice, poi si va verticalmente alla curva, poi alla bisettrice e così via.

I punti come x^* in figura sono particolarmente importanti. Infatti se il punto iniziale x_0 coincide con x^* , *l'intera orbita coincide con x^** e genera perciò una successione costante, ossia una soluzione di equilibrio. Si dice anche che x^* è **punto di equilibrio** o **punto fisso**. L'ultima locuzione è dovuta al fatto che

$$f(x^*) = x^*$$

e cioè il punto x^* rimane *fisso* sotto l'azione di f .

Il diagramma ottenuto in tal modo, evidenziando i punti fissi e tracciando le spezzate che visualizzano l'andamento delle orbite, prende il nome di **diagramma a gradino**.

Esempio 3.1. Nel modello logistico

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (r > 0)$$

abbiamo

$$f(x) = rx(1 - x)$$

il cui grafico è una parabola. I punti fissi si trovano risolvendo l'equazione

$$rx(1 - x) = x$$

da cui

$$x_1^* = 0 \quad \text{e} \quad x_2^* = 1 - \frac{1}{r}.$$

3.3.2 Punti fissi e stabilità

Dai diagrammi a gradino si possono ricavare informazioni utili sul comportamento asintotico delle orbite. Sempre nel caso in figura 3.2, si vede che l'orbita uscente da x_0 converge al punto fisso x^* . Provando con altri punti di partenza, anche alla destra dell'equilibrio, s'osserva lo stesso fenomeno²: x^* è asintoticamente stabile. Precisamente, analogamente al caso continuo, introduciamo i seguenti concetti.

Definizioni (importanti): **stabilità, instabilità e stabilità asintotica** (secondo Liapunov). Il punto di equilibrio x^* si dice:

²Invitiamo il lettore a controllare.

(a) *stabile* se: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta_\varepsilon$ tale che se $|x_0 - x^*| < \delta$ e x_n è l'orbita uscente da x_0 , si ha

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq 0.$$

(b) *asintoticamente stabile* se è stabile e, inoltre,

$$x_n \rightarrow x^* \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

(c) *instabile* se non è stabile (se cioè non vale la condizione (a)).

(d) *attrattore locale* se esiste un intorno U di x^* tale che ogni orbita uscente da U converge a x^* . Il più grande insieme $B \supseteq U$ con questa proprietà si chiama *bacino di attrazione* di x^* .

Si controlla facilmente che un punto d'equilibrio è asintoticamente stabile se è attrattore e stabile.

Esempio 3.2. *Il caso lineare.* Nel caso lineare

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0,$$

se $a \neq 1$, l'unico punto di equilibrio è

$$x^* = \frac{b}{1-a}.$$

Dato che la soluzione generale è

$$x_n = ca^n + \frac{b}{1-a}, \quad c \in \mathbf{R}$$

si ricava facilmente che per ogni altra soluzione (non costante), si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \begin{cases} \frac{b}{1-a} & \text{se } |a| < 1 \\ \pm\infty \text{ (col segno di } c) & \text{se } a > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

quindi il punto di equilibrio è (globalmente) asintoticamente stabile se e solo se $|a| < 1$.

Se $a = 1$ e $b \neq 0$ si ha

$$x_{n+1} = x_n + b$$

che non ha punti fissi.

Se $a = 1$ e $b = 0$ l'equazione è

$$x_{n+1} = x_n$$

ed ogni punto è d'equilibrio.

I diagrammi di a gradino confermano i risultati trovati poco sopra.

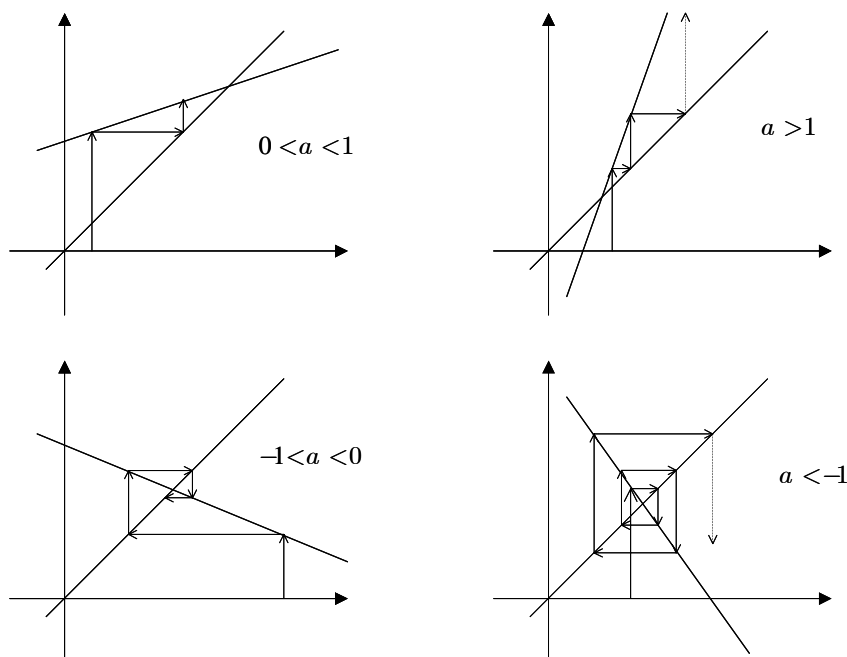


Figura 3.3. Diagrammi a gradino nel caso lineare

Stabilità per linearizzazione

In qualche caso, attraverso il diagramma a gradino si può capire l'andamento asintotico di x_n , anche senza conoscere l'espressione analitica di f . Bastano proprietà qualitative del grafico per convincerci che se il grafico di f non è “troppo ripido” vicino al punto di equilibrio, quest'ultimo è asintoticamente stabile. Molto ripido o poco ripido s'intende rispetto alla bisettrice, che ha pendenza unitaria, quindi è decisivo il confronto del modulo della pendenza del grafico di f con la pendenza 1. Precisamente, vale il seguente criterio, analogo del teorema 4.1 del capitolo 2.

