Politecnico di Milano
Facoltà di Ingegneria dei Sistemi
V Facoltà di Ingegneria

Anno Accademico 2003/2004

# Equazioni Differenziali Ordinarie

**Corso di Studi in Ingegneria Informatica**

## Esercizi - parte seconda

Luisa Rossi

Federico M. Vegni

# Indice

CAPITOLO 1

# Sistemi non lineari autonomi

## 1. Sistemi autonomi: indagine locale tramite linearizzazione

**Esercizi.**

**Esercizio 1** Dato il sistema bidimensionale autonomo

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{xy}{x+1} \\ \dot{y} = y\dfrac{x-1}{x+1} \end{cases}$$

si verifichi innanzitutto che i semiassi $x = 0$, $y > 0$ e $y = 0$, $x > 0$ sono orbite del sistema. Quindi si dimostri che un'orbita che abbia condizioni iniziali nel primo quadrante rimane nel primo quadrante. Limitando lo studio al primo quadrante, si determinino le curve (isocline) luogo dei punti a tangente orizzontale e verticale; quindi si trovino i punti di equilibrio, e ,dopo averne identificato la natura, si studi il ritratto di fase.

**Esercizio 2** Dato il sistema bidimensionale autonomo

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 1 - xy \end{cases}$$

determinare

(a) gli eventuali punti di equilibrio e la loro natura

(b) le curve (isocline) luogo dei punti a tangente orizzontale e verticale e si tracci il ritratto di fase.

**Esercizio 3** Discutere la stabilità della soluzione stazionaria del sistema

$$\begin{cases} x' &= 3x + 4y \\ y' &= -4x + 3y \end{cases}$$

dopo aver scritto in forma esplicita l'integrale generale. Disegnare le orbite nel piano delle fasi. Considerare quindi il sistema

$$\begin{cases} x' &= e^{3x} + 4\tan y \\ y' &= \sin 3y - \log(1 + 4x) \end{cases}$$

e discutere la stabilità della soluzione stazionaria $(0, 0)$, disegnando le orbite in un suo intorno.

**Esercizio 4** Dopo aver definito il significato dei coefficienti ($0 < a < 1$, $0 < b$), verificare che il modello preda ($x(t)$) predatore ($y(t)$) con correzione logistica

$$\begin{cases} x' = (1 - y - ax)x \\ y' = -(1 - x + by)y \end{cases}$$

presenta un fuoco stabile nel punto stazionario non nullo. Vi sono valori dei parametri che implicano l'estinzione dei predatori in un tempo finito?

**Esercizio 5** Studiare le traiettorie del sistema

$$\begin{cases} x' &= \sin x - 2ye^x \\ y' &= y(ye^x - \cos x) \end{cases} \tag{1.1}$$

nell'intorno dell'origine.

**Esercizio 6** Considerato il sistema autonomo

$$\begin{cases} \dot{x} &= ye^y \\ \dot{y} &= 1 - x^2 \end{cases}$$

(a) si determinino i punti di equilibrio.
(b) Si determini la natura di tali punti nel sistema linearizzato.
(c) Senza approfondire l'analisi che cosa si può dire riguardo la natura di tali punti per il sistema non linearizzato?

**Soluzioni.**

**Esercizio 1** Il Teorema di Esistenza ed Unicità della soluzione al problema di Cauchy nella sua forma vettoriale:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

assicura esistenza ed unicità a Problemi di Cauchy assegnati in un aperto $A$ quando le componenti $f$ e $g$ -autonome, cioè non è esplicita la dipendenza dalla variable temporale- sono di classe $C^1$ in $A$.

In questo caso la soluzione esiste unica se $x \neq 1$, quindi in particolare in tutto il primo quadrante dove è richiesto studiare il problema.

I semiassi positivi sono orbite del sistema: consideriamo ad esempio un problema di Cauchy assegnato con dato iniziale sul semiasse positivo delle $x$: $x(0) = x_0 > 0$, $y_0 = 0$. Dall'equazione

$$\dot{y} = y\frac{x-1}{x+1}$$

essendo $y = 0$, si ricava che la traiettoria deve avere pendenza nulla, e non può staccarsi dall'asse. Analogamente, partendo da condizioni iniziali $x(0) = 0$, $y(0) = y_0 > 0$.

Per il Teorema di Unicità della soluzione si ricava anche che il primo quadrante è invariante rispetto alle traiettorie, ovvero che le traiettorie che hanno dati iniziali nel primo quadrante lì evolvono. Per uscirne dovrebbero infatti intersecare uno dei semiassi contraddicendo l'unicità.

Il luogo dei punti a tangente verticale (e diversi dal semiasse positivo delle $y$) è dato dalla soluzione dell'equazione

$$1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{x+1} = 0$$

ovvero $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$. Il luogo dei punti a tangente orizzontale è l'asse $x$ e l'insieme di punti dato dall'equazione

$$\frac{x-1}{x+1} = 0$$

ovvero la retta $x = 1$.

Il punto di equilibrio (critico) è l'intersezione delle due isocline trovate $(1, 1)$. Per studiare la natura del punto critico si prova ad esaminare il sistema linearizzato in

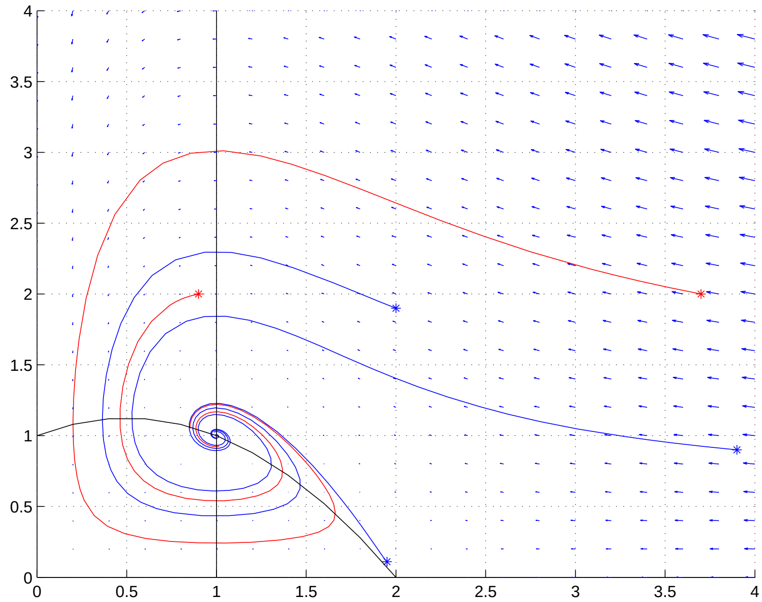



FIGURA 1. Traiettorie delle soluzioni dell'Esercizio 1. Sono evidenziate le isocline con pendenza nulla e infinita. Il punto critico è un fuoco stabile.

quel punto. Uno studio di questo tipo è detto di tipo *locale*. La matrice jacobiana del sistema è

$$\begin{bmatrix} \dfrac{df}{dx}(x,y) & \dfrac{df}{dy}(x,y) \\ \dfrac{dg}{dx}(x,y) & \dfrac{dg}{dy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x - \dfrac{y}{(x+1)^2} & -\dfrac{x}{x+1} \\ \dfrac{2y}{(x+1)^2} & \dfrac{x-1}{x+1} \end{bmatrix}$$

che, valutata nel punto critico corrisponde a $\begin{bmatrix} -1/4 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i cui autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{31}}{8}.$$

Le traiettorie del sistema linearizzato corrispondono dunque a un fuoco stabile, ed il sistema d'origine ha -qualitativamente- il medesimo comportamento. Si veda in Figura 1 l'andamento delle traiettorie determinate numericamente.

**Esercizio 2** Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 1 - xy = 0 \end{cases}$$

si trovano i punti di equilibrio del sistema, ovvero $P_+ = (1,1)$ e $P_- = (-1,-1)$.

Per trovare il luogo dei punti a tangente verticale si osserva che deve essere nulla la variazione della variabile $x$, ovvero $dx = 0$, ovvero, dalla prima equazione $x = y$. Analogamente, si trova che il luogo dei punti a tangente orizzontale è $1 = xy$.

Per studiare il sistema localmente, nell'intorno dei punti critici (che sono isolati), proviamo a linearizzare. La matrice jacobiana del sistema è

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -y & -x \end{bmatrix}.$$

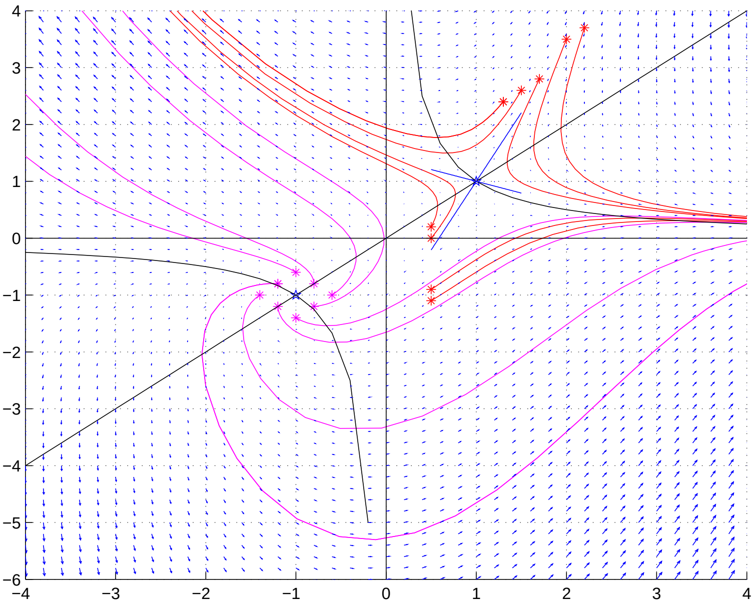


FIGURA 2. Traiettorie dell'Esercizio 2. Sono riportate le isocline, luogo dei punti a tangente verticale $y = x$ e orizzontale $y = 1/x$, i punti critici e gli autovettori del sistema linearizzato nell'intorno del punto di sella.

Valutata nell'intorno di $P_+$ si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

gli autovalori corrispondenti sono $\lambda_{1,2} = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$, che corrispondono ad un punto di sella. Anche $P_+$ è un punto sella. La matrice jacobiana valutata in $P_-$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cui corrispondono gli autovalori $\lambda_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$. Il sistema linearizzato ha dunque un fuoco instabile nel punto critico. Tale conclusione vale anche per il sistema originario.

Il piano delle fasi con alcune traiettorie trovate numericamente è rappresentato in Figura 2.

**Esercizio 3** La matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = -4x + 3y \end{cases} \tag{1.2}$$

ha autovalori $\lambda = 3 \pm 4\mathrm{i}$. L'origine (unico punto critico del sistema) è allora un fuoco instabile.

Considerando il sistema

$$\begin{cases} x' = e^{3x} + 4\tan y \\ y' = \sin 3y - \log(1 + 4x) \end{cases} \tag{1.3}$$

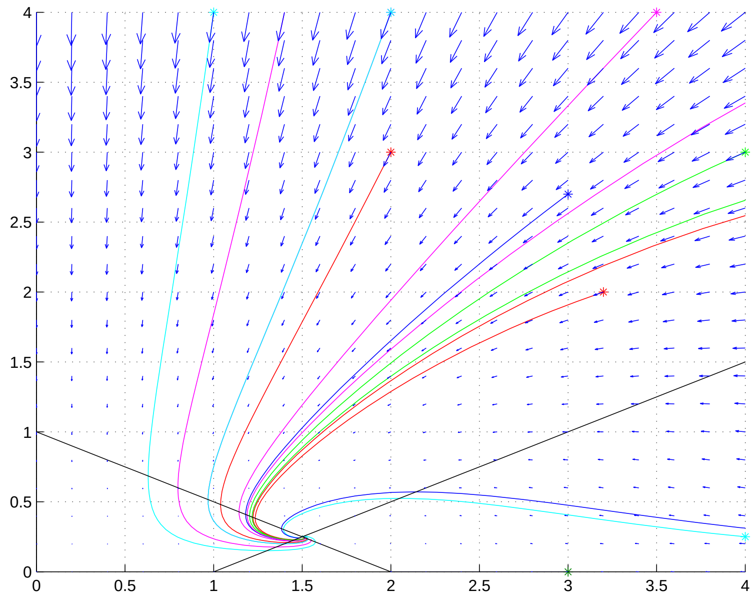



FIGURA 3. Traiettorie relative al modello di Lotka-Volterra con correzione logistica. Sono rappresentate anche le isocline del problema.

e sostituendo le funzioni sin, tan, log ed exp con il loro sviluppo di Taylor nell'origine, arrestato al primo ordine si ottiene

$$\begin{cases} x' &= 3x + o(x) + 4y + o(y) \\ y' &= -4x + o(x) + 3y + o(y) \end{cases} .$$

Il sistema (1.2), quindi, coincide con la linearizzazione di (1.3), nell'intorno del punto critico $(0,0)$. Si deduce che l'origine è un fuoco instabile anche per il sistema (1.3).

**Esercizio 4** L'incremento relativo delle prede

$$\frac{x'}{x} = 1 - y - ax$$

decresce al crescere dei predatori e al crescere del numero di prede, secondo un coefficiente $a$ che può rappresentare un meccanismo di competizione interna nell'ecosistema delle prede. L'incremento relativo del numero dei predatori

$$\frac{y'}{y} = -1 + x - by$$

cresce all'aumentare delle prede e diminuisce all'aumentare dei predatori, secondo il coefficiente $b$, che anche in questo caso rende conto dell'aumento della competizione tra i predatori, in un ambiente con risorse limitate.

Gli assi sono traiettorie del sistema. Il sistema ha (nel primo quadrante, l'unico con il significato fisico richiesto dal testo) tre punti critici: l'origine e

$$A = (\frac{1}{a}, 0) \qquad B = (\frac{1+b}{1+ab}, \frac{1-a}{1+ab})$$

Come si deduce studiando il segno del rapporto

$$\frac{-1 + x - by}{1 - y - ax}$$

il punto $A$ è semistabile (stabile per traiettorie sull'asse che provengono da sinistra, instabile per traiettorie che partono da destra). La matrice jacobiana del problema è

$$\begin{bmatrix} 1-y-2ax & -x \\ y & -1+x-2by \end{bmatrix}$$

ovvero, valutata in $B$

$$\frac{1}{1+ab}\begin{bmatrix} -a(1+b) & -1-b \\ 1-a & -b(1-a) \end{bmatrix}$$

cui corrispondono autovalori complessi e coniugati con parte reale negativa. Se ne deduce, anche per il sistema originario che $C$ è un fuoco stabile.

Non esistono traiettorie che portino all'estinzione dei predatori in un tempo finito. Una traiettoria siffatta dovrebbe, partendo con condizioni iniziali di prede e predatori non nulli, intersecare l'asse delle ascisse, cosa che contraddice l'unicità della soluzione (il Teorema di Esistenza ed Unicità è applicabile: le equazioni sono dei polinomi in $x$ e $y$, quindi funzioni continue e derivabili).

**Esercizio 5** Utilizzando il metodo di linearizzazione, la matrice jacobiana del sistema (1.1) è

$$\begin{bmatrix} \cos x - 2ye^x & 2e^x \\ y^2e^x + y\sin x & 2ye^x - \cos x \end{bmatrix}$$

che, valutata nell'origine dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori sono reali e opposti in segno, quindi l'origine per il sistema linearizzato, ma anche per il sistema (1.1), è un punto di sella.

**Esercizio 6** (a) I punti di equilibrio risolvono il sistema

$$\begin{cases} ye^y = 0 \\ 1-x^2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $P_+ = (1,0)$ e $P_- = (-1,0)$.

(b) Il sistema linearizzato nell'intorno di $P_+$ è

$$\begin{cases} \dot{x} &= 1(y-0) \\ \dot{y} &= -2(x-1) \end{cases}$$

cui corrisponde la matrice dei coefficienti $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, di autovalori $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$. Ne segue che $P_+$ è un centro per il sistema linearizzato

Il sistema linearizzato nell'intorno di $P_-$ è

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 2(x+1) \end{cases}$$

cui corrisponde la matrice dei coefficienti $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, di autovalori $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Ne segue che $P_+$ è una sella per il sistema linearizzato.

(c) $P_-$ è una sella anche per il sistema non lineare, mentre non è possibile dedurre nulla sulla natura di $P_+$ per il sistema non lineare, essendo un centro per il sistema linearizzato.

## 2. Sistemi Hamiltoniani e integrali primi

**Esercizi.**

**Esercizio 1** Determinare gli integrali primi del sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \sin x - 2ye^x \\ y' & = & y(ye^x - \cos x). \end{array}\right. \tag{1.4}$$

**Esercizio 2** Un corpo di massa pari ad un chilogrammo si muove sull'asse $\vec{x}$ soggetto alla forza $\mathbf{F} = (-x + \alpha x^2)\,\mathbf{i}$, con $\alpha > 0$. Si studino le orbite nel piano delle fasi $(x, y)$ dove $y = \dot{x}$ e si individui la regione di moto oscillatorio, al variare del parametro.

**Esercizio 3** Determinare gli integrali primi del sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{u} & = & v - u^2 v - v^3 \\ \dot{v} & = & u^2 + v^2 - 1 \end{array}\right. .$$

**Esercizio 4** Dal sistema conservativo ad un grado di libertà

$$\ddot{y} = -ye^y$$

(a) si calcoli un integrale primo
(b) si disegni l'andamento qualitativo dell'energia potenziale $U(y) = \displaystyle\int_0^y xe^x dx$
(c) si disegni il ritratto di fase nell'intorno dell'origine, esaminandone la stabilità.

**Esercizio 5** Dal sistema conservativo ad un grado di libertà

$$\ddot{x} = 1 - 3x^2$$

(a) si determinino gli eventuali punti di equilibrio
(b) si calcoli la funzione potenziale $U = U(x)$ che si annulla in $x = 0$ e se ne tracci il diagramma
(c) si tracci il ritratto di fase
(d) si dica se l'orbita corrispondente ai dati iniziali $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ è periodica, e nel caso specificare il periodo.

**Esercizio 6** Dal sistema conservativo ad un grado di libertà

$$\ddot{y} = y - 2y^3$$

(a) si determinino gli eventuali punti di equilibrio
(b) si calcoli la funzione potenziale $U = U(x)$ che si annulla in $x = 0$ e se ne tracci il diagramma
(c) si tracci il ritratto di fase
(d) si dica se il sistema ha orbite non periodiche.

**Esercizio 7** Determinare se il sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = -x(x^2 + y^4 - 4) \\ \dot{y} = 4(y-1)(x^2 + y^2 - 4) \end{array}\right.$$

ammette orbite periodiche e indagare le soluzioni.

**Esercizio 8** Considerato il sistema autonomo

$$\begin{cases} \dot{x} &= ye^y \\ \dot{y} &= 1 - x^2 \end{cases}$$

Si determini un integrale prima risolvendo l'equazione differenziale delle traiettorie e si tracci il diagramma di fase, studiando in particolare le orbite nell'intorno dei punti di equilibrio.

**Esercizio 9** L'equazione del moto di una particella di massa unitaria, che si muove lungo la congiungente due particelle di massa rispettivamente $m_1$ ed $m_2$, poste rispettivamente in $x = 0$ e in $x = 2$ , è

$$\ddot{x} = \gamma \left( -\frac{m_1}{x^2} + \frac{m_2}{(2-x)^2} \right)$$

con $0 < x < 2$.

(a) Si determinino gli eventuali punti di equilibrio e la loro natura,
(b) si tracci il diagramma della funzione potenziale che si annulla in $x = 1$,
(c) si disegni il ritratto di fase,
(d) si interpreti il risultato in termini del moto della particella .

**Soluzioni.**

**Esercizio 1** Il sistema bidimensionale assegnato è hamiltoniano, infatti

$$\begin{cases} x' &= \sin x - 2ye^x = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \\ y' &= y(ye^x - \cos x) = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \end{cases}$$

infatti si osserva che

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\sin x - 2ye^x) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} y(e^x - \cos x).$$

Le linee di livello della funzione

$$\mathcal{H}(x, y) = y \sin x - y^2 e^x$$

sono insiemi di traiettorie disgiunte (Figura 4).

**Esercizio 2** L'equazione assegnata è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \alpha x^2 \end{cases}$$

che è hamiltoniano e per il quale la funzione

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \alpha \frac{x^3}{3}$$

è un integrale primo ed ha il significato fisico di energia meccanica. La funzione

$$P(x) = \frac{x^2}{2} - \alpha \frac{x^3}{3}$$

rappresentata in Figura 5 è l'energia potenziale della massa $m$, dovuta alla forza **F**.

La funzione $P(x)$ ha un minimo in $(0, 0)$ e un massimo nel punto $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{6\alpha^3}\right)$ e presenta una buca di potenziale (Figura 5). Tenendo conto del fatto che l'energia cinetica $\frac{y^2}{2}$ è positiva, e che l'energia totale $\mathcal{E}$ si conserva, si riesce ad individuare

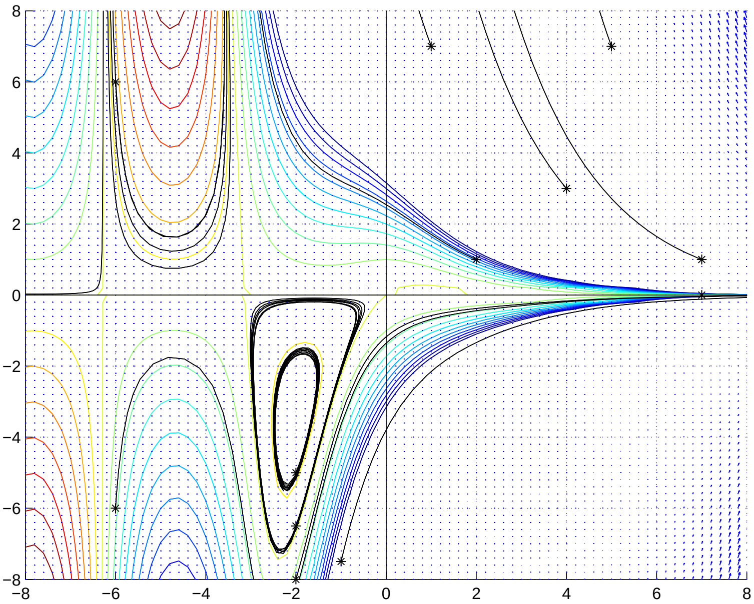


FIGURA 4. Linee di livello della funzione $\mathcal{H} = y\sin(x) - y^2\exp(x)$ e alcune soluzioni al problema di Cauchy per il sistema (1.4)

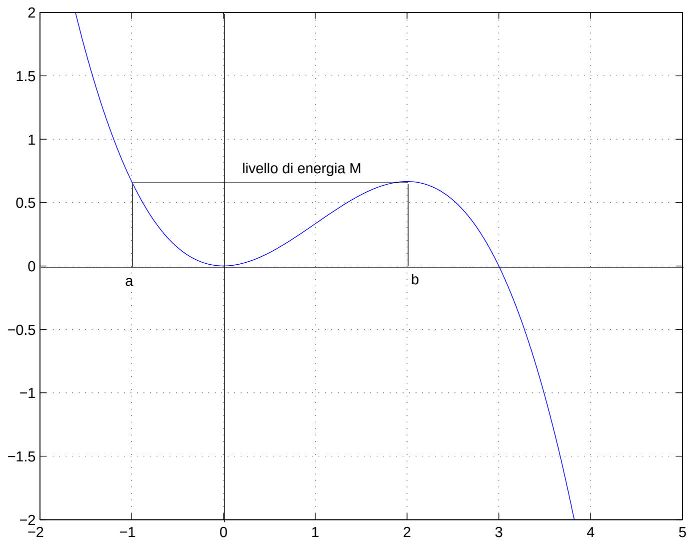



FIGURA 5. La funzione energia potenziale $P(x)$ nell'esercizio 2, disegnata nel caso $\alpha = 1/2$.

l'insieme nel piano di fase che dà origine a traiettorie periodiche nell'intorno del minimo. Esso è individuato dal livello di energia $M$, cui corrisponde la regione di moto periodico delimitata dagli estremi $a$ e $b$.

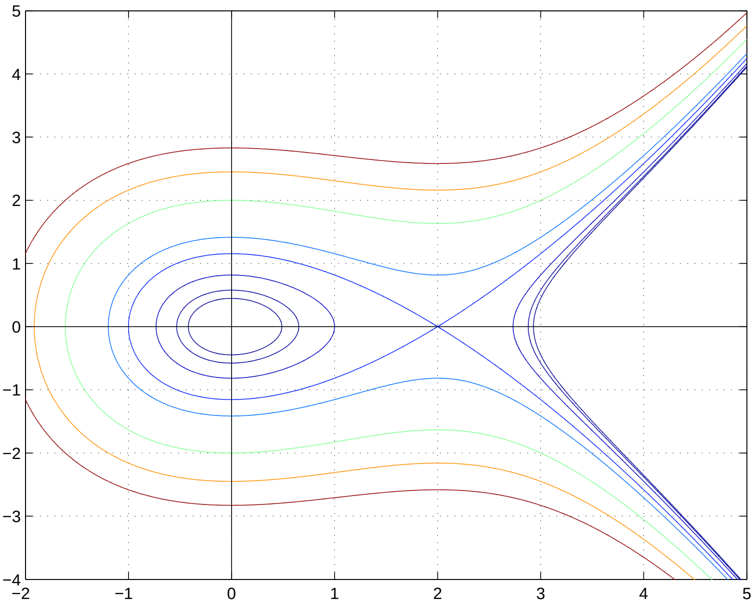



FIGURA 6. Insiemi di livella della funzione energia totale $E = (x^2/2 + y^2/2 - \alpha x^3/3)$, disegnati nel caso $\alpha = 1/2$.

È possibile dimostrare che gli insiemi di livello della funzione $\mathcal{E}$ sono linee chiuse nell'intorno dell'origine osservando che ai suoi punti stazionari $A = (0, 0)$ e $B = (1, 0)$ corrispondono rispettivamente la matrice hessiana

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui si deduce che $A$ è minimo, ed è allora un centro, e che $B$ è un punto di sella.

**Esercizio 3** Osserviamo innanzitutto che la circonferenza $u^2 + v^2 = 1$ è un luogo di punti stazionari per il sistema. Il sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{u} & = & v(1 - u^2 - v^2) = f(u, v) \\ \dot{v} & = & u^2 + v^2 - 1 = g(u, v) \end{array} \right. .$$

non è hamiltoniano, infatti

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -2uv \neq -\frac{\partial g}{\partial v} = -2v.$$

È possibile trovare gli integrali primi del sistema integrando l'equazione $\dfrac{du}{dv} = -v$, trovando $\mathcal{U}(u, v) = u - \dfrac{v^2}{2}$. Gli insiemi di livello della funzione $\mathcal{U}$ corrispondono al fascio di parabole $u = \dfrac{v^2}{2} + c$. Le linee di livello che secano la circonferenza sono composte da cinque traiettorie distinte: i due punti stazionali e tre archi di curva. Il senso di percorrenza delle traiettorie (indicato in Figura 7) può essere individuato analizzando il segno del differenziale $dv$ per i punti appartenenti alla retta $v = 0$ nell'equazione $dv = u^2 + v^2 - 1$. Se ne deduce che $dv > 0$ se $u < -1$ oppure $u > 1$.

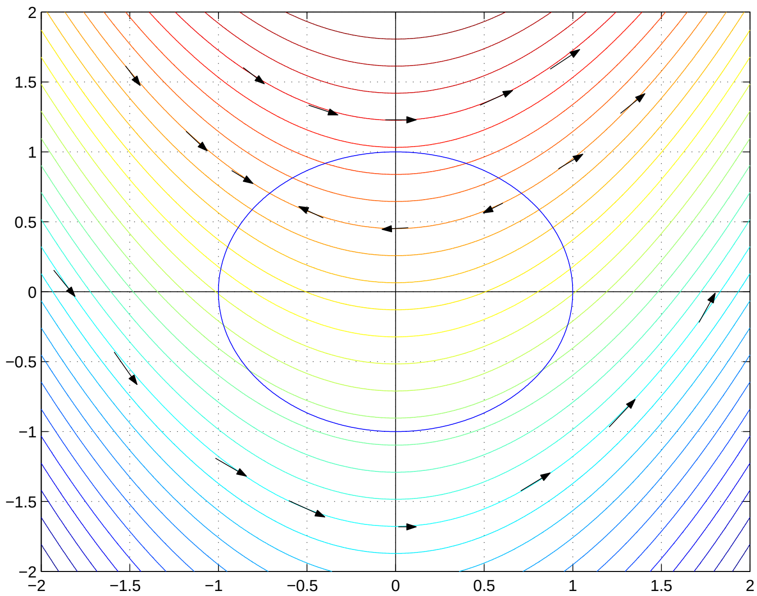


FIGURA 7. Traiettorie dell'Esercizio 3.

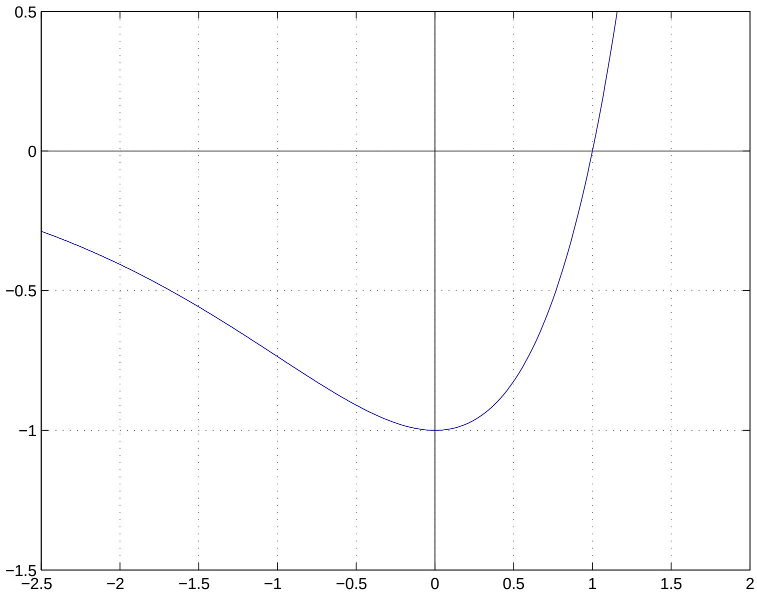


FIGURA 8. Grafico della funzione $U(y) = y \exp y - \exp y$.

**Esercizio 4** (a) L'equazione può essere ricondotta ad un sistema del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -ye^y = f(y) \\ \dot{y} &= x = g(x). \end{cases}$$

Tale sistema è hamiltoniano e, come è noto, un integrale primo ha la forma

$$\mathcal{E}(x,y) = \int_0^y f(s)ds - \int_{-\infty}^x g(s)ds = \frac{x^2}{2} + ye^y - e^y.$$

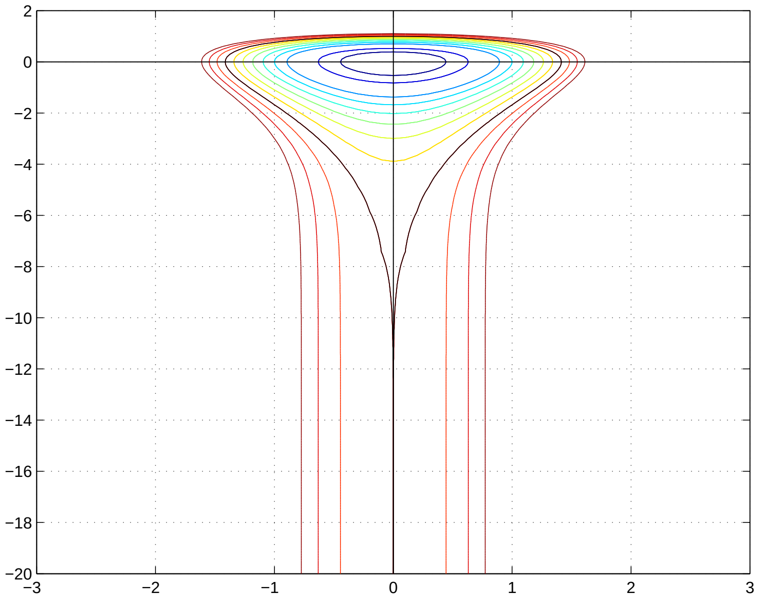



FIGURA 9. Linee di livello della funzione $\mathcal{E}(x, y) = \frac{x^2}{2} + ye^y - e^y$. La linea $E(x, y) = 0$ ha come asintoto l'asse $y$ e separa le traiettorie chiuse (con livelli negativi di energia) dalle traiettorie aperte (con livelli positivi di energia.

(b) La nuova variabile $x = \dot{y}$ corrisponde alla "velocità" della particella che occupa la posizione $y$ ed è sottoposta ad una forza che dipende dalla posizione $\mathbf{F} = -ye^y$ e che ha potenziale $U(y) = \int_{-\infty}^{y} se^s ds$ (la differenza di potenziale tra due posizioni è indipendente dalla scelta dell'estremo inferiore di integrazione, ma è abitudine diffusa in fisica scegliere potenziali nulli all'infinito). La funzione $U(y)$ è rappresentata nella Figura 8:
ha minimo in $(0, 1)$ e tende a $0^-$ per $y \to -\infty$.

(c) Tutte le traiettorie corrispondenti a livelli dell'energia

$$\mathcal{E}(x, y) = \int_0^y f(s)ds - \int_{-\infty}^{x} g(s)ds = \frac{x^2}{2} + ye^y - e^y$$

compresi tra -1 e 0 sono periodiche e (quindi) chiuse. La traiettoria $\mathcal{E}(x, y) = 0$, corrispondente al livello 0 dell'energia, è una traiettoria aperta. L'origine è stabile, ma non asintoticamente, essendo un centro.

**Esercizio 5** Studiamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 1 - 3x^2. \end{cases}$$

(a) I punti di equilibrio del sistema sono $A = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ e $B = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

(b) Il potenziale nullo in $x = 0$ è la primitiva di $3x^2 - 1$ che si annulla in $x = 0$, ovvero $U(x) = x^3 - x$.

(c) Il ritratto di fase è riportato in Figura 10.

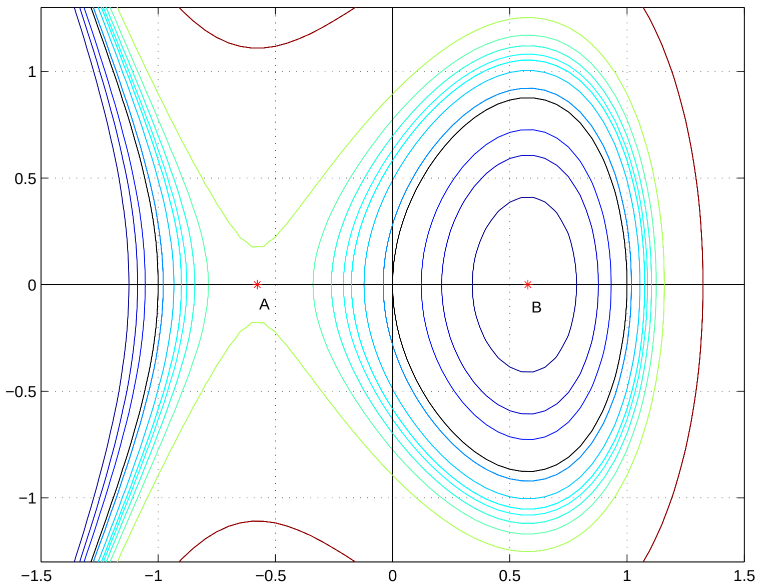



FIGURA 10. Linee di livello della funzione $\mathcal{U}(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + x^3 - x$. La soluzione stazionaria $A$ è una sella, mentre $B$ è un centro.