Teorema 3.1. Se $f \in C^1(I)$, $f(x^*) = x^*$ e $|f'(x^*)| \neq 1$, allora:

se $|f'(x^*)| < 1$, x^* è punto di equilibrio asintoticamente stabile;

se $|f'(x^*)| > 1$, x^* è punto di equilibrio instabile.

Dimostrazione. Se $|f'(x^*)| < 1$, essendo f' continua, per il teorema della permanenza del segno, in un intorno $I_\delta = [x^* - \delta, x^* + \delta]$ di x^* si ha,

$$|f'(x)| \leq k < 1.$$

Poiché $f(I_\delta) \subseteq I_\delta$ (il lettore lo dimostri!), se $x_0 \in I_\delta$, anche $x_n \in I_\delta$. Valutiamo la distanza tra x_n e x^* ; dall'equazione

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

e dal fatto che $f(x^*) = x^*$ si ha

$$|x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - f(x^*)|.$$

Usando il teorema del valor medio di Lagrange e il fatto che $|f'| \leq k$, possiamo scrivere

$$|f(x_n) - f(x^*)| = |f'(c_n)(x_n - x^*)| \leq k|x_n - x^*|$$

da cui

$$|x_{n+1} - x^*| \leq k|x_n - x^*|.$$

Rifacendo gli stessi calcoli per valutare $|x_n - x^*|$ si trova

$$|x_n - x^*| \leq k|x_{n-1} - x^*| \leq k^2|x_{n-2} - x^*|.$$

Procedendo ancora in questo modo si arriva a

$$|x_n - x^*| \leq k|x_{n-1} - x^*| \leq k^2|x_{n-2} - x^*| \leq \dots \leq k^n|x_0 - x^*|.$$

Essendo $k < 1$ si conclude che $|x_n - x^*| \rightarrow 0$, ossia $x_n \rightarrow x^*$, purché $x_0 \in I$.

Se $|f'(x^*)| > 1$, si ha, in un intorno I ,

$$|f'(x)| \geq \rho > 1$$

e quindi se $x_0 \in I$, si ha, applicando il teorema del valor medio,

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| = |f'(c)| |x_0 - x^*| \geq \rho |x_0 - x^*|;$$

se anche $x_1 \in I$, con lo stesso ragionamento, si trova

$$|x_2 - x^*| \geq \rho^2 |x_0 - x^*|$$

e dopo un numero finito di passi si esce da I . Cioè x^* è instabile³. \square

Esempio 3.3. Studiamo il carattere della successione per ricorrenza

$$\begin{cases} s_{n+1} = 3 - e^{-s_n} \\ s_0 = a. \end{cases}$$

La funzione generatrice della successione è

$$f(x) = 3 - e^{-x}.$$

Come mostra il grafico, f ha due punti fissi $\alpha < 0$ e β ($2 < \beta < 3$). Dato che $f'(x) = e^{-x}$, si ha

$$f'(\alpha) > 1, \quad 0 < f'(\beta) < 1.$$

Dunque α è punto fisso instabile (repulsore), β è punto fisso (localmente) asintoticamente stabile.

³Prima o poi, tutte le orbite uscenti da I escono da I , allontanandosi da x^* . In tal caso si dice che x^* è *repulsore*.

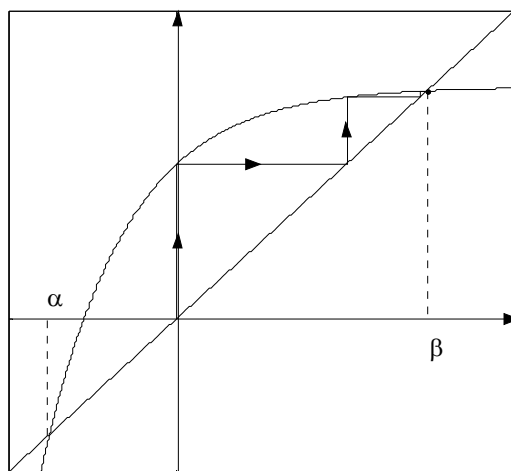


Figura 3.4.

Se $a < \alpha$, la successione s_n è decrescente⁴ e tende a $-\infty$, se $\alpha < a < \beta$ è crescente e tende a β , se $a > \beta$ è decrescente e tende a β . Ovviamente se $a = \alpha$ o $a = \beta$, s_n è costante. La figura mostra che il bacino d'attrazione del punto β è $(\alpha, +\infty)$.