(d) L'orbita con dati iniziali $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$ è periodica, essendo chiusa e non contendo punti critici. Essa corrisponde al livello 0 dell'energia totale $\mathcal{U}$ ed ha perciòequazione $\dfrac{y^2}{2} + x^3 - x = 0$. Per calcolare il periodo dell'orbita possiamo utilizzare nell'equazione che la descrive la sostituzione $y = \dfrac{dx}{dt}$ ottenendo l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{2(x - x^3)}} = dt$$

l'integrazione di questa equazione tra 0 ed 1 (che sono i punti di intersezione della traiettoria con l'asse $y = 0$) equivale a calcolare il semiperiodo dell'orbita, quindi

$$T = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2(x - x^3)}}.$$

**Esercizio 6** L'equazione è riconducibile allo studio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - 2y^3 \\ \dot{y} &= x. \end{cases}$$

(a) I punti stazionari sono $A(0,0)$, $B(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ $C(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$.

(b) La funzione potenziale $U(x) = \dfrac{y^4}{2} - \dfrac{y^2}{2}$ è rappresentata in Figura 11.

(c) Il diagramma di fase, corrispondente alle linee di livello di $\mathcal{E}(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{2} - \frac{y^2}{2}$, è in Figura 11.

(d) Si osservi che tutte le linee di livello sono linee chiuse; le uniche traiettorie non periodiche sono quindi quelle linee di livello che contengono punti critici e che

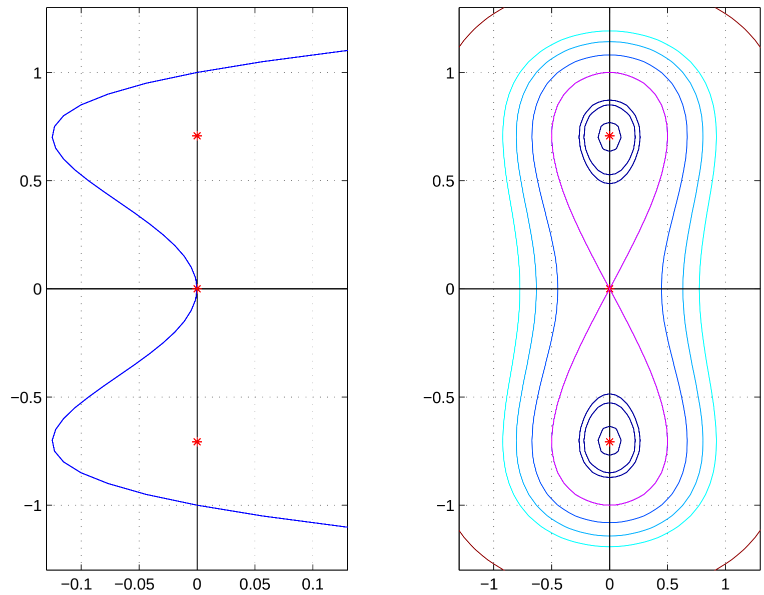



FIGURA 11. Nel grafico a sinistra è riportata la funzione potenziale $U(y)$ dell'Esercizio 6. A destra si trova il diagramma delle traiettorie, i.e. gli insiemi di livello della funzione energia.

dunque vengono percorse in un tempo infinito. Le uniche traiettorie non periodiche in questo caso sono allora i due anelli corrispondenti al livello $\mathcal{E}(x, y) = 0$, in color magenta nella figura.

**Esercizio 7** L'insieme dei punti critici del sistema è il luogo determinato dall'unione della circonferenza di raggio 2 centrata nell'origine e dal punto $(0, 1)$. La circonferenza $x^2+y^2-4 = 0$ non è un'orbita periodica del sistema. Infatti un qualunque punto della circonferenza è stazionario.

Cerchiamo un integrale primo del sistema. Dovendo trovare una funzione $\mathcal{U}(x, y) =$ cost tale che $\mathcal{U}_x(x, y) + \mathcal{U}_y(x, y) = 0$ posso ovviamente ricondurmi a studiare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 4(y-1) \end{cases} \tag{1.5}$$

essendo il termine $(x^2 + y^2 - 4)$ comune ad entrambe le equazioni. Il sistema (1.5) è lineare, non omogeneo; mediante traslazione ci riconduciamo al caso

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 4y \end{cases} \tag{1.6}$$

di facile integrazione, poichèle equazioni sono disaccoppiate. La soluzione di (1.6) è

$$\begin{cases} x(t) = Ke^{-t} \\ y(t) = Ce^{4t} \end{cases}$$

da cui possiamo ricavare la forma delle traiettorie relative al sistema (1.6): $x^4y =$ cost. Siccome (1.5) e (1.6) differiscono per una traslazione, verifichiamo che la funzione $\mathcal{U}(x, y) = x^4(y - 1)$ è un integrale primo per (1.5). Il punto $(0, 1)$ è un punto di sella per il problema e tutte le traiettorie $x^4y =$ cost che intersecano la circonferenza centrata nell'origine e di raggio 2 sono costituite da tre traiettorie distinte e da due

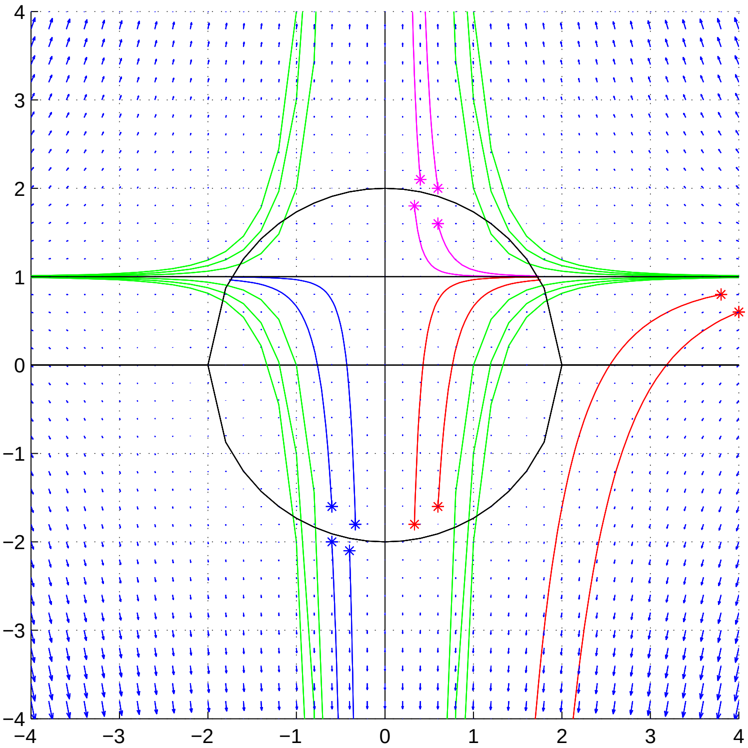



FIGURA 12. Si osservi in diverso senso di percorrenza sulle curve appartenenti agli integrali primi $\mathcal{U}(x,y) = x^4(y-1)$ (in verde), internamente ed esternamente rispetto alla circonferenza $x^2+y^2=4$.

punti stazionari. Si osservi una ulteriore differenza tra le traiettorie di (1.5) e quelle del sistema assegnato

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(x^2+y^2-4) \\ \dot{y} = 4(y-1)(x^2+y^2-4). \end{cases}$$

In questo caso la presenza del coefficiente moltiplicativo $x^2+y^2-4$ in entrambe le equazioni determina l'inversione del senso di percorrenza delle traiettorie che sono interne al cerchio di raggio 2, rispetto al verso di percorrenza delle traiettorie nel sistema (1.5). A questo proposito si osservi la Figura 12.

**Esercizio 8** I punti stazionari del sistema sono $(\pm 1, 0)$. Integrando l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{ye^y}$$

a variabili separabili si ricava che

$$\mathcal{U} = e^y(y-1) + \frac{x^3}{3} - x$$

è un integrale primo. La Figura 13 riporta l'andamento delle linee di livello dell'integrale primo; è possibile dimostrare che il punto $(1,0)$ è un centro osservando che è estremo libero della funzione $\mathcal{U}$. Infatti la matrice hessiana a lui associato è $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ quindi

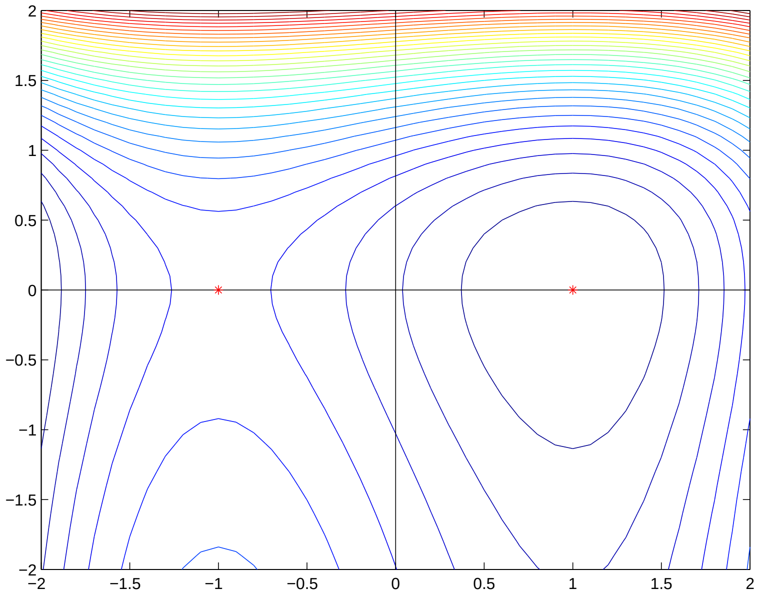



FIGURA 13. Linee di livello della funzione $\mathcal{U} = e^y(y-1) + \frac{x^3}{3} - x$.

$(1,0)$ corrisponde ad un minimo. Il punto stazionario $(-1,0)$ ha hessiana $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, cui corrisponde un punto di sella perché nella direzione $x$ la concavità della funzione è rivolta verso il basso, mentre nella direzione $y$ la concavità di $\mathcal{U}$ è rivolta verso l'alto. Se ne deduce che $(-1,0)$ è un punto di sella. I risultati sono in accordo e approfondiscono lo studio fatto nell'Esercizio 6 della sezione precedente dove lo stesso sistema viene studiato tramite linearizzazione.

**Esercizio 9** Per semplicità porremo $\gamma = 1$. Scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\dfrac{m_1}{x^2} + \dfrac{m_2}{(2-x)^2}. \end{cases}$$

(a) I punti di equilibrio risolvono il sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{m_1}{x^2} - \dfrac{m_2}{(2-x)^2} = 0 \end{cases}$$

dall'equazione $(m_1 - m_2)x^2 - 4m_1 x + 4m_1 = 0$ si ricava, se $m_1 \neq m_2$,

$$P_- = \left( \frac{2m_1 - 2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 - m_2}, 0 \right) \qquad P_+ = \left( \frac{2m_1 + 2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 - m_2}, 0 \right).$$

Se invece $m_1 = m_2 = m$ il punto di equilibrio è unico $P = (1,0)$. Per chiarezza supponiamo $m_1 > m_2$. Osserviamo che dalla risoluzione delle disuguaglianze

$$\frac{2m_1 - 2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 - m_2} > 0 \quad \frac{2m_1 - 2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 - m_2} < 2 \quad \frac{2m_1 + 2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 - m_2} > 2$$

si ricava facilmente che solamente $P_-$ ha coordinata $x$ compresa tra 0 e 2 dove vale la modellizzazione allo studio.

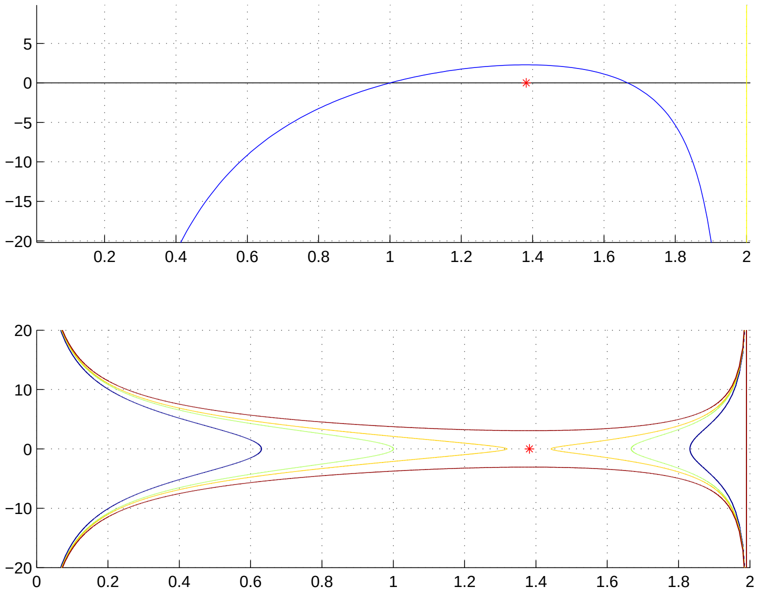



Figura 14. Potenziale e ritratto di fase del sistema proposto nell'Esercizio 9, con la scelta $m_1 = 15$, $m_2 = 3$.

(b) La funzione potenziale cercata risolve l'integrazione

$$\mathcal{U}(x) = \int_1^x \left( \frac{m_1}{x^2} - \frac{m_2}{(2-x)^2} \right) dx$$

ed è quindi

$$\mathcal{U}(x) = -\frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x-2} + m_1 + m_2.$$

La soluzione è rappresentata nella Figura 14. Si osservi che il punto di equilibrio $P_-$ corrisponde rispettivamente al massimo della funzione potenziale.

(c) Il ritratto di fase è rappresentato nella Figura 14. Il punto $P_-$ è un punto di equilibrio instabile e corrisponde ad una sella.

(d) Si osservi che non esistono delle traiettorie periodiche. Il potenziale tende a $-\infty$ per x tendente a 0 e a 2. Significa che la particella da una qualunque condizione iniziale tra 0 e 2 si sposta convergendo verso una delle due masse. Le uniche traiettorie che non convergono verso $m_1$ o $m_2$ sono quelle che intersecano il punto di equilibrio $P_-$.

## 3. Metodo della funzione di Liapunov

**Esercizi.**

**Esercizio 0** Dare la definizione di stabilità nel senso di Liapunov per le soluzioni di equilibrio di un sistema autonomo ed enunciare il Teorema di Liapunov.

**Esercizio 1** Si verifichi che la funzione

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

è una funzione di Liapunov per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + y + z \\ \dot{y} &= -2y \\ \dot{z} &= -3z \end{cases}$$

e si dimostri che la soluzione nulla è asintoticamente stabile per il sistema.

**Esercizio 2** Si stabilisca se la soluzione nulla è stabile per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - 2x^3 \\ \dot{y} &= -x - 3y^3. \end{cases}$$

**Esercizio 3** Sia $f$ una funzione di classe $C^1$ in $\mathbb{R}$, dispari, e tale che $f(y) > 0$ per $y > 0$. Si determini per quali parametri $a$ e $b$ la funzione

$$V(x, y) = ax^2 + b\int_0^y f(s)ds$$

è una funzione di Liapunov per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x + f(y) \\ \dot{y} &= -3x - 4f(y). \end{cases}$$

**Esercizio 4** Si verifichi che la funzione

$$L(x, y) = x^2 + y^4$$

è una funzione di Liapunov per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x - 2y^3 \\ \dot{y} &= x - y^3 \end{cases}$$

e ricordare la definizione di asintotica stabilità (nel senso di Liapunov) per le soluzioni di equilibrio di un sistema autonomo, quindi dedurre se la soluzione nulla di questo problema è asintoticamente stabile. La stabilità di tale soluzione può essere provata anche con il metodo di linearizzazione?

**Soluzioni.**

**Esercizio 0** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \tag{1.7}$$

e l'origine sia punto critico; sia $\mathcal{A}$ un qualunque intorno dell'origine. Consideriamo una funzione $z = V(x, y)$ definita in $\mathcal{A}$ e ivi positiva, eccetto in $(0, 0)$ dove $V(0, 0) = 0$. Osserviamo che tale funzione potrebbe rappresentare una qualche forma di energia del sistema, con l'origine come punto ad energia minima. Se $V$ ha la proprietà di decrescere lungo tutte le traiettorie che originano nei punti di $\mathcal{A}$, allora $V$ è una funzione di Liapunov per il sistema:

Definizione 1.1. *$V$ è una funzione di Liapunov per il sistema autonomo* (1.7) *nell'intorno $\mathcal{A}$ dell'origine se*

(a) $V(x, y) > 0$ *per ogni* $(x, y) \in \mathcal{A} \setminus (0, 0)$, *e* $V(0, 0) = 0$

(b) $\dfrac{dV(x(t), y(t))}{dt} = V_x(x(t), y(t))f(x(t), y(t)) + V_y(x(t), y(t))g(x(t), y(t)) \le 0$ *in* $\mathcal{A}$.

Vale il seguente

TEOREMA 1.1. *L'esistenza di una funzione di Liapunov garantisce che l'origine, punto d'equilibrio, sia stabile. Se inoltre*

$$\frac{dV(x(t), y(t))}{dt} < 0 \text{ per ogni } (x, y) \in \mathcal{A} \setminus (0, 0)$$

*allora l'origine è asintoticamente stabile.*

**Esercizio 1** Definiamo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

e

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 \\ \dot{x}_3 &= -3x_3 \end{cases}$$

si ricava facilmente che

$$\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = 2(-x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 - 2x_2^2 - 3x_3^2).$$

Utilizzando la disuguaglianza[1]

$$ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$$

nel trattare i termini misti, otteniamo

$$\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} \leq -\frac{3}{2} x_2^2 - \frac{5}{2} x_3^2.$$

Quindi

$$\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} < 0 \qquad V(x_1, x_2, x_3) > 0$$

se $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$; l'origine è allora asintoticamente stabile, essendo verificato il criterio di Liapunov.

Il sistema assegnato è lineare, l'origine è l'unico punto critico. Gli autovalori $\lambda_{1,2,3} = -1, -2, -3$ possono essere letti direttamente dal sistema, che ha una matrice dei coefficienti triangolare. Essendo tutti reali negativi si può subito dedurre che l'origine è un nodo stabile.

**Esercizio 2** La funzione $V(x, y) = x^2 + y^2$ è di Liapunov per il sistema. Inoltre

$$\frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = -4x^4 - 6y^4 < 0$$

per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$. Il criterio di Liapunov è verificato: l'origine è asintoticamente stabile.