Il criterio di stabilità/instabilità per linearizzazione vale **solo** per punti x^* di equilibrio in cui $|f'(x^*)|$ è **maggiore o minore di 1**. Punti di equilibrio di questo tipo si chiamano **iperbolici**.

Se un punto di equilibrio x^* non è iperbolico, nel caso $f'(x^*) = 1$, si può mostrare che (il lettore lo controlli attraverso i diagrammi di fase) se f taglia la bisettrice da sopra a sotto x^* è attrattore, se f taglia la bisettrice da sotto a sopra x^* è repulsore. Se il grafico di f si trova al di sopra (al di sotto) della bisettrice x^* attrae solo le orbite che partono a sinistra (a destra). In tal caso si può dire che il punto è semi-attrattore.

3.3.3 Orbite periodiche e stabilità

Orbite periodiche. Sotto le nostre ipotesi usuali, nel caso delle equazioni differenziali autonome del prim'ordine considerate nel secondo capitolo, **non** possono esistere soluzioni periodiche tali cioè che, per qualche numero positivo T si abbia $x(t+T) = x(t)$, a meno che non siano costanti⁵. Questi modelli non sono perciò

⁴Se la funzione generatrice è crescente, la successione per ricorrenza è monotona (vedi l'esercizio 7 a pag. 93).

⁵Si veda l'esercizio 12 a pag. 67.

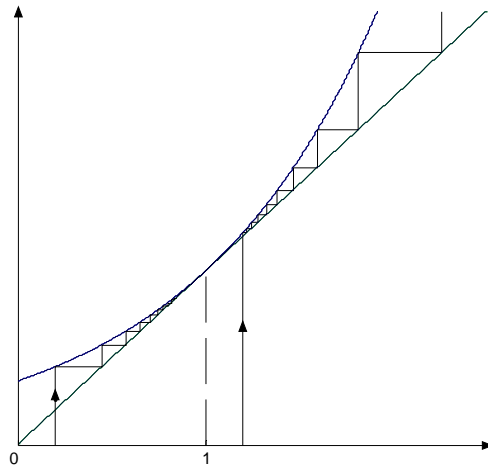


Figura 3.5. Punto semi-stabile

in grado di descrivere fenomeni ciclici. Non è così per i modelli discreti. Infatti possono benissimo esistere orbite del tipo

$$x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, \boxed{x_p = x_0}, x_1, \dots, x_{p-1}, x_0, \dots$$

dove i primi p punti sono tutti diversi tra loro ($x_0 \neq x_1 \neq \dots \neq x_{p-1}$), mentre $x_p = x_0$ e si ricomincia da capo. Queste si chiamano *orbite periodiche*, i loro punti si dicono *punti periodici* e il numero p si chiama *periodo* dell'orbita. Osserviamo che

$$x_0 = x_p = f^p(x_0)$$

quindi x_0 è **punto fisso per f^p** . Nello stesso modo si verifica che anche x_1, \dots, x_{p-1} sono punti fissi per f^p :

$$x_j = f^p(x_j) \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, p-1.$$

Per esempio, un'orbita di periodo 2 è un insieme di due punti

$$\{x^*, y^*\}$$

entrambi fissi per l'iterata seconda f^2 e si ha

$$f(x^*) = y^*, \quad f(y^*) = x^*$$

Esempio 3.4. La successione $\left\{2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots\right\}$ è un'orbita di periodo 2 per l'equazione

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n}.$$

Il diagramma a gradino di un'orbita di periodo 2 è particolarmente semplice (vedi figura 3.6).

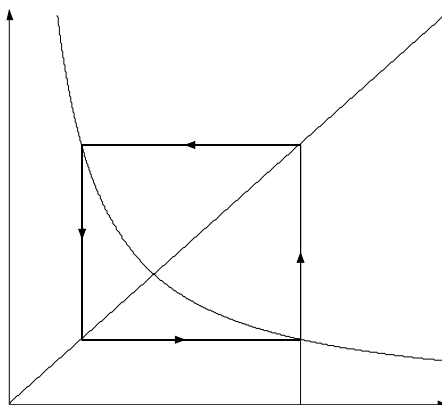


Figura 3.6. Orbita di periodo 2

Stabilità di un'orbita periodica. Anche per le orbite periodiche si può parlare di stabilità, stavolta con l'idea che se si parte abbastanza vicino ad uno dei suoi punti si continua a rimanere vicino, non necessariamente a quel punto, ma all'orbita.

Precisamente, consideriamo l'equazione (3.11) (con f derivabile con continuità in un intervallo $I \subseteq \mathbf{R}$). Sia Γ_p un'orbita periodica di periodo p , costituita dai punti

$$w_0, w_1 = f(w_0), \dots, w_{p-1} = f^{p-1}(w_0).$$

Per *distanza di un punto z da Γ_p* intendiamo la più piccola tra le distanze di z da un punto di Γ :

$$\text{dist}(z, \Gamma_p) = \min \{|z - w_0|, |z - w_1|, \dots, |z - w_{p-1}|\}.$$

Definizioni (importanti): stabilità, instabilità e stabilità asintotica. L'orbita Γ_p si dice:

(a) *stabile* se: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto A che contiene Γ_p e tale che, se $x_0 \in A$ e x_n è l'orbita uscente da x_0 , si ha

$$\text{dist}(x_n, \Gamma_p) < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq 0.$$

(b) *asintoticamente stabile* se è stabile e, inoltre,

$$\text{dist}(x_n, \Gamma_p) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

(c) *instabile* se non è stabile (se cioè non vale la condizione (a)).