**Esercizio 3** Si ricava innanzitutto che $f(0) = 0$, e che $\int_0^y f(t)dt$ è una funzione pari e positiva. Ne segue che $V(x, y) \geq 0$ scegliendo i parametri $a$ e $b$ positivi. Si ha allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} &= 2ax(-2x + f(y)) + bf(y)(-3x - 4f(y)) \\ &= -4ax^2 + xf(y)(2a - 3b) - 4b[f(y)]^2. \end{aligned}$$

[1] Sappiamo che $(a-b)^2 \geq 0$, e l'uguaglianza vale se e solo se $a = b$, svolgendo il quadrato si ottiene $a^2+b^2 \geq 2ab$.

Imponendo che l'equazione omogenea di secondo grado trovata non abbia soluzioni reali, si ricava la condizione $9b^2 + 4a^2 - 76ab < 0$.

CAPITOLO 2

# Esercizi proposti

**Esercizio 1** Considerare l'equazione differenziale $y''(t) + hy'(t) + ky(t) = 0$, $h$ e $k$ reali, $0 < h < k$.
(a) Indicare un problema fisico che può essere modellizzato dall'equazione.
(b) Esprimere l'integrale generale dell'equazione, al variare di $h$ e $k$.
(c) Porre $h = 0$ nell'equazione, e fare le opportune osservazioni.

**Esercizio 2** Risolvere l'equazione

$$y''(t) + y(t) = \sin t.$$

Interpretare il risultato.

**Esercizio 3** Scrivere il sistema lineare associato all'equazione del Esercizio 1. Analizzare la stabilità dell'origine.

**Esercizio 4** Sia $P(t)$ la popolazione di una certa specie animale. Si supponga che $P(t)$ soddisfi l'equazione di crescita logistica

$$\frac{dP}{dt} = 0.2P(t)(1 - P(t)/200), \quad y(0) = 150$$

(a) Riconoscere che l'equazione è autonoma, e quindi a variabili separabili, non lineare.
(b) Senza risolvere l'equazione, dare un grafico qualitativo della soluzione.
(c) Studiarne il diagramma di fase.
(d) Mostrare che la soluzione è della forma

$$P(t) = \frac{e^{0.2t}}{A + Be^{0.2t}}.$$

Determinare $A$ e $B$. [R.: $B = 1/200$, $A = 1/600$]

**Esercizio 5** Disegnare il diagramma di fase e l'andamento qualitativo delle soluzioni dell'equazione $y'(t) = y(t) - y^3(t)$.

**Esercizio 6** Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x_1' = -2tx_1 - x_2 \\ x_2' = 3tx_1 - t^2x_2 \end{cases}$$

con i due problemi di Cauchy: $x_1(0) = a$, $x_2(0) = 1$; $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$
(a) Scrivere in forma matriciale il sistema.
(b) Discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni per i due problemi di Cauchy.
(c) Dire quando le soluzioni sono indipendenti.
(d) Mediante la formula di Liouville calcolare $W(t)$.

**Esercizio 7** Data

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

si calcoli $e^{\mathbf{A}t}$, quindi si calcoli la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

**Esercizio 8** Considerare il modello preda-predatore con correzione logistica

$$\begin{aligned} x' &= (a - by - ex)x \\ y' &= -(c - dx + fy)y \end{aligned}$$

$a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f > 0$.

(a) Quali sono le prede e quali i predatori?

(b) Si stabilisca se esistono delle condizioni sui parametri che implichino l'estinzione dei predatori. In questo caso completare lo studio del modello.

**Esercizio 9** Considerare il modello che descrive due specie in competizione

$$\begin{aligned} x' &= (a - Ay - \alpha x)x \\ y' &= -(b - Bx + \beta y)y \end{aligned}$$

(a) Interpretare il modello.

(b) Studiare i punti critici del sistema al variare dei parametri (positivi).

(c) Interpretare i risultati.

**Esercizio 10** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\log(y+1) \\ y(0) = k \end{cases}$$

si stabilisca per quali valori di $k$ la soluzione esiste ed è unica. Quindi si tracci un grafico qualitativo delle soluzioni precisando l'intervallo massimale di definizione.

**Esercizio 11** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = y\sqrt[4]{y+1} \\ y(0) = k \end{cases}.$$

si determini

(a) per quali $k \in \mathbb{R}$ il problema ha soluzione unica

(b) se le soluzioni sono prolungabili in $\mathbb{R}$.

Trovate le soluzioni di equilibrio, se ne studi la stabilità e infine si tracci un grafico qualitativo di tutte le soluzioni.

**Esercizio 12** Al variare dei parametri $L, \omega \in \mathbb{R}^+ = \{0, +\infty\}$, risolvere l'equazione

$$\ddot{u}(t) + \frac{1}{L} = 1 + \sin\omega t$$

dando un'interpretazione fisica del risultato.

**Esercizio 13** È data una popolazione $P(t)$ che segue la legge

$$P'(t) = \frac{P(t)}{1 + P^3(t)}.$$

Dire se la soluzione locale al Problema di Cauchy esiste ed è unica. Disegnare il diagramma di fase e trovare, se esistono, punti di equilibrio discutendone la stabilità. Esaminare la prolungabilità della soluzione.

**Esercizio 14** Dato il sistema lineare a coefficienti costanti

$$z' = Az \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & \alpha - 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con $\alpha$ parametro reale.

(a) Discutere, al variare del parametro $\alpha$, la stabilità dell'origine nel piano delle fasi, classificando tale punto.

(b) Nel caso $\alpha = 2$,

  (i) determinare gli autovettori di $A$,

  (ii) calcolare la matrice $e^{At}$,

  (iii) scrivere l'integrale generale del sistema, descrivere le traiettorie nell'intorno dell'origine,

  (iv) scrivere la matrice di transizione $W(t, \tau)$.

**Esercizio 15** Data l'equazione

$$u^{(5)}(t) - 5u^{(3)}(t) + 4u(t) = 0$$

scrivere il sistema del primo ordine $\dot{z} = Az$ ad essa equivalente. Trovare autovalori ed autovettori della matrice $A$ e scrivere esplicitamente l'integrale generale del sistema, deducendo quindi la soluzione dell'equazione

**Esercizio 16** Dal sistema conservativo ad un grado di libertà

$$\ddot{y} = y^3 - y$$

(a) si determinino gli eventuali punti di equilibrio

(b) si calcoli la funzione potenziale $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x)$ che si annulla in $x = 0$ e se ne tracci il diagramma

(c) si tracci il ritratto di fase

(d) si dica per quali dati iniziali $x(0) = k$ e $\dot{x}(0) = 0$ le orbite sono periodiche.

CAPITOLO 3

# Temi d'esame risolti

## 9 luglio 2002

**Esercizio 1.** Dato il sistema conservativo ad un grado di libertà

$$x'' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = F(x) \qquad\qquad x > 0$$

(1) Disegnare il grafico della funzione energia potenziale $U$.
(2) Dedurre la configurazione delle traiettorie nel piano delle fasi $(x,\, x')$.
(3) Stabilire per quali valori dell'energia totale $E$ esistono orbite chiuse.
(4) (Facoltativo) Dalla legge di conservazione dell'energia dedurre il valore della velocità limite, per $t \to \pm\infty$, per le soluzioni non periodiche.

**Soluzione.** Il problema è equivalente al sistema (hamiltoniano)

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= F(x) \end{cases}$$

Sia $\mathcal{E}_{\text{cin}}$ l'energia cinetica del sistema, e $U$ l'energia potenziale:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{cin}} &= \frac{1}{2}(x')^2 \\ U &= -\int_{x_0}^{x} F(x)dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

con la scelta $x_0 = \frac{1}{2}$, con la quale il potenziale -noto a meno di una costante additiva arbitraria- viene posto nullo all'infinito. Il grafico di $U(x)$ ha un asintoto verticale positivo per $x = 0$, un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e un minimo -buca di potenziale- in $x = 1$. Quindi $(x, x') = (1, 0)$ è una traiettoria stazionaria. Un integrale primo del sistema risulta essere l'energia totale $E = U + \mathcal{E}_{\text{cin}}$. Poiché l'energia cinetica è non negativa, l'energia potenziale non può essere più grande dell'energia totale. Se ne deduce che il moto è periodico (orbite chiuse) se l'energia totale $E$ è inferiore a 0. Viceversa una soluzione non periodica è caratterizzata dal fatto di avere energia totale positiva. In particolare se $v_0 = x'(T)$ è la velocità all'istante iniziale $T$ e $\bar{x}$ la posizione nell'istante iniziale $T$, e se il moto è non periodico, per $t \to +\infty$ deve essere verificata la seguente relazione (conservazione dell'energia alias conservazione degli integrali primi lungo le traiettorie)

$$\mathcal{E}_{cin}(T) + U(T) = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{\bar{x}} + \frac{1}{2\bar{x}^2} = \lim_{t\to+\infty} \{\mathcal{E}_{cin}(t) + U(t)\}$$

Essendo stato scelto nullo il potenziale all'infinito, la velocità limite richiesta è

$$v(\infty) = \pm\sqrt{2\left(\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{\bar{x}} + \frac{1}{2\bar{x}^2}\right)}$$

dove la quantità tra parentesi è positiva per la richiesta di avere traiettorie non chiuse.

**Esercizio 2.** Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = 2y - 2x^3 \\ y' = -x - 3y^3 \end{cases} \tag{3.1}$$

(1) Studiare il sistema linearizzato nell'origine.
(2) Dal risultato del punto precedente si può dedurre che il sistema (3.1)
 (a) è asintoticamente stabile
 (b) è stabile
 (c) è instabile
 nell'intorno dell'origine, oppure non si può dedurre nulla? Perché?
(3) Analizzare la stabilità dell'origine determinando una funzione di Liapunov della forma

$$V(x, y) = ax^2 + by^2.$$

**Soluzione.** Il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = -x \end{cases}$$

i cui autovalori sono $\lambda = \pm i\sqrt{2}$. L'origine del sistema linearizzato è dunque un centro e nulla si può concludere circa la stabilità del sistema (3.1).
Se la funzione di Liapunov deve essere del tipo assegnato, si ricava che

$$\nabla V(x, y) = (2ax, 2by).$$

Da cui

$$\begin{aligned} V'(t) &= \nabla V(x, y) \cdot (x'(t), y'(t)) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y} y'(t) \\ &= 4ax(t)y(t) - 4ax^4(t) - 4bx(t)y(t) - 6by^4(t) \end{aligned}$$

Una funzione di Liapunov (definizione 3.7 Pagani Salsa vol.2), quindi, è quella che si ottiene con la condizione $2a = b > 0$, in modo che

$$V'(t) = -4ax^4(t) - 12ay^4(t) < 0$$

indipendentemente dalla traiettoria lungo la quale viene valutata. L'origine è dunque un fuoco asintoticamente stabile per il sistema non lineare (3.1).

**Esercizio 3.** Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = y + x(\cos(x^2 + y^2) - 1) \\ y' = -x + y(\cos(x^2 + y^2) - 1) \end{cases} \tag{3.2}$$

(1) Scrivere il sistema (3.2) in coordinate polari: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.
(2) Disegnare il ritratto di fase, precisando in particolare la stabilità di eventuali punti di equilibrio e cicli limite.

**Soluzione.** Utilizzando le relazioni dinamiche tra le coordinate cartesiane e le coordinate polari

$$\begin{cases} \rho'\rho &= xx' + yy' \\ \theta'\rho^2 &= -x'y + xy' \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} \rho' &= \rho(\cos(\rho^2) - 1) \\ \theta' &= -1 \end{cases}$$

Dallo studio del segno della prima equazione (di non immediata integrazione) si deduce che lungo tutte le traiettorie la distanza dall'origine decresce, o è costante per

$$\rho = \sqrt{2k\pi} \qquad k = 0, +1, +2, \cdots .$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$\theta(t) = -t + c$$

con $c$ costante arbitraria. Le traiettorie

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt{2k\pi} \qquad k = 0, +1, +2, \cdots . \\ \theta &= -t + c \end{cases}$$

sono cicli limite semistabili. L'origine è un fuoco asintoticamente stabile.

## 8 luglio 2003

**Esercizio 1.** Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -kx^2y - x^5 - (k-1)x \end{cases}$$

con $k$ parametro reale.

(1) Trovare i punti critici al variare di $k$.
(2) (a) Determinare un valore di $k$ per cui il sistema è hamiltoniano e riconoscere il sistema a un grado di libertà equivalente, trovando l'energia potenziale e l'energia cinetica del sistema.
   (b) Trovare i punti critici, studiare il potenziale e il campo di direzioni.
   (c) Descrivere il diagramma di fase del sistema.
   (d) Determinare l'energia del sistema in corrispondenza delle traiettorie non periodiche.
(3) Studiare la stabilità (locale) dell'origine per $k = 1$:
   (a) linearizzando i sistema,
   (b) utilizzando una funzione di Liapunov del tipo $V = ax^n + by^m$, con $a$, $b > 0$ e $n, m \in \mathbf{N}$ e pari.

E commentare sinteticamente, ma in modo dettagliato, le tecniche e i risultati ottenuti.

**Soluzione.**

(a) I punti critici risolvono il sistema

$$\begin{cases} y &= 0 \\ x^5 &= (1-k)x \end{cases}$$

se $1-k \leq 0$ l'unico punto critico è l'origine. Se $1-k > 0$ ci sono tre punti critici:

$$P_0 = (0,0) \qquad P_- = (-\sqrt[4]{1-k}, 0) \qquad P_+ = (\sqrt[4]{1-k}, 0).$$

(b) (i) Un sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= g(x,y) \end{cases}$$

è hamiltoniano se esiste una funzione $H = H(x,y)$ tale che

$$\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ g(x,y) &= -\dfrac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

Si ricava che condizione necessaria affinchèun sistema sia hamiltoniano è che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

In questo caso si ricava $0 = kx^2$, da cui ricaviamo $k = 0$. Studiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^5 + x. \end{cases}$$

Tale sistema corrisponde ad un sistema ad un grado di libertà regolato dall'equazione $\ddot{x} = -x^5 + x$, e descrive il moto sull'asse $\mathbf{i}$ di una particella di massa unitaria sottoposta alla forza $(-x^5 + x)\mathbf{i}$. L'energia cinetica e potenziale della particella è

$$\mathcal{E} = \frac{y^2}{2} \qquad \mathcal{U} = \frac{x^6}{6} - \frac{x^2}{2}$$

(ii) Dal punto (a) si ricava che i punti critici del sistema sono

$$P_0 = (0,0) \qquad P_- = (-1,0) \qquad P_+ = (1,0).$$

Il campo delle direzioni e la funzione potenziale sono riportati nella Figura 1.

(iii) Il diagramma di fase è riportato in Figura 2. Le linee di livello della funzione

$$\mathcal{H} = \frac{y^2}{2} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^2}{2}$$

sono insiemi di traiettorie.

(iv) Le uniche traiettorie non periodiche sono date dalle linee di livello che contengono punti critici, essendo tutte le linee di livello chiuse: le traiettorie non periodiche corrispondono perciò al livello 0 della funzione $\mathcal{H}$ e corrispondono alle linee di livello che intersecano l'origine.

(c) (i) Se $k = 1$ il sistema assegnato perde la parte lineare dell'equazione in $y$. Il sistema linearizzato corrispondente è degenere e non si puòdunque concludere nulla circa la stabilità dell'origine per il sistema non lineare.

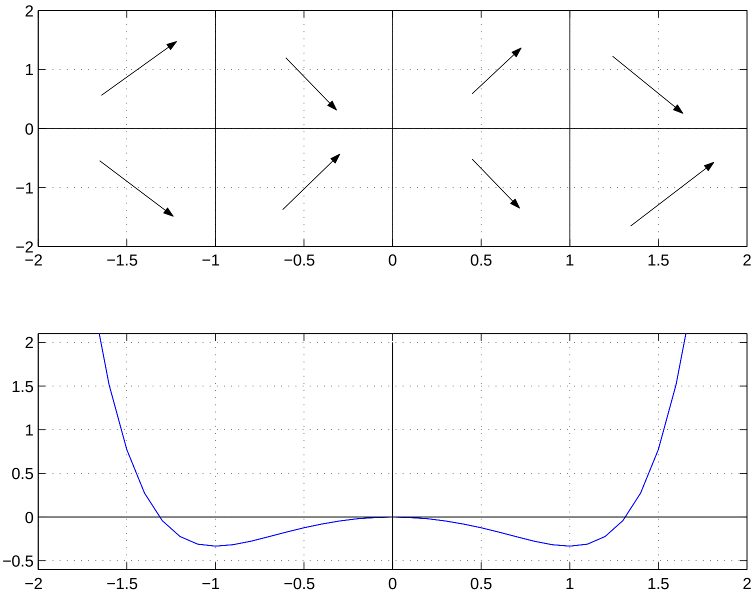



Figura 1. Campo delle direzioni (in alto) e grafico del potenziale $\mathcal{U}$ (in basso).

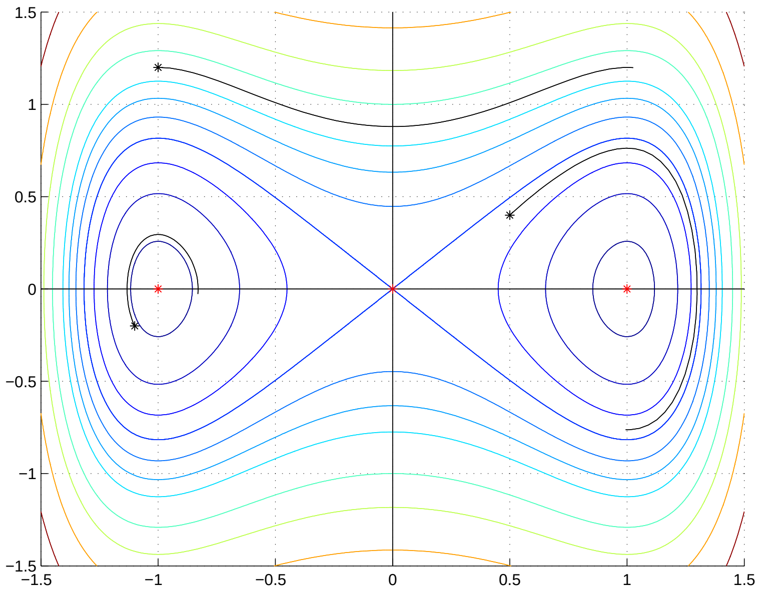



Figura 2. In figura sono riportate le linee di livello della funzione $\mathcal{H}$ e alcune soluzioni dell'equazione differenziale trovate numericamente, integrando nell'intervallo temporale $(0, 2)$.