Usare la definizione in generale non è semplice. C'è però un modo piuttosto efficace per assicurarsi che un'orbita periodica sia asintoticamente stabile.

Sappiamo infatti che ciascuno dei punti w_j ($j = 0, \dots, p-1$) è punto fisso per l'iterata f^p . Notiamo che la **derivata prima dell'iterata f^p è uguale in tutti i punti w_j** , infatti si ha

$$(f^p)'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x)) \cdot \dots \cdot f'(f^{p-2}(x)) \cdot f'(f^{p-1}(x))$$

e in w_j :

$$(f^p)'(w_j) = f'(w_j) \cdot f'(w_{j+1}) \cdot \dots \cdot f'(w_{j+p-1}) = \prod_{j=0}^{p-1} f'(w_j).$$

Si deduce che i punti dell'orbita sono *simultaneamente* **tutti iperbolici** oppure **tutti non iperbolici**. Pertanto se in uno dei punti w_j (basta controllarne uno qualsiasi!) si ha

$$|(f^p)'(w_j)| < 1$$

allora tutti i punti dell'orbita sono asintoticamente stabili per f^p e quindi l'*orbita stessa è asintoticamente stabile*. Analogamente, se in uno dei punti w_j si ha

$$|(f^p)'(w_j)| > 1$$

allora tutti i punti dell'orbita sono instabili e quindi l'*orbita stessa è instabile*.

Esistenza di orbite periodiche. La presenza di orbite periodiche rivela un andamento ciclico del sistema dinamico ed è piuttosto importante stabilire condizioni che ne garantiscano l'esistenza e, se possibile, la loro natura stabile/instabile. I due teoremi sottostanti danno una risposta parziale al problema. Il primo si applica a funzioni generatrici cosiddette *unimodali*, che presentano cioè un unico punto stazionario nell'intervallo di definizione.

Teorema 3.2 (di Singer⁶). *Sia*

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

continua con le sue derivate fino alla terza inclusa. Se

(i)

$$f(0) = f(1) = 0,$$

(ii) *f ha un solo punto $x_0 \in (0, 1)$ tale che*

$$f'(x_0) = 0,$$

(iii) *la quantità*

$$\{f, x\} = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

⁶Singer D., *Stable orbits and bifurcation of map of the interval*, in "Siam J. Appl. Math.", 260-267, 1978.

è negativa in $[0, 1]$, allora l'equazione alle differenze

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

ammette al massimo un'unica orbita periodica asintoticamente stabile, contenuta in $(0, 1)$. Se tale orbita esiste, x_0 è nel suo bacino d'attrazione.

La quantità $\{f, x\}$ si chiama *derivata di Schwarz di f* (risale al 1869!). Il fatto che x_0 appartenga al bacino di attrazione dell'eventuale orbita periodica è un'informazione preziosa qualora si disponga di un computer per individuare tale orbita. In particolare, il teorema di Singer si applica al caso dell'equazione logistica, come vedremo più avanti.

Il secondo teorema, interessante se non sorprendente per la sua originalità, richiede l'introduzione di uno speciale ordinamento dei numeri naturali, detto *ordinamento di Sharkowsky*. Prima si collocano i numeri dispari, poi il doppio di tutti i dispari, poi il quadruplo di tutti i dispari e così via. Infine si collocano le potenze di due in ordine decrescente. Se utilizziamo il simbolo \blacktriangleleft per indicare che, nella formula

$$m \blacktriangleleft n$$

n segue m , l'ordinamento si può scrivere nel modo seguente:

$$\begin{aligned} 3 \blacktriangleleft 5 \blacktriangleleft 7 \blacktriangleleft \dots \blacktriangleleft 2 \cdot 3 \blacktriangleleft 2 \cdot 5 \blacktriangleleft 2 \cdot 7 \blacktriangleleft \dots \blacktriangleleft 2^2 \cdot 3 \blacktriangleleft 2^2 \cdot 5 \blacktriangleleft 2^2 \cdot 7 \blacktriangleleft \dots \\ \dots \blacktriangleleft 2^3 \cdot 3 \blacktriangleleft 2^3 \cdot 5 \blacktriangleleft 2^3 \cdot 7 \blacktriangleleft \dots \blacktriangleleft 2^4 \blacktriangleleft 2^3 \blacktriangleleft 2^2 \blacktriangleleft 2 \blacktriangleleft 1 \end{aligned}$$

Teorema 3.3 (di Sharkowsky⁷). *Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continua. Se l'equazione alle differenze*

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

ammette un'orbita periodica di periodo m , allora, per ogni n che segue m nell'ordinamento di Sharkowsky esiste un'orbita periodica di periodo n .

Non si può evitare di sottolineare una (clamorosa!) conseguenza del teorema: *se esiste un'orbita di periodo 3 esistono orbite di qualunque periodo*. Il periodo 3 è sinonimo di ... caos, come vedremo.

Non solo: si può esibire un esempio di funzione generatrice continua il cui sistema dinamico corrispondente ammette un'orbita di periodo 5 ma non di periodo 3, a conferma della profondità del teorema. Si può usare il teorema anche per mostrare che **non** possono esistere orbite di un certo periodo. Per esempio, consideriamo la logistica con

$$f(x) = 3.2x(1-x)$$

e disegniamo i grafici di f , dell'iterata seconda f^2 e dell'iterata quarta f^4 .

Il primo grafico mostra i due punti fissi 0 e 0.7... Nel secondo, osserviamo ancora i due punti fissi di f e altri due punti fissi di f^2 che costituiscono un'orbita periodica

⁷Sharkowsky N., *Coexistence of cycles of a continuous map into itself*, Ukr. Math. Zeitschrift, 16, 61-71, 1964.

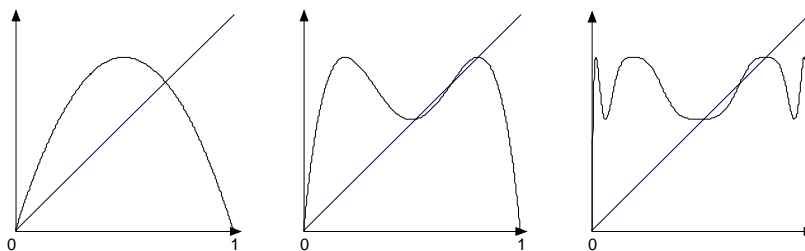


Figura 3.7.

di periodo 2. Nel terzo i punti fissi coincidono con quelli di f^2 . Ne segue che *non* vi sono orbite di periodo 4 e quindi, per il teorema di Sharkowsky, non possono esistere orbite periodiche di periodo maggiore di 2.

3.3.4 Comportamento caotico

Accenniamo brevemente al concetto di *caos deterministico*. La parola *caos* è collegata spesso a mancanza di regolarità, di ordine o di qualche correlazione. Da un punto di vista dinamico, caos significa impossibilità di misurare, osservare o prevedere le variazioni di un sistema in evoluzione, entrando, inevitabilmente, in una condizione di aleatorietà. In realtà vi sono vari tipi di caos e quello che tratteremo qui, brevemente, non si riferisce all'osservazione di fenomeni aleatori (come il lancio di un dado) bensì a sistemi che evolvono secondo *leggi deterministiche*, di cui le equazioni che stiamo considerando costituiscono un esempio.

Nel nostro caso parleremo di *caos deterministico* e della conseguente *dinamica caotica*. Uno dei problemi che si presenta è caratterizzare in modo rigoroso che cosa si debba intendere con ciò. La questione non è così semplice, tant'è vero che esistono varie definizioni più o meno soddisfacenti di comportamento caotico. Adottiamo quella di Li e Yorke.

Sia $f : I \rightarrow I$. L'idea è che lo stato caotico sia determinato dall'esistenza di un insieme non numerabile $S \subset I$ con la proprietà seguente: per ogni coppia di punti $p, q \in S$, esistono due successioni di iterate f^{n_j} e f^{n_k} tali che

$$\lim_{n_j \rightarrow +\infty} |f^{n_j}(p) - f^{n_j}(q)| = 0$$

e

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} |f^{n_k}(p) - f^{n_k}(q)| = \delta > 0.$$

In altri termini, le orbite $f^n(p)$ e $f^n(q)$, uscenti da punti qualunque p e q in S , hanno un andamento erratico, nel senso che per qualche indice n sono molto vicine mentre per certi altri si mantengono a distanza positiva. Naturalmente ciò significa che la dinamica esibisce estrema sensibilità rispetto alle condizioni iniziali: una piccolissima variazione in queste ultime provoca, in generale, notevoli differenze nelle

orbite corrispondenti. Se una dinamica è caotica, le previsioni sul suo andamento eseguite al computer non possono essere credibili!

Un risultato ormai classico è il seguente:

Teorema 3.4 (di Li e Yorke). *Periodo tre implica caos.*

L'equazione logistica

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$$

fornisce un importante e classico esempio di dinamica caotica.

3.3.5 Equazione logistica discreta

In questa sezione analizziamo il comportamento asintotico delle orbite dell'equazione logistica

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad r > 0. \quad (3.12)$$

La funzione generatrice è

$$f(x) = rx(1 - x)$$

Se limitiamo, come faremo, i valori del parametro r nell'intervallo $(0, 4]$, si ha (il lettore controlli) $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$ ossia $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Osserviamo subito che f soddisfa le ipotesi del teorema di Singer; infatti, $f(0) = f(1) = 0$, ha un solo punto stazionario $x = 1/2$ e

$$\{f, x\} = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 = -\frac{3}{2} \left(\frac{-2}{1-2x} \right)^2 < 0$$

in $[0, 1]$. Deduciamo, in base al teorema di Singer, che per ogni valore di $r \in (0, 4]$ esiste al massimo un'orbita periodica in $(0, 1)$, asintoticamente stabile e $x_0 = 1/2$ è nel suo bacino d'attrazione.

La dinamica della (3.12) presenta una insospettata dipendenza dal parametro r e un'interessante varietà di fenomeni. Come abbiamo visto nell'esempio 3.1 i punti fissi, soluzioni dell'equazione

$$rx(1 - x) = x$$

sono

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 1 - \frac{1}{r}.$$

Distinguiamo ora vari casi.