(ii) Si considera la funzione $V = ax^n + b^m$, con $a$ e $b$ positivi e $n$, $m$ pari. La funzione $V$ è positiva, nulla in $(0, 0)$ e risulta

$$\begin{aligned} \dot{V} &= anx^{n-1}y + bmy^{m-1}(-x^5 - x^2 y) \\ &= anx^{n-1}y - bmy^{m-1}x^5 - bmy^m x^2. \end{aligned}$$

Con la scelta $n = 6$, $m = 2$, $b = 1$, $a = 1/3$, $V$ è una funzione di Liapunov per il sistema. L'origine è allora stabile. Si deduce $\dot{V} = -2x^2y^2$. Si osservi allora che gli assi $x = 0$ e $y = 0$ non sono positivamente invarianti per il sistema. Sia infatti $x = 0$; il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 0 \end{cases}$$

quindi tutte le traiettorie che intersecano l'asse $y$ in un punto diverso dall'origine hanno differenziale rispetto a $x$ non nullo, quindi non possono essere tangenti all'asse $y$. Sia ora $y = 0$; il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= -x^5 \end{cases}$$

quindi tutte le traiettorie che intersecano l'asse $x$ in un punto diverso dall'origine hanno differenziale rispetto a $y$ non nullo, quindi non possono essere tangenti all'asse $x$. Queste considerazioni dimostrano che gli assi non possono essere insiemi positivamente invarianti, e quindi è possibile concludere che l'origine è asintoticamente stabile.

**Esercizio 2.** Trovare le soluzioni periodiche del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(5 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(5 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

e verificarne la stabilità. Quindi disegnare un diagramma qualitativo delle soluzioni.

**Soluzione.** Passando a coordinate polari, utilizzando le relazioni

$$\begin{cases} \rho\dot{\rho} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ \rho^2\dot{\theta} &= x\dot{y} - y\dot{x} \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= 5 - \rho^2 \\ \dot{\theta} &= -1. \end{cases}$$

Si deduce che la circonferenza di raggio $\sqrt{5}$ è una traiettoria periodica, ed un ciclo limite per l'equazione. Tale traiettoria viene percorsa in verso orario ($\dot{\theta} < 0$). Studiando il segno di $\dot{\rho}$ ricaviamo che tale ciclo limite è stabile.

## 11 luglio 2003

**Esercizio 1** Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y(2 - xy) = f(x, y) \\ \dot{y} = -x(2 - xy) = g(x, y). \end{cases}$$

(a) Determinare i punti critici.

(b) Studiare il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine e stabilire la natura di tale punto. È possibile trarre conclusioni anche sulla natura dell'origine per il sistema non lineare? Perché?

(c) Determinare gli integrali primi e disegnare le traiettorie precisandone l'orientamento.
(d) Completare l'analisi della natura dell'origine come punto di equilibrio per il sistema non lineare.
(e) Precisare quali sono le orbite periodiche.

(a) L'origine è un punto critico isolato. Punti critici non isolati sono quelli del grafico dell'iperbole equilatera di equazione $2 = xy$.
(b) Il sistema linearizzato nell'intorno di $(0,0)$ risulta

$$\begin{cases} \dot{x} = y2 \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$$

Calcolando gli autovalori, l'origine risulta essere un centro, e non si possono trarre conclusioni circa la natura del punto per il sistema non lineare, come da Teorema noto.
(c) Gli integrali primi sono soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

cui corrisponde la famiglia di circonferenze $x^2 + y^2 = C$.
(d) Dall'analisi degli integrali primi si deduce che l'origine è un centro anche per il sistema non lineare.
(e) Sono orbite periodiche l'origine e tutte le circonferenze $x^2 + y^2 = r^2$ con $0 < r < 2$, percorse in senso orario.

**Esercizio 2.** Sia dato il sistema conservativo a un grado di liberà

$$\ddot{x} = 10x^4 + 18x^3 - 18x^2.$$

(a) Disegnare il grafico qualitativo della funzione energia potenziale supponendo che si annulli in $x = 0$.
(b) Dedurre la configurazione delle traiettorie nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
(c) Precisare le traiettorie corrispondenti ai vari livelli di energia, specificando se si tratta di punti di equilibrio, di orbite chiuse oppure no.

## 18 luglio 2003

**Esercizio 1.** Sia data l'equazione differenziale

$$\dot{y} = -\frac{2x}{1+x^2}y + 1.$$

(1) Enunciare con rigore il Teorema di Esistenza ed Unicità.
(2) Verificare le ipotesi del Teorema di Prolungamento per dedurre un intervallo massimale di esistenza delle soluzioni con dato iniziale $y(0) = k$.
(3) Studiare il segno della derivata prima della soluzione e verificare a priori la presenza di asintoti per la soluzione.
(4) Integrare l'equazione e scrivere l'integrale generale.
(5) Risolvere il problema di Cauchy $y(0) = 5$.

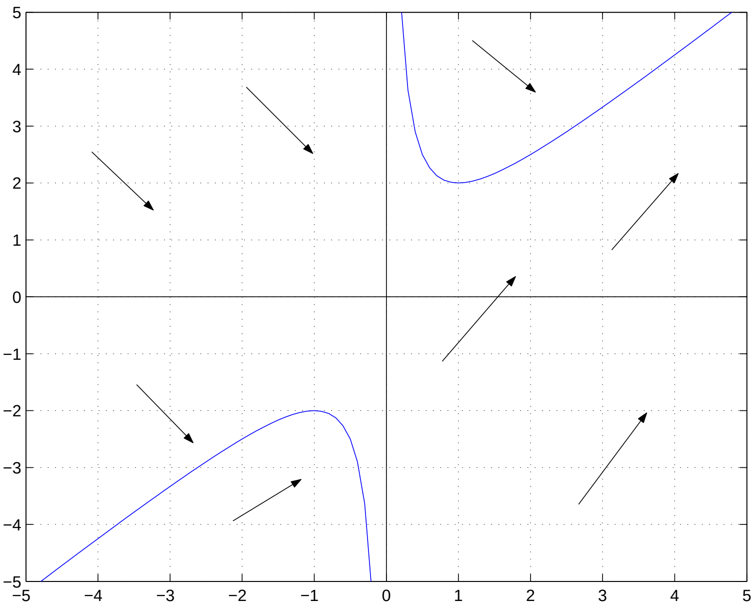



FIGURA 3. Studio del segno della derivata prima.

**Soluzione.**

(a) **Teorema di Esistenza ed Unicità locale.** Data l'equazione differenziale del primo ordine in forma normale
$$y'(x) = f(x, y)$$
se nell'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ sono soddisfatte le condizioni:
  (i) $f(x, y)$ continua in $A$
  (ii) $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ continua in $A$

allora la soluzione locale al problema di Cauchy assegnato in un qualunque punto di $A$ esiste ed è unica.

(b) Si considera la striscia $S = [a, b] \times \mathbb{R}$ con $a < 0$ e $b > 0$ in modo che il punto$(0, k)$ appartenga ad $S$. L'equazione è lineare; in particolare studiando il grafico della funzione $z(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ è facile dedurre che $\max x \in [a, b] z(x) = 1$. Quindi in $S$ vale la maggiorazione
$$\left| -\frac{2x}{1+x^2} y + 1 \right| \leq \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| |y| + 1 \leq |y| + 1$$
indipendente da $a$ e da $b$. Ne segue che la soluzione è prolungabile su tutto $\mathbb{R}$.

(c) La derivata è positiva se
$$y \leq \frac{1+x^2}{2x}.$$
Con un semplice studio di funzione, si ricavano le soluzioni, riportate in Figura 3.

(d) Integrando l'equazione lineare si ottiene
$$y(x) = \frac{1}{x^2+1}\left(C + x + \frac{x^3}{3}\right).$$

(e) La soluzione associata al problema di Cauchy $y(0) = 5$ si ottiene con la scelta $C = 5$.

**Esercizio 2.** Sia dato il sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

$$\begin{cases} \dot{x} & = -x + y \\ \dot{y} & = x + y. \end{cases}$$

(1) Calcolare la matrice $e^{At}$.
(2) Scrivere l'integrale generale del sistema.
(3) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x(0) & = 1 \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

precisando il suo intervallo massimale di definizione.

**Soluzione.**

(a) Gli autovalori di $A$ sono $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ (l'origine è una sella); e gli autovettori corrispondenti sono le rette $y = (1 \pm \sqrt{2})x$. Si deduce

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 \\ \sqrt{2}+1 & -1 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = S \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix}.$$

(b)

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

(c) Risolvendo il problema di Cauchy si trova $c_1 = c_2 = 1$. L'intervallo massimale di definizione della soluzione è $(-\infty, +\infty)$, essendo combinazione lineare di esponenziali ($e^{\sqrt{2}t}$, $e^{-\sqrt{2}t}$) che hanno dominio $(-\infty, +\infty)$.

**Esercizio 3.** Risolvere il sistema conservativo a un grado di libertà

$$\ddot{y}(t) - k^2 y(t) = \exp(\omega t)$$

con $k, \omega > 0$ integrandolo come equazione a coefficienti costanti. Quindi, dare un'interpretazione fisica del risultato.

**Soluzione.** La soluzione dell'equazione omogenea associata è $y(t) = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$.

Se $\omega = \pm k$ consideriamo la funzione $u = Ate^{kt}$ come soluzione dell'equazione. Se ne deduce $A = \pm(2k)^{-1}$. L'integrale generale è allora

$$y(t) = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt} \pm \frac{1}{2k} te^{kt}.$$

Se $\omega \neq \pm k$ consideriamo la funzione $u = Ae^{\omega t}$ come soluzione dell'equazione. Se ne deduce $A = (\omega^2 - k^2)^{-1}$. L'integrale generale è allora

$$y(t) = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt} \pm \frac{1}{\omega^2 - k^2} e^{\omega t}.$$

(Per l'interpretazione fisica, si confronti il capitolo 2.)

**22 luglio 2003**

**Esercizio 1.**

(a) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

calcolarne autovalori ed autovettori.

(b) Scrivere in forma esplicita il sistema $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ e calcolarne l'integrale generale.

(c) Scrivere la matrice di transizione $e^{At}$.

**Soluzione.**

(a) Gli autovalori di $A$ sono $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3\mathrm{i}$. Un autovalore associato a $\lambda_1 = -2 + 3\mathrm{i}$ è $h_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}$; un autovettore associato a $\lambda_2 = -2 - 3\mathrm{i}$ è $h_2 = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}$. Le coppie di autovettori complesse e coniugate possono quindi essere scritte nella forma

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b+c)

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -2y_1 - 3y_2 \\ \dot{y}_2 = 3y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Per scrivere l'integrale generale, consideriamo la matrice $S$ che si ottiene accostando la parte immaginaria e quindi la parte reale degli autovettori. Si ha $S = I$. In effetti $A$ è già in forma pseudo-diagonale, con la parte reale degli autovalori sulla diagonale principale e la parte immaginaria sulla diagonale secondaria. Ne ricaviamo che

$$e^{At} = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{bmatrix}.$$

L'integrale generale del sistema è dunque

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

**Esercizio 2.** Sia data l'equazione differenziale ordinaria

$$y' = y(1 - t^2) = f(t, y).$$

(a) Dopo aver enunciato il Teorema di Esistenza ed Unicità locale per le soluzioni del problema di Cauchy verificare che per ogni punto passa una ed una sola soluzione, e prevedere, giustificando le conclusioni in base alla teoria, quale sia l'intervallo massimale di definizione delle soluzioni.

(b) Studiare nel piano $(t, y)$ il segno di $y'$, e tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni dei tre problemi di Cauchy: $y(0) = 1$, $y(0) = 0$, $y(0) = -1$.

(c) Scrivere l'integrale generale dell'equazione.

(d) Trovare analiticamente le soluzioni dei tre problemi al punto b).

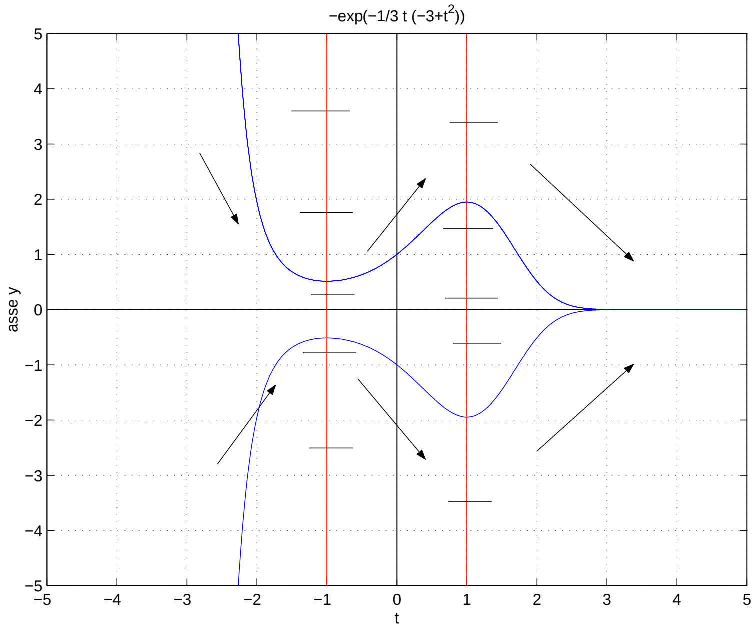



FIGURA 4. Soluzione qualitativa dell'Esercizio 2.

**Soluzione.**

(a) Teorema di Esistenza ed Unicità: essendo $f(t,t)$ continua in $\mathbb{R}^2$, ed essendolo pure la sua derivata $f_y(t,y) = (1-t^2)$, allora per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esiste unica la soluzione dell'equazione $y' = f(t,y)$ passante per $(t_0, y_0)$ e definita in un intorno $I_\delta$ di $t_0$.

Inoltre, l'equazione è anche lineare: in ogni striscia $[a,b] \times \mathbb{R}$ sono soddisfatte le ipotesi di crescita (sub)lineare di $f$; la soluzione può allora essere prolungata in tutto l'intervallo $[a,b]$ e , per l'arbitrarietà di $a$ e di $b$, può essere prolungata su $\mathbb{R}$.

(b) La Figura 4 riporta l'unica soluzione stazionaria del problema (la retta $y = 0$ che risolve il primo dei tre problemi di Cauchy) e le rette (in rosso) a tangente orizzontale. E le direzioni di crescita della soluzione. Le altre due soluzioni richieste dovranno avere un andamento qualitativamente simile a quello riportato in figura, tenendo conto anche dei risultati sulla prolungabilità delle soluzioni. Un'indagine qualitativa più accurata potrebbe stabilire se esistono e quali sono gli asintoti delle soluzioni.

(c) L'integrale generale è $y(t) = Ke^{t-t^3/3}$.

(d) Le soluzioni richieste sono rispettivamente $y(t) = e^{t-t^3/3}$, $y = 0$, $y(t) = -e^{t-t^3/3}$.

**Esercizio 3.** Calcolare l'integrale generale dell'equazione

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 4\cos t + 2\sin t$$

ricordando che frequentemente conviene cercare un integrale particolare dell'equazione completa della stessa orma del termine noto.

**Soluzione.** L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$z(t) = c_1 e^t + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t.$$

Per similitudine, si cerca un integrale particolare del problema completo della forma $v(t) = A\cos t + B\sin t$, con $A$ e $B$ da determinarsi. Imponendo che risolva l'equazione troviamo $A = -1$ e $B = 1/3$.

L'integrale generale del problema è perciò

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t - \cos t + \frac{1}{3}\sin t.$$

**Esercizio 4.** Un serbatoio da 100 $l$ contiene 10 litri di acqua pura. All'istante $t = 0$, da una tubazione, una miscela contente 25 $g$ di sali ogni litro viene immessa nella vasca alla velocità di 4 litri al minuto; i sali sono ben miscelati e si diluiscono istantaneamente nell'acqua della vasca. La mistura esce attraverso una condotta di scarico alla velocità di 3 $l$ al minuto. Quanto sale è contenuto nel serbatoio all'istante in cui il serbatoio trabocca e quale è la concentrazione?

**Soluzione.** Indichiamo con $Q(t)$ la quantità di miscela presente nel serbatoio (in litri) all'istante $t$. Misuriamo $t$ in minuti.

Poichè nel serbatoio entrano $4l$ di miscela al minuto e ne escono 3 al minuto, essendo $10l$ la quantità iniziale di acqua, abbiamo che

$$Q(t) = 10 + (4-3)t$$

da cui possiamo ricavare che il tempo di traboccamento della vasca corrisponde a $t = 90$ minuti.

Indichiamo con $s(t)$ la quantità di sali presente nella vasca al tempo $t$ espressa in grammi, allora la variazione della quantità totale di sali deve soddisfare la relazione

$$\dot{s}(t) = 25 \cdot 4 - 3\frac{s(t)}{Q(t)}.$$

Utilizzando la relazione trovata in precedenza per $Q(t) = 10 + t$, abbiamo

$$\dot{s}(t) = 25 \cdot 4 - 3\frac{s(t)}{10+t}.$$

L'equazione è lineare e può essere facilmente integrata. Si trova

$$s(t) = \frac{C}{(10+t)^3} + 25(10+t)$$

imponendo la condizione iniziale $s(0) = 0$, si ricava il valore della costante $C = -25 \cdot 10^4$, e quindi

$$s(t) = 25\left[10 + t - \frac{10^4}{(10+t)^3}\right].$$

Rispondiamo ora alle domande che l'esercizio pone. Il sale contenuto nel serbatoio nell'istante in cui trabocca è

$$s(90) = 25\left[10 + 90 - \frac{10^4}{(10+90)^3}\right] = 25 \cdot \left[100 - \frac{1}{100}\right] \simeq 2500$$

in grammi, che, disciolto in 100 $l$ di miscela corrispondono ad una concentrazione pari a $25 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^4}\right) g/l$.