$0 < r \leq 1$ Solo $x_1 = 0$ sta nell'intervallo $[0, 1]$ e risulta asintoticamente stabile con bacino d'attrazione $[0, 1]$, infatti per $0 < r < 1$ si ha

$$f'(x) = r - 2rx$$

e

$$f'(0) = r \in (0, 1).$$

Si ha stabilità asintotica anche per $r = 1$, come mostra il diagramma a gradino.

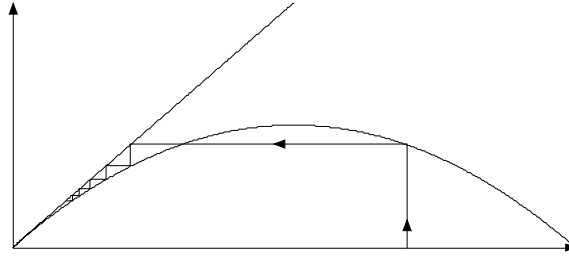


Figura 3.8. Mappa logistica per $r = 1$

Si osservi che se $0 < r < 1$ il punto $x_1 = 0$ risulterebbe (localmente) asintoticamente stabile anche considerando $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, mentre per $r = 1$ è *semistabile* (le orbite che partono a sinistra di 0, si allontanano).

$1 < r \leq 3$ Anche $x_2 \in [0, 1]$ e si ha

$$f' \left(1 - \frac{1}{r} \right) = r - 2r \left(1 - \frac{1}{r} \right) = 2 - r$$

e

$$|2 - r| < 1 \quad \text{per} \quad 1 < r < 3.$$

Il punto $x_1 = 0$ è instabile, mentre x_2 è asintoticamente stabile con bacino di attrazione $(0, 1)$. Anche per $r = 3$, x_2 è asintoticamente stabile.

$3 < r \leq 1 + \sqrt{6} = 3.449499 \dots$ Per $r > 3$ i punti x_1 e x_2 sono instabili. Dal grafico di f non si vede di più.

Cerchiamo orbite periodiche di periodo 2 considerando l'iterata seconda di f :

$$f^2(x) = r^2 x(1-x)(1-rx(1-x)).$$

I punti periodici di periodo 2 corrispondono ai punti fissi di f^2 e si trovano risolvendo l'equazione

$$r^2 x(1-x)(1-rx(1-x)) = x.$$

Oltre (ovviamente) a $x_1 = 0$ e $x_2 = 1 - \frac{1}{r}$, si trovano i punti

$$x_{3,4} = \frac{1+r \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r}$$

soluzioni dell'equazione

$$r^2 x^2 - r(r+1)x + r + 1 = 0.$$

Per studiarne la stabilità calcoliamo

$$(f^2)'(x_3) = (f^2)'(x_4) = f'(x_3) f'(x_4) = -r^2 + 2r + 4.$$

Si ha che

$$|-r^2 + 2r + 4| < 1$$

per $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ e quindi, per tali valori del parametro, esiste un'orbita periodica asintoticamente stabile di periodo 2. Il bacino d'attrazione dell'orbita $\{x_3, x_4\}$ è l'intervallo $(0, 1)$, tranne un'infinità numerabile di punti che arriva a x_2 dopo un numero finito di iterazioni. Dal grafico di f^2 si intuisce che lo stesso accade per $r = r_2 = 1 + \sqrt{6}$.

In conclusione, quando r supera il valore $r_1 = 3$ il punto fisso x_2 diventa instabile e si crea un'orbita periodica asintoticamente stabile di periodo 2. Questo cambio di comportamento delle orbite prende il nome di *biforcazione*. La figura 3.9 mostra, in corrispondenza del valore $r = 3.2$, l'orbita uscente dal punto $x_0 = 0.7$; la curva tratteggiata è il grafico dell'iterata seconda f^2 .

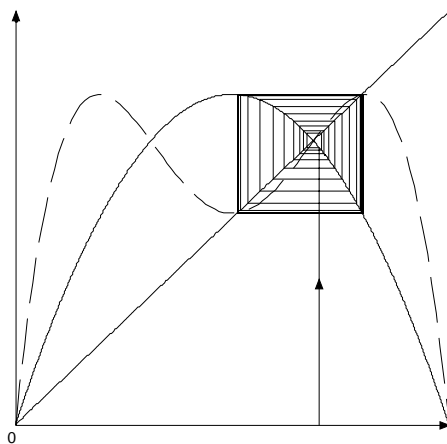


Figura 3.9. Mappa logistica per $r = 3.2$

$1 + \sqrt{6} < r \leq r_\infty = 3.5699456\dots$ Superato il valore $r_2 = 1 + \sqrt{6}$, l'orbita di periodo 2 diventa instabile e si crea un'orbita stabile di periodo 4. Ciò si vede esaminando l'iterata quarta f^4 . Per $r = r_2$ si verifica quindi un'altra biforcazione con raddoppio del periodo. La figura 3.10 mostra, in corrispondenza del valore $r = 3.52$, l'orbita uscente dal punto $x_0 = 0.6$; la curva tratteggiata è il grafico dell'iterata quarta f^4 .

L'orbita di periodo 4 rimane stabile fino ad un valore $r_3 = 3.544090\dots$, in corrispondenza al quale si verifica un'altra biforcazione con raddoppio del periodo; si crea, cioè, un'orbita asintoticamente stabile di periodo 8.