## 23 luglio 2003

**Esercizio 1.** Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2x^2 \\ \dot{y} = -3x + y + 3x^2 \end{cases}$$

(a) Trovare i punti di equilibrio.

(b) Scrivere il sistema linearizzato nell'intorno di tali punti, e classificarli.

(c) Disegnare le traiettorie del sistema linearizzato nell'intorno dei punti di equilibrio, mettendo in evidenza eventuali orbite rettilinee.

**Soluzione.**

(a) I punti di equilibrio risolvono il sistema

$$\begin{cases} 2x(x-1) = 0 \\ 3x(x-1) + y = 0 \end{cases}$$

ovvero $(0,0)$, $(1,0)$.

(b) Il sistema linearizzato nell'origine è

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = -3x + y \end{cases}$$

cui corrispondono gli autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. L'origine è dunque una sella instabile anche per il sistema non linearizzato.

Il sistema linearizzato in $(1,0)$ è

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x-1) \\ \dot{y} = 3(x-1) + y \end{cases}$$

cui corrispondono gli autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, che identificano un nodo instabile.

(c) Gli autovettori associati a ciascun autovalore corrispondono alle traiettorie rettilinee. Si lascia allo studente il calcolo ed il disegno delle orbite.

**Esercizio 2.** Sia dato il sistema conservativo ad un grado di libertà

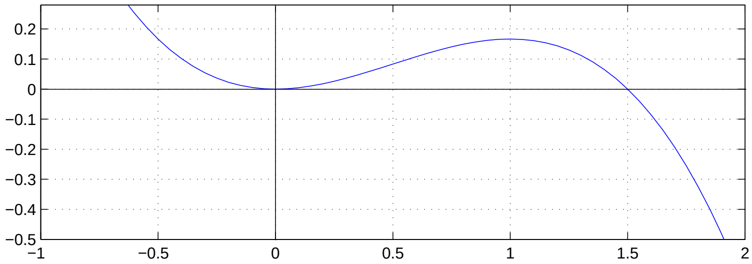
$$\ddot{x} = x^2 - x$$

(a) Trovare i punti critici del sistema equivalente.

(b) Trovare gli integrali primi (e confrontare con l'energia meccanica).

(c) Disegnare accuratamente le traiettorie nel piano delle fasi.

(d) Stabilire a quali problemi di Cauchy $x(0) = a$, $y(0) = 0$ corrispondono orbite periodiche.



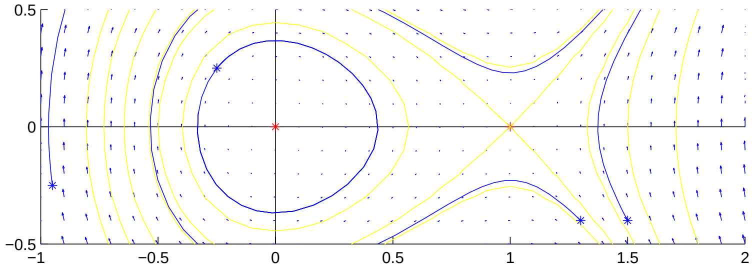




FIGURA 5

**Soluzione.**

(a) Il sistema equivalente è

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 - x \end{cases}$$

i cui punti critici sono $(0,0)$ e $(1,0)$.

(b) Un integrale primo del sistema (che è hamiltoniano -verifica!-) è

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{y^2}{2}}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}_{\text{energia potenziale}}$$

l'energia potenziale viene studiata accuratamente. Il risultato dello studio -elementare- di funzione è in Figura 5.

(c) Le linee di livello dell'energia ed alcune traiettorie del sistema sono disegnate in Figura 5.

(d) Le uniche orbite periodiche sono quelle che, per $y(0) = 0$ hanno $x(0) = a$ con $-\frac{1}{2} < a < 1$.

**Esercizio 3.** Sia dato, per $k > 0$, il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 - x - ky \end{cases}$$

(si osservi che per $k = 0$, coincide con quello dell'esercizio 2).

(a) Verificare che l'energia meccanica trovata nell'esercizio precedente è una funzione di Liapunov per questo sistema in un opportuno aperto $\mathcal{A}$.

(b) Verificare, utilizzando la funzione di Liapunov, che l'origine è asintoticamente stabile.

**Soluzione.**

(a) Occorre verificare che la funzione

$$\mathcal{H} = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

è funzione di Liapunov per il sistema in oggetto nell'intorno dell'origine. Se $\mathcal{A}$ è un aperto che contiene $(0,0)$, $\mathcal{H} \in C^1(\mathcal{A})$ deve soddisfare le seguenti condizioni:

(i) $\mathcal{H}(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathcal{A}$, e $\mathcal{H}(x,y) = 0$ solo se $(x,y) = (0,0)$

(ii) $\dot{\mathcal{H}}(x,y) \leq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathcal{A}$.

Affinché sia soddisfatta la (i), deve essere $x < 3/2$. Quindi basta scegliere

$$\mathcal{A} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < \frac{3}{2} \right\}.$$

Affinché sia soddisfatta la (ii), deve essere

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}(x,y) &= \mathcal{H}_x(y) + \mathcal{H}_y(x^2 - x - ky) \\ &= (x - x^2)y + y(x^2 - x - ky) = -ky^2. \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che $\mathcal{H}$ è una funzione di Liapunov e che l'origine è punto di equilibrio stabile.

(b) Per $k > 0$ l'insieme di annullamento di $\dot{\mathcal{H}}$ è l'asse delle $x$. Tale insieme contiene due sottoinsiemi positivamente invarianti: i punti $(0,0)$ ed $(1,0)$ (lo sono banalmente in quanto orbite stazionarie). Inoltre, osserviamo che il segmento $0 < x < 1$ non è positivamente invariante per il sistema, così come non lo è la semiretta $x < 0$; per mostrarlo basta verificare che $\dot{y} \neq 0$ nei punti $\{(x,0) : x < 0\}$ e $\{(x,0) : 0 < x < 1\}$. Se quindi restringiamo l'insieme $\mathcal{A}$fino a considerare

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}$$

è soddisfatto anche il criterio di Liapunov per l'asintotica stabilità di $(0,0)$.

**Esercizio 4.** Trovare le soluzioni periodiche del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + x(\sqrt{x^2 + y^2} - 1) \\ \dot{y} = 2x + y(\sqrt{x^2 + y^2} - 1) \end{cases}$$

e verificarne la stabilità. Quindi disegnare un diagramma qualitativo delle soluzioni.

**Soluzione.** Utilizzando il passaggio a coordinate polari, il sistema è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\rho - 1) \\ \dot{\theta} = 2 \end{cases}$$

che possono essere facilmente integrate:

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{1}{1 + C_1 e^t} \\ \theta = 2t + C_2. \end{cases}$$

È molto semplice procedere con uno studio qualitativo delle orbite. La prima equazione è autonoma, e va interpretata solo con $\rho \geq 0$ per avere senso fisico. Deduciamo che le traiettorie $\rho = 0$ e $\rho = 1$ sono di equilibrio (e corrispondono a traiettorie circolari periodiche); inoltre, $\rho = 0$ è di equilibrio stabile, mentre il ciclo limite $\rho = 1$ è instabile. L'origine è allora un fuoco stabile, con bacino di attrazione l'insieme $\rho < 1$. Dalla seconda equazione si evince che le traiettorie sono percorse in verso antiorario. Lasciamo agli studenti il disegno del grafico delle traiettorie che collazioni le informazioni fin qui esposte.

## 8 luglio 2004

**Esercizio 1.** Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(x^2 + 4y^2 - 4) \\ \dot{y} = x(x^2 + 4y^2 - 4). \end{cases}$$

(a) Determinare la totalità dei punti critici.

(b) Studiare la stabilità dell'origine con il metodo di linearizzazione.

(c) Trovare gli integrali primi del sistema.

(d) Disegnare nel piano delle fasi alcune traiettorie significative che risolvono il sistema, precisandone il verso di percorrenza.

(e) Discutere la stabilità dell'origine e l'esistenza di traiettorie periodiche in tutto il piano delle fasi.

**Soluzione.**

(a) I punti critici del sistema sono l'origine e i punti dell'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$, rappresentati in rosso nella Figura 6.

(b) Il sistema linearizzato nell'origine è

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

cui corrispondono gli autovalori $\lambda_{1,2} = \pm i$. L'origine è perciò un centro per il sistema linearizzato, ma nulla si può concludere circa il sistema d'origine.

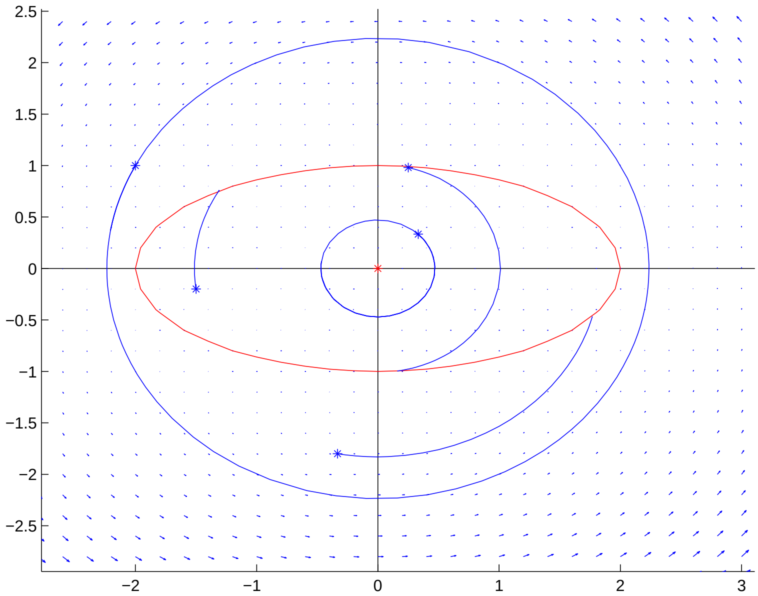



Figura 6

(c) Gli integrali primi possono essere trovati integrando l'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Integrata, a variabili separabili, si trova facilmente che gli integrali primi hanno equazione $\mathcal{U}(x,y) = x^2 + y^2$. Le linee di livello della funzione $\mathcal{U}$ sono unione disgiunta di traiettorie.

(d) Alcune traiettorie sono riportate in Figura 6; il verso di percorrenza si può dedurre dal campo delle direzioni.

(e) L'origine per il sistema non linearizzato è effettivamente un centro. Infatti la funzione $\mathcal{U}$ ha un minimo in $(0,0)$. Si può provare che le curve di equazione $x^2 + y^2 = k$ corrispondenti ai valori di $0 \leq k < 1$ e $k > 4$ costituiscono traiettorie periodiche per il sistema d'origine.

**Esercizio 2.** Passando a coordinate polari, descrivere dettagliatamente le traiettorie del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \sin\sqrt{x^2+y^2} - y \\ \dot{y} = y \sin\sqrt{x^2+y^2} + x. \end{cases}$$

**Soluzione.** Si osserva che l'origine è un punto stazionario per il sistema. Tramite linearizzazione nell'intorno dell'origine si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

L'origine è dunque un centro per il sistema non linearizzato e nulla si può dedurre circa l'andamento delle orbite del sistema non lineare. Passando a coordinate polari, utilizzando le derivate

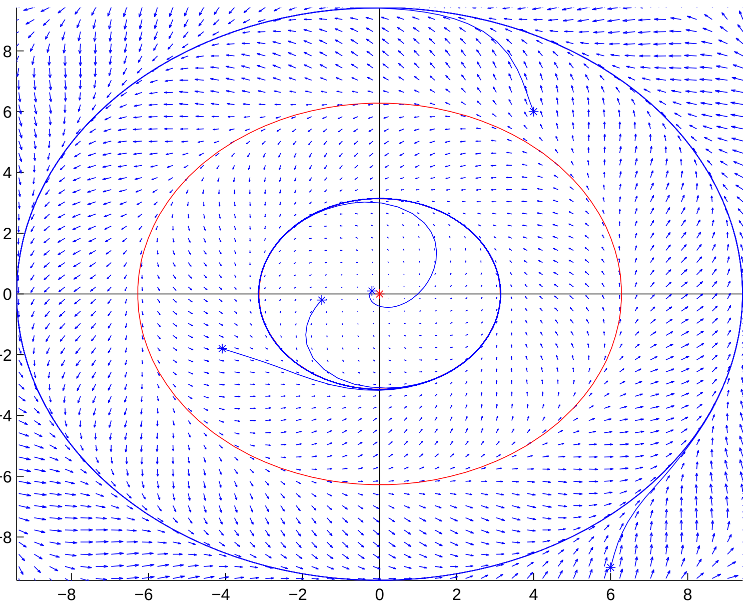


FIGURA 7

delle relazioni dinamiche

$$\begin{cases} \rho = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho \sin \rho \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Dalla prima relazione deduciamo, innanzi tutto, che le circonferenze di equazione $\rho = k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$ sono traiettorie periodiche, e risultano essere cicli limite per il sistema. Alternativamente, tali cicli limite, sono stabili e instabili, rispettivamente per valori di $k$ dispari e pari, come può dedurre valutando il segno della variazione di $\rho$, sempre dalla prima relazione. Dalla seconda, deduciamo che le traiettorie sono percorse tutte in senso antiorario. In Figura 7 sono riportati in rosso i cicli limite instabili e in blu quelli stabili, oltre alle soluzioni di alcuni problemi di Cauchy.

L'origine per il sistema non lineare risulta essere un fuoco instabile.

**Esercizio 3.** Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -x + (k+1)x^3 - k^2\dot{x}^3$$

dove $k$ è un parametro reale.

(a0) Per quale valore di $k$ l'equazione descrive un sistema conservativo ad un grado di libertà?

Per tale valore di $k$:

(a1) disegnare le traiettorie del sistema nel piano $(x, \dot{x})$, con il dettaglio del verso di percorrenza;

(a2) precisare per quali livelli dell'energia meccanica le traiettorie corrispondenti costituiscono orbite limitate.

Nel caso $k = -1$, studiare la stabilità dell'origine:

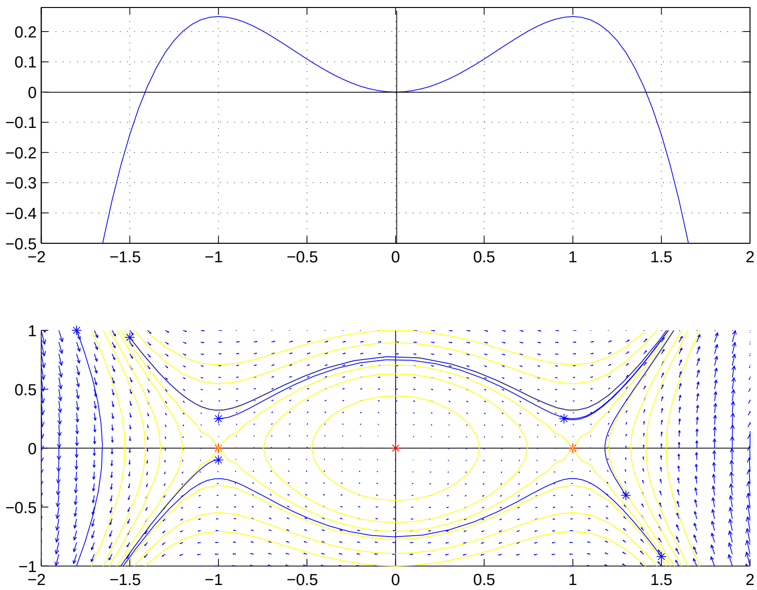



Figura 8. In alto, è rappresentato il potenziale $\mathcal{U}$; in basso, in giallo le linee di livello dell'energia meccanica, e in blu alcune traiettorie che risolvono il sistema.

(b1) con il metodo di linearizzazione;

(b2) con il metodo della funzione di Liapunov, motivando adeguatamente le conclusioni circa l'asintotica stabilità.

**Soluzione.**

(a0) $k = 0$.

(a1) L'energia potenziale associata all'equazione $\ddot{x} = -x + x^3$ è pari a $U = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$ (cui, come è noto, eventualmente possiamo aggiungere una costante, additiva arbitraria). La $\mathcal{U}$ ha massimo in $(\pm 1, 0.25)$, e un minimo relativo nell'origine; l'intervallo $x \in (-1, 1)$ costituisce dunque una buca di potenziale (vedi Figura 8).
Riconducendo l'equazione ad un sistema del primo ordine si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^3 \end{cases}$$

i cui punti stazionari sono $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$. Le linee di livello dell'integrale primo ed alcune soluzioni al problema di Cauchy per il sistema in oggetto sono riportate nella Figura 7.

(a2) L'energia meccanica associata al sistema è

$$\mathcal{E} = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}.$$

Gli stati "legati", corrispondenti a traiettorie chiuse, corrispondono ai livelli di energia della buca del potenziale, ovvero ai livelli compresi tra $E0$ ed $E1$ (vedi Figura 8). Il livello $E0$ corrisponde al punto stazionario $(0, 0)$, ed ha perciò energia nulla: $\mathcal{E}_0 = 0$. Il livello $E1$ corrisponde ai punti stazionari $(\pm 1, 0)$, ed ha energia $\mathcal{E}_1 = \frac{1}{4}$.

(b1) Studiamo la stabilità della soluzione stazionaria del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y^3. \end{cases}$$

Linearizzando, si trova che l'origine corrisponde ad un centro, e non possiamo concludere nulla circa la stabilità per il sistema non linearizzato.

(b2) Utilizzando la funzione di Liapunov $\mathcal{V} = x^2 + y^2$, si ha che $\dot{\mathcal{V}} = -2y^4$. Dunque essendo $\dot{\mathcal{V}} \leq 0$ possiamo concludere che il sistema è stabile. Inoltre, l'osservazione che l'insieme di $\mathbb{R}^2$ sul quale $\dot{\mathcal{V}}$ si annulla ($y = 0$) non è positivamente invariante (infatti osservando il sistema sull'asse $y = 0$, esclusa l'origine si ha $\dot{y} \neq 0$), ci permette di concludere che l'origine è soluzione stazionaria asintoticamente stabile per il sistema dato.

**Esercizio 4.**

(a) Definizione di sistema hamiltoniano.