Successivamente, al crescere di r , si verifica una sequenza infinita di biforcazioni

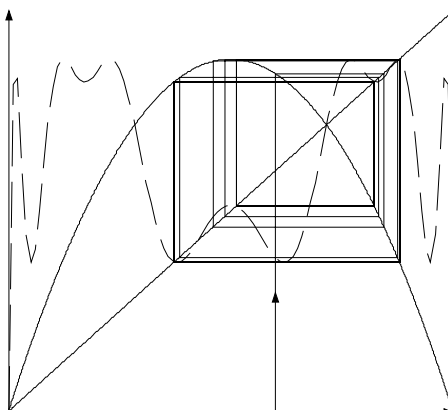


Figura 3.10. Mappa logistica per $r = 3.52$

con raddoppio del periodo in corrispondenza ad infiniti valori r_k . I primi otto sono

$$\begin{array}{cccc} r_1 = 3 & r_2 = 3.449499\dots & r_3 = 3.544090\dots & r_4 = 3.564407\dots \\ r_5 = 3.568759\dots & r_6 = 3.569692\dots & r_7 = 3.569891\dots & r_8 = 3.569934\dots \end{array}$$

I valori r_k convergono ad un valore

$$r_\infty = 3.5699456\dots$$

Sperimentalmente, si è osservato che $r_n = r_\infty - \text{costante} \cdot \delta^{-n}$ ($n \gg 1$) dove $\delta = 4.6692016091\dots$ è detta *costante di Feigenbaum*.

In corrispondenza a r_∞ esiste un insieme infinito F che attrae i punti di $(0, 1)$, tranne i punti periodici (instabili) e i punti che arrivano ai punti instabili dopo un numero finito di iterazioni. L'insieme F ha struttura *frattale*. L'insieme $1 < r < r_\infty$ definisce il *regime di biforcazione* per la mappa logistica.

$r_\infty < r \leq 4$ Per $r > r_\infty$ si entra nel *regime caotico* ed il comportamento è molto più complicato. Esistono orbite periodiche instabili di periodo 2^n (per ogni n ce n'è una), orbite stabili (di periodo $3 \cdot 2^n, 5 \cdot 2^n$ ecc.) e anche orbite aperiodiche.

Per $r > 3.67857\dots$ cominciano a presentarsi orbite di periodo dispari. In particolare, per $r = 1 + \sqrt{8}$ esiste un'unica orbita di periodo 3 asintoticamente stabile e, per il teorema di Sharkowsky, orbite di periodo qualunque.

Come abbiamo già visto, il regime caotico presenta forte instabilità rispetto alle condizioni iniziali. La figura 3.12 mostra i grafici di due soluzioni dell'equazione logistica in corrispondenza del valore $r = 4$. Le due soluzioni, pur partendo da punti molto vicini ($x_1 = 0.71$ e $x_1 = 0.72$) hanno un andamento assai differente.

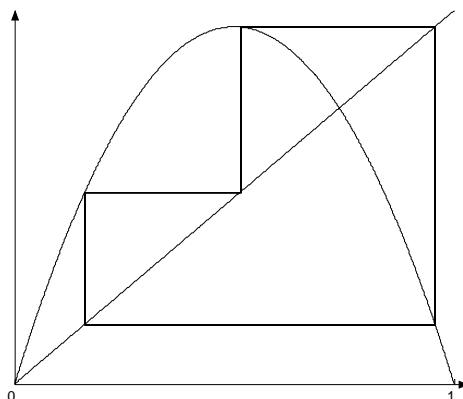


Figura 3.11. Orbita di periodo 3

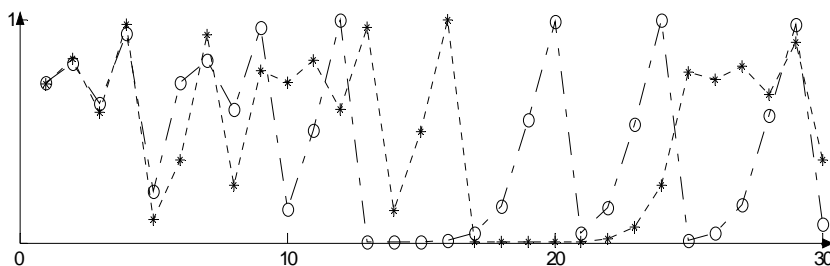


Figura 3.12. Grafici di due soluzioni dell'equazione logistica per $r = 4$.

3.4 Esercizi

1. Scrivere la soluzione generale delle seguenti equazioni alle differenze lineari del prim'ordine.

$$s_{n+1} = -\frac{s_n}{3}, \quad s_{n+1} = -2s_n + 1.$$

Nei due casi discutere il carattere di s_n .

2. Stabilire il carattere delle successioni per ricorrenza

$$(a) \begin{cases} s_{n+1} = 2s_n - 1 \\ s_0 = 3. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} s_{n+1} = s_n - 1 \\ s_0 = 4 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} s_{n+1} = -s_n \\ s_0 = 4 \end{cases}$$

3. Determinare una soluzione particolare per l'equazione

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + b_n,$$

nei casi

$$b_n = n \quad \text{e} \quad b_n = 2^n.$$

4. Sia

$$Y_t = \lambda Y_{t-1} + X_t, \quad t \geq 1 \quad (3.13)$$

un'equazione alle differenze lineare. Siano $\lambda > 1$ e X_t una successione limitata; dimostrare che l'equazione (3.13) ha un'unica soluzione convergente: la successione

$$\bar{Y}_t = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^i X_{t+i}.$$

5. Sia $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua. Dimostrare che f ammette un *punto fisso* in $[a, b]$, ossia l'equazione

$$f(x) = x$$

ha almeno una soluzione $x^* \in [a, b]$.

6. Sia

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \text{ (assegnato)}, \end{cases}$$

con $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua. Dimostrare che se $x_n \rightarrow l \in \mathbf{R}$, allora l è punto fisso per f .

7. Sia

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \text{ (assegnato)}, \end{cases}$$

con $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ crescente. Dimostrare che se $x_1 > x_0$, allora x_n è crescente e che se $x_1 < x_0$, allora x_n è decrescente, quindi, in ogni caso, x_n è monotona e, quindi, regolare.

8. Studiare, al variare di $a > 0$, il comportamento asintotico della successione per ricorrenza

$$\begin{cases} s_0 = a \\ s_{n+1} = \sqrt{2 + s_n}. \end{cases}$$

9. Sia

$$\begin{cases} s_{n+1} = f(s_n) \\ s_0 \text{ (assegnato)}, \end{cases}$$

con $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua e decrescente. Dimostrare che

(a) la successione⁸

$$\begin{cases} x_{n+1} = f^2(x_n) \\ x_0 = s_0 \end{cases}$$

coincide con s_{2n} e la successione

$$\begin{cases} y_{n+1} = f^2(y_n) \\ y_0 = s_1 \end{cases}$$

⁸Ricordiamo che il simbolo f^2 indica $f \circ f$, ossia l'iterata seconda di f .

coincide con s_{2n+1} ;

(b) le successioni x_n e y_n sono monotone; in particolare $x_n = s_{2n}$ è crescente se e solo se $y_n = s_{2n+1}$ è decrescente e viceversa.

(c) $x_n \rightarrow x^*$ se e solo se $y_n \rightarrow y^*$ con $x^* = f(y^*)$ e $y^* = f(x^*)$.

(d) $s_n \rightarrow l \in \mathbf{R}$ se e solo se $l = x^* = y^*$.

10. Calcolare i punti di equilibrio stabile per l'equazione alle differenze

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right), \quad A > 0.$$

La relazione indicata può servire per calcolare velocemente radici quadrate. Calcolare $\sqrt{7}$ con tre cifre decimali esatte.

11. Studiare, al variare di $a > 0$, il comportamento asintotico della successione per ricorrenza

$$\begin{cases} s_0 = a \\ s_{n+1} = \frac{2}{1 + s_n}. \end{cases}$$

12. Siano D_t la quantità domandata, O_t la quantità offerta, p_t il prezzo del mercato al tempo t , a, b, c, d, σ parametri positivi. Si considera il modello

$$\begin{cases} D_t = a - bp_t \\ O_t = -c + dp_t \\ p_{t+1} = p_t + \sigma(D_t - O_t) \end{cases}$$

(domanda e offerta sono funzioni del prezzo al tempo t , l'incremento del prezzo nell'unità di tempo è direttamente proporzionale all'eccedenza di domanda). Studiare l'equilibrio del mercato.

13. Nel cuore, l'eccitazione generata da un normale *pacemaker* negli atri, passa ai ventricoli causando contrazione del cuore e l'invio di sangue agli altri organi. L'eccitazione deve passare attraverso il nodo atrio-ventricolare, che connette elettricamente atri e ventricoli. Il problema seguente è basato su un modello matematico per la conduzione atrio-ventricolare nei mammiferi.⁹ Assumiamo che i tempi (in millisecondi) di conduzione atrio-ventricolare soddisfino la seguente legge di ricorrenza

$$x_{t+1} = \frac{375}{x_t - 90} + 100, \quad x_t > 90.$$

(a) Determinare i punti fissi e studiarne la stabilità.

(b) Analizzare il comportamento asintotico della soluzione che verifica la condizione iniziale $x_0 = 150$.

14. La seguente equazione alle differenze è stata proposta come modello di evoluzione per la densità di popolazione di insetti in anni successivi

$$x_{t+1} = f(x_t) = \alpha x_t e^{-\beta x_t^3},$$

⁹Simson e altri, American Journal of Physiology, 1981.

dove α, β sono parametri positivi e $x_t \geq 0$. Per $\alpha = e$ e $\beta = 1/3$,

- (a) tracciare il grafico di f ;
- (b) determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

15. Nello studio delle reti neurali¹⁰ si incontra la seguente equazione alle differenze

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{\alpha x_n}{1 + \beta x_n},$$

con α e β parametri positivi e $x_n \geq 0$.

(a) Determinare al variare di α e β i punti di equilibrio, la loro stabilità e se la dinamica in un intorno dei punti fissi è monotona o oscillatoria.

(b) Nel caso $\alpha = \beta = 1$, tracciare il diagramma di fase e studiare il comportamento asintotico di x_n .

(c) Esprimere x_n in funzione di x_0 (> 0 generico) e verificare il risultato ottenuto in (b).

¹⁰Glass e Pasternack, Journal of math. biology, 1978.