(b) Dimostrare che l'hamiltoniana di un sistema è un integrale primo.

## 19 luglio 2004

**Esercizio 1.** Sia data l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{2ty}{t^2+1} + \frac{1}{(t^2+1)^2}.$$

Previsioni in base alla teoria (senza integrare l'equazione, ma enunciando il teorema opportuno e verificandone le ipotesi).

(a1) Il problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$ ha soluzione unica locale?

(a2) Se e dove è possibile prolungare le soluzioni?

Studio qualitativo delle soluzioni.

(b1) Disegnare un grafico delle pendenze della soluzione.

(b2) È possibile prevedere l'esistenza di asintoti orizzontali?

(c) Integrare l'equazione e risolvere il problema di Cauchy $y(\sqrt{3}) = 1$.

**Soluzione.**

(a1) Sia $f(t, y) = \dfrac{-2ty}{t^2+1} + \dfrac{1}{(t^2+1)^2}$. L'enunciato del teorema di esistenza ed unicità è riportato nella parte 1 delle dispense. Essendo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ le ipotesi sono verificate.

(a2) L'enunciato del teorema di prolungamento è nella parte 1 delle dispense. Per ogni intervallo limitat0 $(a, b)$, nella striscia $S = (a, b) \times \mathbb{R}$ le funzioni $f$ ed $f_y$ risultano continue e vale

$$|f(t, y)| \leq \left|\frac{2t}{1+t^2}\right| |y| + \left|\frac{1}{(t^2+1)^2}\right| \leq C_1|y| + C_2$$

dove

$$C_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{2t}{1+t^2}\right| \text{ e } C_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{(t^2+1)^2}\right|.$$

Essendo la crescita sublineare, le soluzioni dell'equazione differenziale sono prolungabili a tutto $(a, b)$, e, data l'arbitrarietà di $a$ e di $b$, a tutto $\mathbb{R}$.

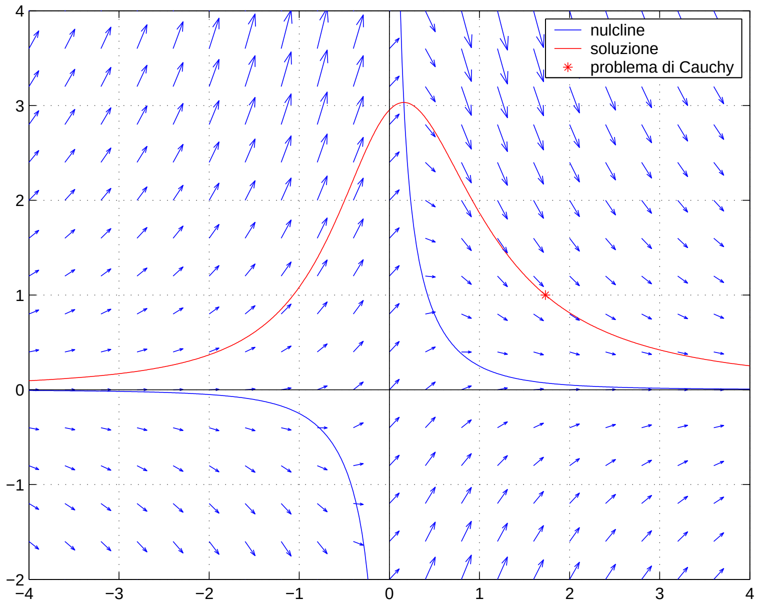



FIGURA 9. Campo di direzioni dell'Esercizio 1

(b1) Osserviamo che per $t = 0$ $y' = 1$; inoltre, se $t \neq 0$, $y' = 0$ nei punti del grafico della funzione $y = \dfrac{1}{2t(t^2+1)}$; l'equazioneè un'iperbole che ha per asintoti gli assi.

Risolvendo quindi la disuguaglianza che discende da $y' > 0$, otteniamo che

$$y' > 0 \qquad \text{per } t > 0 \text{ se} \quad y < \frac{1}{2t(t^2+1)}$$
$$\text{per } t < 0 \text{ se} \quad y > \frac{1}{2t(t^2+1)}.$$

Il campo delle direzioni è riportato in Figura 9. Gli studenti potranno verificare confrontando la figura con il grafico ottenuto utilizzando il programma *dfield*, al link riportato nella *Pagina Docente*.

(b2) Dall'andamento del campo di direzioni si può prevedere che la retta $y = 0$ (che NON è integrale particolare) sia asintoto orizzontale.

(c) Utilizzando una funzione integrante $\mu = \mu(t)$ incognita, abbiamo

$$\begin{aligned} y'\mu + \frac{2ty\mu}{t^2+1} &= \frac{\mu}{(t^2+1)^2} \\ \frac{d}{dt}(y\mu) &= \frac{\mu}{(t^2+1)^2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

avendo supposto che la funzione $\mu$ sia tale da soddisfare la relazione

$$\frac{2t\mu}{t^2+1} = \mu'. \tag{3.4}$$

Una soluzione della (3.4), che si ottiene con la scelta 0 per la costante additiva arbitraria è

$$\mu = t^2 + 1. \tag{3.5}$$

Utilizzando la (3.5) nella (3.3), dopo averla integrata, si ottiene:

$$y(t) = \frac{1}{t^2+1}\left\{C + \int \frac{dt}{t^2+1}\right\}$$

da cui l'integrale generale dell'equazione

$$y(t) = \frac{C + \arctan t}{t^2+1}.$$

Con $C = 4 - \pi/3$ la soluzione risolve il problema di Cauchy assegnato. In Figura 9 il grafico della soluzione.

**Esercizio 2.** Sia $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ il sistema lineare a coefficienti costanti descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases}$$

(a) Trovare la matrice esponenziale $e^{At}$.

(b) Scrivere l'integrale generale.

**Soluzione.** Abbiamo $\det A = 16$, $\mathrm{tr} A = -8$. L'equazione caratteristica associata alla matrice $A$ è:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16$$

cui corrisponde $\lambda_{1,2} = -4$ come autovalore doppio. Risolvendo il sistema

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

si ricava che l'autospazio a lui associato ha dimensione 1 avendo come base il solo vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Per trovare $e^{At}$ utilizziamo il metodo di Leonard (che, lo ricordiamo, è applicabile indipendentemente dalla diagonalizzabilità di $A$).

Risolviamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 16x = 0$$

associandola alla coppia di problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

otteniamo rispettivamente le funzioni

$$x_1(t) = e^{-4t} + 4te^{-4t} \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = te^{-4t}.$$

Risulta

$$e^{At} = x_1(t)I + x_2(t)A = e^{-4t}\begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}.$$

(b) L'integrale generale del sistema è dato da

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}] = e^{At} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

o, in forma scalare,

$$\begin{cases} x(t) = e^{-4t}[d_1(1-t) + d_2 t] \\ y(t) = e^{-4t}[-d_1 t + d_2(1+t)]. \end{cases}$$

**Esercizio 3.** Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -x(x^2-2)^2.$$

(a) Disegnare il grafico del potenziale, che si annulla in $x = 0$, associato all'equazione data.

(b) Disegnare le traiettorie del sistema nel piano $(x, \dot{x})$, con il dettaglio del verso di percorrenza.

(c) Precisare per quali livelli dell'energia meccanica le traiettorie corrispondenti costituiscono orbite periodiche.

**Soluzione.** L'equazione descrive un sistema conservativo ad un grado di libertà, e può essere studiata agevolmente dopo averla ricondotta al sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x(x^2-2)^2. \end{cases} \tag{3.6}$$

L'energia meccanica del sistema è allora

$$\mathcal{E} = \frac{y}{2} + \int_0^x s(s^2-s)^2 ds = \mathcal{E}_{cinetica} + \mathcal{E}_{potenziale}.$$

(a) L'energia potenziale $\mathcal{E}_{potenziale}(x)$ nulla in $x = 0$ è data da

$$\mathcal{E}_{potenziale} = \left[\frac{(s^2-2)^3}{6}\right]_0^x = \frac{(x^2-2)^3}{6} - \frac{4}{3} = \frac{x^6}{6} - x^4 + 2x^2.$$

$\mathcal{E}_{potenziale}$ è una funzione pari, che, come ogni funzione polinomiale, è asintotica al suo termine di grado minimo per $x \to 0$ e al suo termine di grado massimo per $x \to \pm\infty$; l'origine è il solo punto in cui la funzione $\mathcal{E}_{potenziale}$ si annulla; gli altri valori del dominio rendono $\mathcal{E}_{potenziale}$ strettamente positiva. Banalmente ricaviamo inoltre che

$$\mathcal{E}'_{potenziale}(x) = x(x^2-2)^2$$

perciò la derivata di $\mathcal{E}_{potenziale}$ ha il segno di $x$ e si annulla in $x = 0$, e in $x = \pm\sqrt{2}$. Inoltre,

$$\mathcal{E}''_{potenziale}(x) = (x^2-2)^2 + 4x^2(x^2-2) = (x^2-2)(5x^2-2)$$

quindi i punti $x = \pm\sqrt{2}$ e $x = \pm\sqrt{2/5}$ sono punti di flesso. In particolare, i punti $x = \pm\sqrt{2}$ sono flessi a tangente orizzontale. Si veda in Figura 10 il grafico del potenziale.

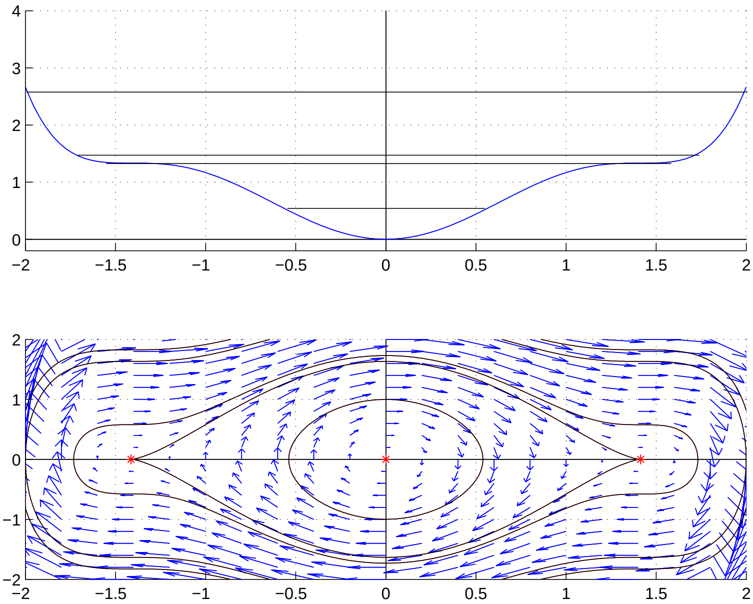



Figura 10. In figura sono riportate in nero alcune traiettorie significative ed i corrispondenti livelli energetici che risolvono l'Esercizio 3.

(b) Dal sistema (3.6) ricaviamo il comportamento del campo delle direzioni in corrispondenza degli assi, dal quale possiamo poi ricavare la direzione di percorrenza delle traiettorie. Inoltre, per $y = 0$ le traiettorie hanno tangente verticale; per $x = 0$ e per $x = \pm\sqrt{2}$ le traiettorie hanno tangente orizzontale. La pendenza delle traiettorie può essere ricavata studiando la pendenza delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x(x^2-2)^2}{y}.$$

Il campo delle direzioni è riportato nella Figura 10.

(c) Le traiettorie significative si ottengono in corrispondenza dei seguenti livelli dell'energia totale $\mathbf{E}$ che descriviamo brevemente.

$\mathcal{E} = 0$ Con energia meccanica nulla c'è solo la traiettoria stazionaria legata all'origine.

$0 < \mathcal{E} < 4/3$ Orbite periodiche percorse in senso orario.

$\mathcal{E} = 4/3$ Il livello corrisponde ai due punti stazionari $(\sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, 0)$ e da due archi di traiettorie percorsi in un tempo infinito. Il verso di percorrenza è orario come si ricava per continuità dall'analisi del campo di direzioni.

$\mathcal{E} > 4/3$ Orbite periodiche percorse in senso orario.

**Esercizio 4.** Una torta di cioccolato e pere viene sfornata bollente ($100^oC$) alle 15:00. Alle 15:10 la sua temperatura è di $80^oC$; alle 15:20 la sua temperatura è di $65^oC$.

(a) Ipotizzare un modello che descriva il raffreddamento di un corpo in un ambiente a temperatura costante.

(b) In base al modello proposto, determinare la temperatura della stanza in cui viene fatta raffreddare la torta.

**Soluzione.**

(a) Possiamo supporre che la variazione di temperatura $T(t)$ della torta sia proporzionale (con costante di proporzionalità $k$ positiva) alla differenza tra la temperatura della torta e l'ambiente, che supponiamo a temperatura costante $T_a$. Più è freddo l'ambiente in cui la torta viene sfornata, più rapido sarà il raffreddamento. Un modello di questo tipo è descritto dall'equazione

$$\dot{T} = -k(T - T_a)$$

il segno meno è coerente con il fatto che la torta, che ha una temperatura più alta di quella dell'ambiente ($100^oC$) deve raffreddarsi, ovvero diminuire la sua temperatura. Equivalentemente, si poteva fare la scelta di avere un'equazione on segno positivo, scegliendo invece $k < 0$.

Il valore della costante di proporzionalità del problema può essere determinato con le rilevazioni suggerite agli studenti.

(b) Integrando l'equazione proposta, si ottiene

$$T(t) = T_a + Ae^{-kt}.$$

Imponendo che soddisfi le condizioni imposte ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} A = 100 - T_a \\ 80 - T_a = Ae^{-10k} \\ 65 - T_a = Ae^{-20k} \end{cases}$$

Sostituendo le prime due equazioni nell'ultima, si ricava:

$$(65 - Ta)(100 - T_a) = (0 - T_a)^2$$

da cui ricaviamo $T_a = 20^oC$ e il valore (non richiesto dall'esercizio) della costante di proporzionalità $k = \frac{1}{10} = \log \frac{5}{3}$.

**Esercizio 5.** Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 y \\ \dot{y} = -xy^2. \end{cases}$$

(a) Trovare la totalità dei punti di equilibrio.

(b) Linearizzando nell'intorno dell'origine, cosa possiamo concludere?

(c) Trovare gli integrali primi.

(d) Disegnare alcune traiettorie ed in particolare quella che risolve il problema di Cauchy $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

(e) Cosa si può concludere quindi circa la stabilità dell'origine.

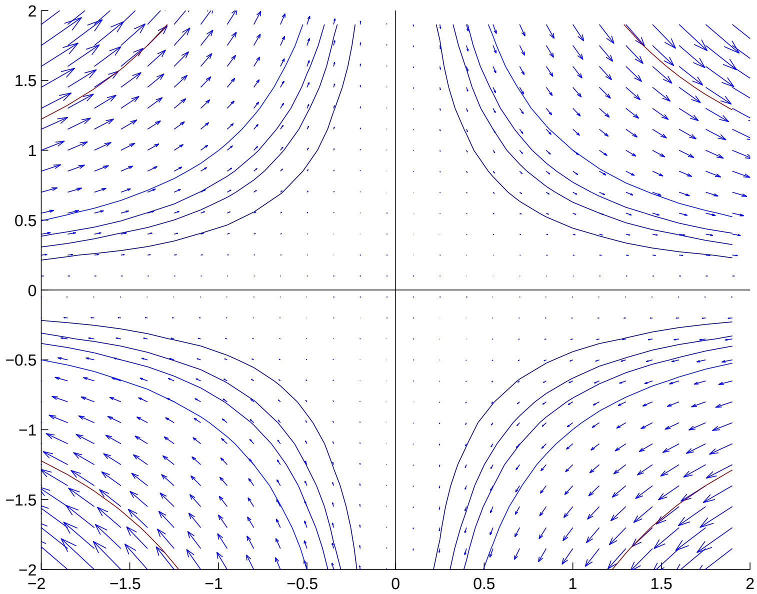



Figura 11. Integrali primi del sistema proposto nell'Esercizio 5.

**Soluzione.**

(a) Ogni punto dell'asse $x$ ed ogni punto dell'asse $y$ è punto di equilibrio.

(b) La matrice jacobiana del sistema è

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ -y^2 & -2xy \end{bmatrix} \text{ e, valutandola nell'origine, } J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

l'origine dunque è un punto degenere per il sistema, e il metodo di linearizzazione non dà informazioni circa le traiettorie per il sistema non linearizzato. A questa conclusione si poteva arrivare anche semplicemente osservando che l'origine non è punto critico isolato, dunque il metodo di linearizzazione non è applicabile.

(c) Risolvendo l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

si ottiene

$$\log|y| = \log|x| + C = \log|x| + \log K = \log K|x|$$

da cui ricaviamo gli integrali primi

$$y = \frac{C}{x}$$

con la costante $C$ che può assumere valori positivi e negativi.

In alternativa, potevamo osservare che il sistema è hamiltoniano, con hamiltoniana

$$\mathcal{H}(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2$$

come si verifica facilmente derivando. Gli studenti riflettano da soli sul fatto che le linee di livello di $\mathcal{H}$ coincidono con gli integrali primi trovati poco sopra.

(d) Alcuni integrali primi sono riportati nella Figura 11; il verso di percorrenza si deduce dal campo di direzioni.

(e) Un punto critico non isolato non può mai essere asintoticamente stabile. Dall'andamento delle traiettorie (tipo *punto di sella*) ricaviamo che l'origine è instabile.

**Esercizio 6.** Descrivere le problematiche connesse alla risoluzione di un problema ai limiti per un'equazione lineare del secondo ordine.

(a) Presentare la forma delle soluzioni di un problema omogeneo evidenziando il ruolo del parametro.
(b) Discutere il relativo caso non omogeneo.

**Soluzione.** Data l'equazione

$$\ddot{x} + f(t)\dot{x} + g(t)x = 0$$

ne cerchiamo delle soluzioni che siano definite in tutto l'intervallo limitato $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e che soddisfino una condizione *ai limiti* del tipo

$$\begin{cases} c_{11}x(a) + c_{12}\dot{x}(a) = 0 \\ c_{21}x(b) + c_{22}\dot{x}(b) = 0 \end{cases}$$

che descrive il cosiddetto problema omogeneo.

(a) L'integrale generale dell'equazione può essere scritto a partire da due soluzioni particolari $x_1$ e $x_2$ linearmente indipendenti come

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t).$$

Imporre le condizioni ai limiti significa allora cercare le soluzioni $A$ e $B$ del sistema algebrico

$$\begin{cases} c_{11}Ax_1(a) + Bx_2(a) + c_{12}(A\dot{x}_1(a) + B\dot{x}_2(a)) = 0 \\ c_{21}Ax_1(b) + Bx_2(b) + c_{22}(A\dot{x}_1(b) + B\dot{x}_2(b)) = 0 \end{cases}$$

che ammette soluzione non banale se e solo se la matrice dei coefficienti è singolare.

Se i coefficienti dell'equazione contengono un parametro $\lambda$, il valore del determinante della matrice dei coefficienti sarà funzione del parametro $\lambda$. Quei valori di $\lambda$ per i quali il sistema ammette soluzione (non unica) si dicono *autovalori* del problema ai limiti.

(b) Il problema non omogeneo

$$\begin{cases} c_{11}x(a) + c_{12}\dot{x}(a) = b_1 \\ c_{21}x(b) + c_{22}\dot{x}(b) = b_2 \end{cases}$$

viene analogamente ricondotto allo studio di un sistema lineare non omogeneo. È chiaro che in questo caso il problema ammette soluzione (unica e non banale) se e solo se la matrice dei coefficienti è non singolare.

## 17 febbraio 2005

**Esercizio 1.** Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*a.* Determinarne gli autovalori e gli autovettori.

*b.* Dare la definizione di matrice esponenziale.

*c.* Trovare la matrice $e^{At}$, giustificando il procedimento utilizzato.

**Soluzione.**

*a.* Il polinomio caratteristico della matrice $A$ è

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] = (1-\lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

Gli autovalori sono perciò reali e distinti: $\lambda_{1,2,3} = -1, 1, 3$.
Gli autovettori associati a $\lambda_1 = -1$, a $\lambda_2 = 1$ ed a $\lambda_3 = 3$ sono, rispettivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*b.* Data una matrice $A$ si definisce

$$e^A = \sum_{k=0,\cdots,\infty} \frac{A^k}{k\,!}.$$

*c.* La matrice invertibile

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

diagonalizza $A$ ovvero

$$\widetilde{A} = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Essendo

$$e^{\widetilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

risulta

$$e^{At} = S \cdot e^{\widetilde{A}t} S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2(e^{-t} + e^{3t}) & 1/2(e^{3t} - e^{-t}) & 0 \\ 1/2(e^{3t} - e^{-t}) & 1/2(e^{-t} + e^{3t}) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

**Esercizio 2.** Considerare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y^2 - 1) \\ \dot{y} = -y(x^2 + y^2 + 1); \end{cases}$$

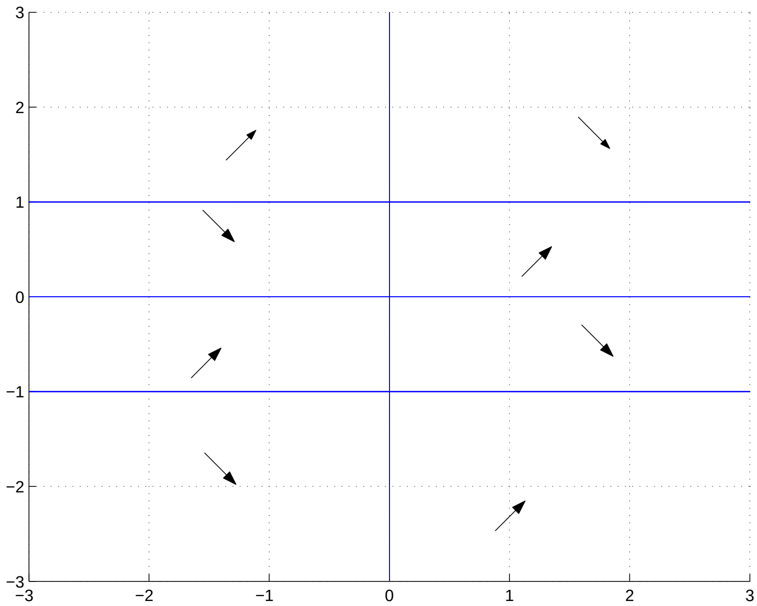



FIGURA 12. Campo delle direzioni delle soluzioni del sistema proposto nell'Esercizio 2

*a.* e determinarne le nullcline ed il campo di direzioni.

*b.* Discutere la stabilitå dell'origine utilizzando due vie: attraverso il metodo di linearizzazione (specificando se è conclusivo oppure no) ed utilizzando il metodo della funzione di Liapunov.

**Soluzione.**

*a.* Le nullcline sono i luoghi di punti a tangente orizzontale ($y = 0$) e verticale ($x = 0$ e $y = \pm 1$). Osserviamo che $y = 0$ e $x = 0$ sono anche traiettorie. Il campo di direzioni (in Figura 12) si ottiene studiando la pendenza dell'equazione differenziale associata al sistema

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x^2 + y^2 + 1)}{x(y^2 - 1)}.$$

*b.* Il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine è

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y; \end{cases}$$

cui corrisponde l'autovalore doppio $\lambda = -1$. Il sistema linarizzato è disaccoppiato e le sue traiettorie corrispondono a quelle di un nodo a stella. Il caso di autovalore doppio non prevede, in generale, di poter concludere che le traiettorie trovate siano topologicamente equivalenti a quelle del sistema non linearizzato. In questo caso però è possibile estendere la conclusione poiché il sistema risultante è disaccoppiato.

Un altro modo per verificare la stabilità della soluzione nulla $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ è dovuto a Liapunov. Sia $\mathcal{V}(x, y) = x^2 + y^2$. La funzione $\mathcal{V}$ è una funzione di Liapuntov per il sistema, come è facile verificare essendo

$$\dot{\mathcal{V}} = \mathcal{V}_x \dot{x} + \mathcal{V}_y \dot{y} = 2x^2(y^2 - 1) - 2y^2(x^2 + y^2 + 1) = -2x^2 - 2y^4 - 2y^2 < 0.$$

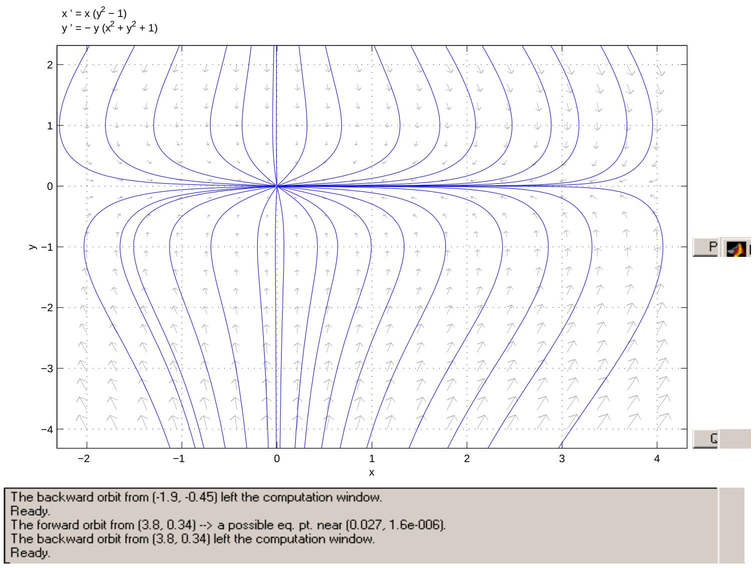



FIGURA 13. Alcune soluzioni del sistema proposto nell'Esercizio 2, utilizzando `pplane6`.

**Esercizio 3.** Sia dato il sistema conservativo ad un grado di libertå

$$\ddot{x} = 2x - x^2.$$

*a.* Trovare i punti critici del sistema equivalente.

*b.* Trovare gli integrali primi.

*c.* Disegnare accuratamente le traiettorie nel piano delle fasi.

*d.* Indicare a quali condizioni iniziali $x(0) = \alpha$, $\dot{x}(0) = 0$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, corrispondono orbite periodiche.

**Soluzione.**

*a.* Il sistema equivalente è

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x - x^2; \end{cases}$$

i cui punti critici sono $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (0, 2)$.

*b.* Gli integrali primi sono soluzione dell'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - x^2}{y}.$$

Integrando a variabili separabili, si ottiene che gli integrali primi sono le linee di livello della funzione

$$\mathcal{U}(x, y) = \frac{y^2}{2} - x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

La funzione $\mathcal{U}$ è l'energia meccanica del sistema (hamiltoniano). Si riconosce che l'energia potenziale corrisponde a

$$\mathcal{P}(x) = -x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

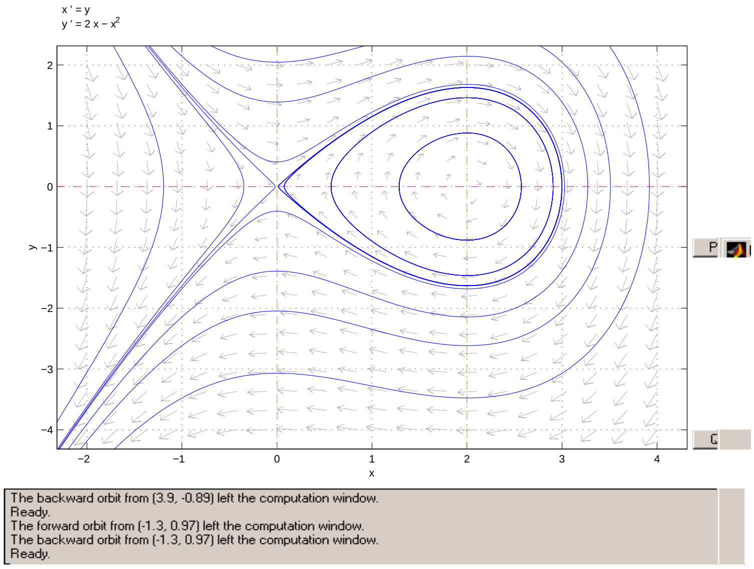



Figura 14. Traiettorie nel piano delle fasi associate all'Esercizio 3. Le traiettorie sono disegnate con l'ausilio di `pplane6`, ma possono essere ottenute facilmente anche per via qualitativa.

*c.* Nota l'energia potenziale conviene dedurre il grafico delle traiettorie da tale andamento, studiando poi i versi di percorrenza mediante il campo delle direzioni. Il grafico che si ottiene è riportato in Figura 14. Osserviamo che

- se $\mathcal{U}(x, y) < -4/3$ si ha una traiettoria aperta ed illimitata a sinistra dell'origine.
- se $\mathcal{U}(x, y) = -4/3$ si ha un'orbita puntiforme $x = 2$ ed $y = 0$ e ancora un ramo a sinistra dell'origine.
- se $-4/3 < \mathcal{U}(x, y) < 0$ si ha un'orbita periodica percorsa in senso orario attorno al punto critico $P_2$ e un ramo a sinistra dell'origine.
- se $\mathcal{U}(x, y) = 0$ si hanno 4 orbite: una traiettoria stazionaria nell'origine; un'orbita limitata ma percorsa in tempo infinito che inizia e finisce nell'origine e si avvolge attorno al punto critico $P_2$; due orbite illimitate a sinistra dell'origine una nel semipiano delle $y > 0$ e l'altra nel semipiano delle $y < 0$.
- se $\mathcal{U}(x, y) > 0$ si ha solo un'orbita aperta illimitata.

*d.* Il problema di Cauchy ha soluzione periodica solo se $0 < \alpha < 3$.

**Esercizio 4.** Studiare qualitativamente le linee integrali dell'equazione differenziale

$$y' = (y - e^x)(1 - e^{xy^2}).$$

*a.* Stabilire l'applicabilità di un teorema di esistenza ed unicità locale per il Problema di Cauchy.

*b.* Ricercare i luoghi di punti stazionari.

*c.* Ricercare le eventuali soluzioni costanti.

*d.* Determinare il campo delle direzioni delle soluzioni e da questo dedurre un possibile andamento qualitativo delle soluzioni stesse.

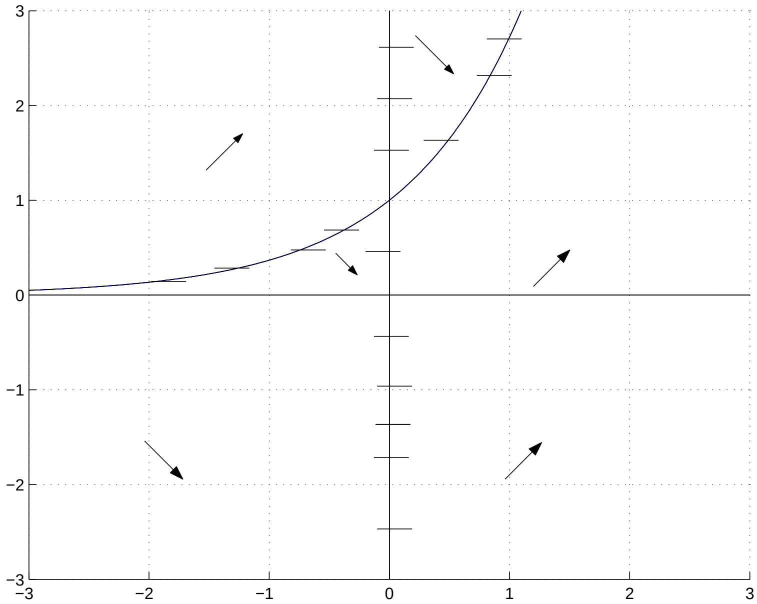



FIGURA 15. Campo delle direzioni e linee a tangente orizzontale dell'Esercizio 4

*e.* Stabilire l'applicabilitå di un teorema di esistenza ed unicitå in grande per il Problema di Cauchy.

*f.* Determinare quali soluzioni sono sicuramente prolungabili a tutto $\mathbb{R}$, quali a tutto $\mathbb{R}^+$ e quali a tutto $\mathbb{R}^-$.

**Soluzione.** Sia

$$f(x,y) = (y - e^x)(1 - e^{xy^2}).$$

*a.* Essendo $f(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ il Problema di Cauchy ammette soluzione unica qualunque sia la coppia di dati rispetto ai quali viene assegnato.

*b.* I luoghi di punti stazionari (ovvero a tangente orizzontale) risolvono le equazioni $y = e^x$ e $e^{xy^2} = 1$ (ovvero $xy^2 = 0$ quindi gli assi).

*c.* Osserviamo che la retta $y = 0$ è integrale.

*d.* Il campo delle direzioni è riportato nella Figura 15.

*e.* Un teorema di prolungamento può essere applicato quando sia possibile fornire una maggiorazione lineare della funzione $f(x,y)$. In questo caso è indispensabile limitarsi a studiare il semipiano $x \leq 0$, altrimenti non è possibile dominare il secondo dei due fattori del prodotto che compone $f$. Introduciamo quindi la striscia $S = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$; con $(x,y) \in S$ risulta

$$|f(x,y)| \leq |y - e^x||1 - e^{xy^2}| \leq (|y| + 1)2.$$

Perciò tutte le soluzioni con dato iniziale con ascissa negativa sono prolungabili a priori a tutto $\mathbb{R}^-$.

*f.* È possibile dedurre che ogni soluzione è anche prolungabile a tutto $\mathbb{R}^+$. Infatti le soluzioni negative devono essere prolungate per non incrociare l'asse $y = 0$. Le soluzioni positive (che crescono) non possono incrociare la linea $y = e^x$ dove avrebbero pendenza nulla. Siccome la funzione $y = e^x$ è definita in particolare su $\mathbb{R}^+$ ne risulta che tutte le funzioni che sono da lei dominate sono prolungabili a $\mathbb{R}^+$.

**Esercizio 5.**

*a.* Integrare l'equazione differenziale

$$y' = \left(\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\right) - e^{-2y/x}.$$

precisando dove è possibile applicare il Teorema di Esistenza ed Unicitå locale per un generico Problema di Cauchy $y(x_0) = y_0$.

*b.* Tra le linee integrali ci sono rette o semirette?

*c.* Trovare la soluzione dei problemi di Cauchy $y(1) = \log\sqrt{2}$ e $y(1) = \log\sqrt[4]{2}$ indicando il relativo intervallo massimale di prolungabilitå.

**Soluzione.**

*a.* L'equazione da integrare è un'equazione omogenea. Deve essere $x \neq 0$. È comodo usare la sostituzione

$$\frac{y(x)}{x} = t(x) \qquad \text{da cui, differenziando } y'(x) = t(x) + xt'(x)$$

sostituendo nell'equazione assegnata, si ha

$$xt'(x) = \frac{1}{2} - e^{-2t(x)}.$$

L'equazione trovata in $t(x)$ e $x$ è a variabili separabili:

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{1 - 2e^{-2t}} &= \frac{dx}{2x} \\
\frac{e^{2t}\,dt}{e^{2t} - 2} &= \frac{dx}{2x} \\
\frac{1}{2}\log|e^{2t} - 2| &= \frac{1}{2}\log|x| + C \\
\log\sqrt{|e^{2t} - 2|} &= \log\sqrt{C|x|}.
\end{aligned}$$

Risulta immediato scrivere la soluzione in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = C(e^{2t} - 2) \\ y = Ct(e^{2t} - 2) \end{cases}$$

ed eliminando la dipendenza da $t$ si trova la soluzione in forma esplicita

$$y = \frac{x}{2}\log(2 + kx).$$

*b.* L'unica coppia di soluzioni rettilinee corrisponde a $y = \dfrac{x}{2}\log 2$, rispettivamente per $x > 0$ e per $x < 0$.

*c.* Il Problema di Cauchy $y(1) = \log\sqrt{2}$ è risolto dalla retta $y = \frac{x}{2}\log 2$, il cui intervallo massimale di prolungabilità è $\mathbb{R}^+$. Il problema di Cauchy $y(1) = \log\sqrt[4]{2}$ è risolto dalla funzione $y = \frac{x}{2}\log(2 + x(e^{2\sqrt[4]{2}} - 2))$, che è definita per $x > \frac{2}{-e^{2\sqrt[4]{2}} + 2}$ ed ha intervallo massimale di definizione pari ad $\mathbb{R}^+$.